

الوحدة الأولى أساسيات ميكانيك الكم

* ميكانيك الكم :-

هو ذلك التخصص من الفيزياء الذي يتناول دراسة الأنظمة المجهرية (الدقيقة) ووجد لفشل الميكانيك الكلاسيكي في حل بعض المشكلات مثل توليد زوج الإلكترون - بوزترون أو ظاهرة كومبتون .

* إن الفيزياء التي يطلق عليها غالباً في وقتنا الحاضر الفيزياء الكلاسيكية انتهت حتى عام ١٩٥٩ على ثلاث مواضيع رئيسية هي :-

انتهت الفيزياء الكلاسيكية على ثلاث مواضيع رئيسية

١- الميكانيك :- تتم فيه دراسة حركة الأجسام الظاهرية .

٢- الترموديناميك :- وهو يتم الميكانيك ويعني تناول العمليات التي تنطوي على تفاعلات حرارية بين الأجسام وبسطها المحيط .

٣- النظرية الكهرومغناطيسية :- وتعني دراسة المجالات الكهربائية والمغناطيسية والعلاقة فيما بينها وبين الشحنات والتيار .

* الميكانيك الكلاسيكي يعالج الظواهر التي ترى بالعين المجردة (الظواهر الميكانيكية)

أما الميكانيك الكمي يعالج الظواهر التي لا ترى بالعين المجردة (الظواهر الميكانيكية)



س / ما هي ضرورة ميكانيك الكم ؟

ج / الميكانيك الكمي ضروري لانه يعالج الظواهر التي يحجز الميكانيك الكلاسيكي عن تفسيرها ومنها .

- ١ - استقرارية الذرة .
- ٢ - الظاهرة الكهروضوئية .
- ٣ - ظاهرة كومبتون .
- ٤ - تكوين زوج (الكوتون - بوزيترون) .

١ - استقرارية الذرة .

فمثل الميكانيك الكلاسيكي في تفسير استقرارية الذرة في الوقت الذي نجح فيه الميكانيك الكمي من تفسيرها .

* الجانب الكلاسيكي :- ان الالكترون في الذرة يدور حول النواة مغيراً اتجاه حركته باستمرار ولذلك فهو جسم متحرك وطبقاً للنظرية الكهروضوئية الكلاسيكية ان اي سحنة كهربائية متحركة بتعجيل تبعث اشعاعاً كهروضوئياً ولذلك يجب ان يفقد الالكترون الطاقة حول النواة داخل الذرة جزءاً من طاقته اثناء الدوران اي انه يخسر طاقته بصورة مستمرة ما دامت الحركة مستمرة وبالتالي يجب ان ينتهي بحركة حلزونية متقاربة من النواة .

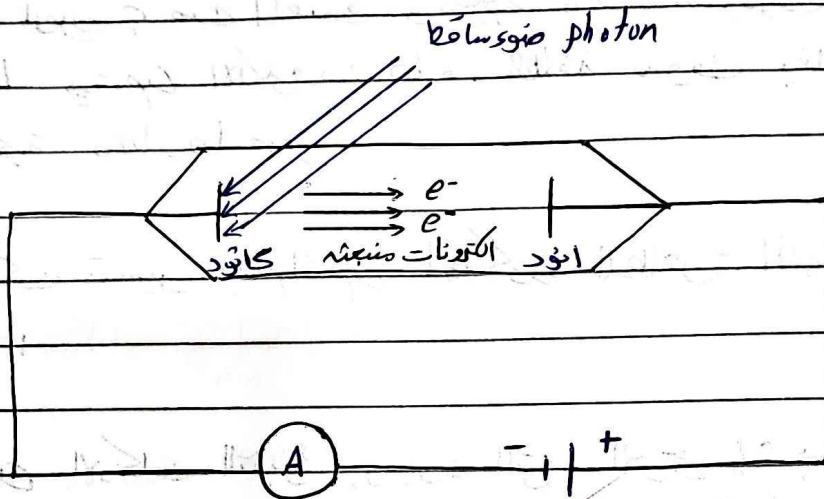
* الجانب الكمي (بور)

- ١ - يستطيع الالكترون ان يدور في مدارات معينة ومستقرة .
 - ٢ - يستطيع الالكترون ان ينتقل من مدار الى اخر اذا حصل تغير في الطاقة ΔE .
- حيث ΔE حسب امتهام او اشعاع حيث ان عدد الاشعاع ν يحل بالمعادلة :
- $$\nu = \frac{\Delta E}{h}$$



2 - الظاهرة الكهروضوئية

الانبعاث الإلكتروني من سطح الفلز نتيجة كإشعاع كهرومغناطيسي (فوتون) ذي تردد مؤثر.



يتم ملاحظة النقاط التالية للانبعاث الإلكتروني

1 - الإلكترون لا ينبعث عندما يكون تردد الفوتون أقل من تردد العتبة.

2 - عندما يكون تردد الفوتون أكبر من تردد العتبة $\nu > \nu_0$ فإن كل فوتون يبعث الإلكترون بطاقة حركية مساوية

$$K.E = h(\nu - \nu_0)$$



* الجانب الكلاسيكي :-

الالكترونات تنتج نتيجة لامتماصها طاقة من قبل الالكترونات في المعص وهو ناتج من الاستماع الساقط وكل الالكترونات يتطلب طاقة إضافية لها للوصول من المعص ونتيجة لذلك سيكون من المتوقع انه عندما يمتص الالكترون هذه الطاقة سوف يغادر المعص بطاقة حركية مقدارها صفر.

* لا يمكن تفسير الخفاءات المذكورة للطاقة الكهروضوئية للأسباب التالية :-

- 1- ليس بالإمكان التنبؤ بوجود التردد الخرج ولا بحيث اذا كان تردد الاستماع الساقط على سطح الفلز اقل من لا عندئذ لا يحدث الانبعاث الالكتروني.
- 2- بالنسبة للنظرية الكلاسيكية فان عند كل الترددات تغادر الالكترونات سطح الفلز بطاقة حركية مقدارها صفر.

* الجانب الكمي :-

وضع العالم اينشتاين فرضيته بان الضوء ليس اشعاعاً مستمراً من الاصاوح ولكنه يتكون من رذاذ من الدقائق ايعاء الاشعاع يتالف من جسيمات تدعى بالفوتونات وطاقة الفوتون الواحد

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

حيث h ثابت بلانك 6.626×10^{-34} جول.ثانية

$$1) \hbar = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow h = 2\pi\hbar \quad 2) \omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$E = h\nu = 2\pi\hbar * \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow E = \hbar\omega$$



ان انبعاث الالكترونات يحدث نتيجة اصطدام الموجات بالالكترونات ويحتوي طاقتها كليا وهذه الطاقة تتمثل في حليتين :-

١- الطاقة المطلوبة لازالة الالكترون من المعدن وهي ω_0

٢- الطاقة الحركية $\frac{1}{2} m_e v_e^2$

عندئذ تصبح معادلة اينشتاين بالشكل التالي

$$E = h\nu = \omega_0 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 \quad (K.E)$$

اي ان الالكترون سينبعث فقط اذا كانت الطاقة التي امتصها اكترون ω_0 ويحصل ذلك عندما $\nu \gg \nu_0$ وعندئذ سينبعث الالكترون بطاقة حركية

$$K.E = h\nu - \omega_0 = h\nu - h\nu_0 = h(\nu - \nu_0)$$

$$E = h\nu = (\omega_0) + \underbrace{\frac{1}{2} m_e v_e^2}_{K.E}$$

$$K.E = h\nu - \omega_0$$

$$= h\nu - h\nu_0$$

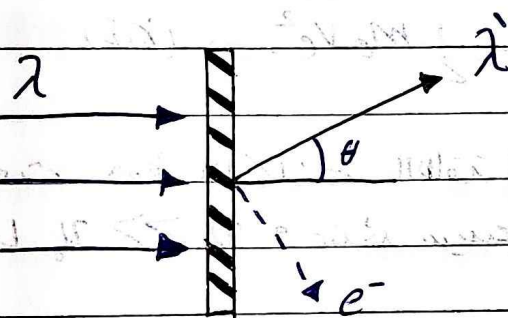
$$K.E = h(\nu - \nu_0)$$



3 - تأثير كومبتون :-

عند سقوط حزمة من الأشعة السينية على صفيحة معدنية فإن جزء من الأشعة سوف تشتت وهذه الأشعة المبعثرة تخضع للتغير في الطول الموجي λ

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$



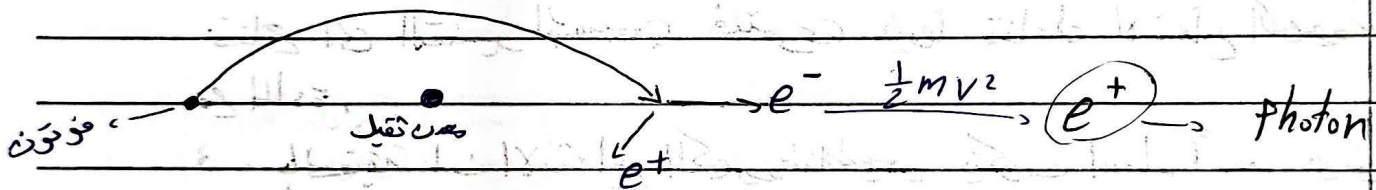
فتمثل النظرية الكلاسيكية في تفسير المعادلة أعلاه في حين دعمت النظرية الكمية تفسير تأثير (تشتت) كومبتون حيث اقترحت أن الاستماع هو مسيرات ذات طاقة محددة $h\nu$ يمكن أن تتفاعل مع المادة بدون امتصاص كامل.

• التفسير الكمي خرج لأنه ميسر سلوك من دمج (جافني وموجي)
 $\lambda' > \lambda$



4 - تكوين زوج (الكثف - جزيئات) e^+ e^-

تعتبر ظاهرة تكوين الزوج (e^+, e^-) دعم آخر للنظرية الكمية للاستعاع حيث يتولد الزوج في الهواء عندما تزيد طاقة الأشعة السينية على منعت طاقة السكون للإلكترون والبوزيترون أي أن طاقة الأشعة السينية يجب أن تكون أكبر من $2m_0c^2$ وحقاً للمعادلة $h\nu > 2m_0c^2$ ^{طاقة الفوتون} _{الزوج} أما أقل طاقة للفوتون لتوليد الزوج يجب أن يساوي $2m_0c^2$ والتي تعادل 1.02 MeV وتسمى الظاهرة العكسية لتكوين الزوج فنقاء الزوج ويتم بتكوين فوتونين طاقة كل منهما $h\nu$ بعد فناء الزوج.



* ازدواجية الجسم والموجة للإشعاع الكهرومغناطيسي .

إن الإشعاع الكهرومغناطيسي مكون من جسيمات (حقائق) تدعى بالفوتونات ومن جانب آخر النتائج الخاصة بالتداخل والحيود لا يمكن تفسيرها إلا بافتراض الطبيعة الموجبة للإشعاع الكهرومغناطيسي .

فكيف يمكن لهذا أن يكون المتناقضين ظاهرياً أن يكونا متوافقين ؟

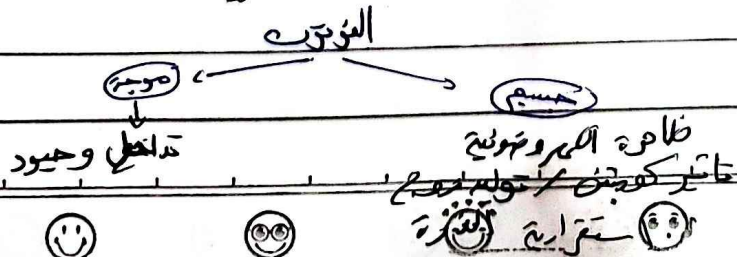
١- إن تجارب التداخل والحيود تحتاج إلى التفسير الموجي وفي تجارب تنحرف فيها كيف و أين يسير الضوء .

٢- إن تجارب الظاهرة الكهروضوئية وتأثير كومبتون وتوليد وفناء الزوج تحتاج إلى التفسير الجسيمي فنحن في تفاعل الإشعاع الكهرومغناطيسي مع المادة .

٣- الحقيقة أن الإشعاع الكهرومغناطيسي يتكون أساساً من فوتونات لا تسير بخطوط مستقيمة .

٤- يمكن اعتبار تفرجات الضوء في عبارة عن حزم جسيمات تشبه الفوتونات بحيث أن سعة الموجة في أي نقطة تتناسب مع احتمالية وجود الفوتون في تلك النقطة .

* إن هذا الوصف يختلف عن الوصف الكلاسيكي والنظرية الكلاسيكية تقدم وصفاً سببياً حيث أنها تتناول مساراً معيناً وعلى درجة كبيرة من الدقة لحركة الجسم تجاه القوة بينما الوصف اعلاه ما هو الا وصف احتمالي وجود الفوتون في كل ما يعطى فقط احتمالية وجوده في ذلك المجال أو النقطة وعند التعامل مع عدد كبير من الفوتونات فإن ذلك يكون مع احتمالية الميكانيك الكمي .



* اشتق معادلة ديبروي : اشتق المعادلة التي توصف السلوك الجسيمي او الموجي الفوتون (السلوك المزدوج او ازدواجية الفوتون)

$$E = h\nu \quad \text{in ①}$$

$$c = \lambda\nu \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{in ①}$$

$$\therefore E = h \frac{c}{\lambda} \quad \text{in ②}$$

$$E = mc^2 \Rightarrow E = mc \cdot c$$

$$\therefore E = p c \quad \text{in ③}$$

$$p = h \frac{c}{\lambda}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

معادلة ديبروي

الزخم p بوصف السلوك الجسيمي
الطول الموجي λ بوصف السلوك الموجي
} سيتم المعادلة لدراسة ازدواجية الفوتون



س // احسب طول موجة ~~جسيم~~ بروتون لاكترون يسير

بسرعة $v = 2 \times 10^6 \text{ m/s}$ تم قاربها مع جسيم يسير بسرعة

$$m_{\text{particle}} = m_p = 1 \text{ gm} \quad \text{و كتلة} \quad v_{\text{particle}} = v_p = 10 \text{ m/s}$$

sol //

1) For electron الالكترون

$$p = \frac{h}{\lambda_e} \Rightarrow \lambda_e = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda_e = \frac{h}{m_e v_e}$$

$$\lambda_e = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} * 2 \times 10^6 \text{ m/s}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{18.2 \times 10^{-25}}$$

$$\lambda_e = 0.36 \times 10^{-9} \text{ m} = 3.6 \times 10^{-10} \text{ m} = 3.6 \text{ \AA}$$

2) For particle الجسيم $m = 1 \text{ gm} = 1 \times 10^{-3} \text{ kg}$

$$p = \frac{h}{\lambda_p} \Rightarrow \lambda_p = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda_p = \frac{h}{m_p v_p}$$

$$\lambda_p = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}}{1 \times 10^{-3} \text{ kg} * 10 \text{ m/s}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1 \times 10^{-2}}$$

$$\lambda_p = 6.6 \times 10^{-32} \text{ m} = 6.6 \times 10^{-22} \text{ \AA}$$

فان الجسيمات التي تكون كتلتها كبيرة لا تظهر صفتها الموجية
اما الالكترون فيظهر صفة موجية واضحة.



* مبدأ اللادقة لهاين شيرك

وَقَدْ فَهَّمِ الْمُرْكَانِيكَ الْكَلَّاسِيكَ لَا تَوْجِدُ هُنَاكَ حُدُودَ تَقْصُرُ عَلَى دَقَّةِ الْقِيَاسِ وَيَصْهَرُ نَفْسُ الْإِنْسَانِ فِي الْمُرْكَانِيكَ الْكَمِّي وَلَكِنْ لَمْ يَتَغَيَّرْ وَاحِدٌ فَقَطْ ، وَالْأَمْرُ مُخْتَلَفٌ تَمَاماً فِي حَالَةِ قِيَاسِ مُتَغَيِّرِينَ فِي آنٍ وَاحِدٍ . فَمَثَلًا عِنْدَ قِيَاسِ أَحَدَايَ جِسْمٍ وَزَجْنِهِ فِي وَقْتٍ وَاحِدٍ خُذْ عِنْدَ قِيَاسِ الْأَحَدَايَ مِسْطَلِمِ الْجِسْمِ زَجْنًا خَارِجِيًّا فَيُؤَثِّرُ ذَلِكَ عَلَى دَقَّةِ قِيَاسِ زَجْنِهِ الْآخَرِ وَالْعَكْسُ أَيْ هُنَا صَحِيحٌ أَيْ عِنْدَ قِيَاسِ زَجْنِهِ فِي أَوَّلِ الْأَمْرِ فَيُغَيِّرُ مَوْضِعَهُ فَيُؤَثِّرُ ذَلِكَ عَلَى دَقَّةِ الْقِيَاسِ .

فإذا كانت اللدقة في تحديد موضع الجسم هو Δx و اللدقة في زخمه هو Δp فعندئذ

$$\Delta x, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

* صِدْقُ الثَّقَالِ

هذا المبدأ اقتضى منه العالم بيور ويندس على انه (حركة اللد طومة الى توصف بواسطة الميكانيك الكمي تتفق مع حركتها الى توصف بواسطة الميكانيك الكلاسيكي في الحالة التي فيها يمكن اجمال ثابت بلانك (h) ليعان ثابت بلانك h و h وحدة مربعة الميكانيك الكلاسيكي وعند حدتها فاضاها من جعل الميكانيك الكلاسيكي

إذا كانت المنظومة كبيرة بما فيه الكفاية ولم تكن هناك حاجة لدقة القياس كبيرة فإن الميكانيك الكلاسيكي يُتقرب من حركة المنظومة هذا المبدأ يسمى بالحد الكلاسيكي (Classical limit) للميكانيك الكمي. ولكن حركة الجسيمات الدقيقة

عنما لا حقا ج دقة عالمه فمنا
البراءة بالعلماء الله سبحانه وتعالى



الفصل الثاني

الصفات الأساسية لميكانيك الكم

• دالة الموجة

رأينا في الفصل السابق عند استخدام مفاهيم الميكانيك الكلاسيكي لوصف مسلو الجسم الثري - والسؤال الآن كيف يمكننا ان نوصف حركة الجسم الثري - استناداً الى فرضية دي بروي وتفسير اينشتاين للظاهرة الكهروضوئية؟ يمكن ان نقول ان كل جسم متحرك يرافقه مجال مادي فمثلاً الالكترون في الذرة لا يتحرك بحراً ولا يقترب الى مسافة قصيرة جداً من النواة لان انه مقيد في منطقة فضائية صغيرة ابعادها تقدر بحجم 10^{-9} m لذلك فان المجال المادي المصاحب له يمكن ان يغير عنه ببساطة موجة واحدة (الموجة الراقعة) - هي الموجة المعينة في منطقة محددة كالمرجحة المتحركة في سلك مربوط الطرفين متحرك في هذه المنطقة مسعة متغيرة من منطقة الى اخرى وحسب - صفر خارج هذه المنطقة).

دالة الموجة : هي سعة المجال المادي المصاحب لحركة الجسم ويؤثرها بالرمز ψ هي الدالة التي تحوي كل خواص الجسم المادي (زخم ، موضع ، زخم ، طاقة ... الخ)

يجب في احيان كثيرة عن دالة الموجة ψ بدالة معقدة لتحتوي على مقدار ψ^2 وبذلك يمكن اكمول على دالة معقدة مرافقة ψ^* لـ ψ وذلك باستبدال كل ψ بـ ψ^*

ψ مرافقها ψ^*
 i $-i$



• احتمال وجود الجسيم في مكان ما .

تحتل الدالة الموجية اودالة الموجية مكانةً مهمة في ميكانيك الكم حيث يذهب مبدأ عدم اللادقة عدم قدرتنا تحديد موقع وسرعة الجسيم بنفس اللحظة وبدقة عالية ولكن نعود الى الدالة الموجية المرافقة لكل جسيم حسب التفسير الموجي الذي قدمه شرودنجر وتقوم هذه الدالة الموجية بتحديد احتمال وجود الجسيم في أي نقطة من الفراغ الذي يمكن للجسيم التواجد به وحسب اقتراح ماكس بورن Max Born والذي يثبت فيه ان مربع الدالة الموجية يساوي احتمالية تواجد الجسيم

$$P = \frac{|\psi(x,t)|^2}{|\psi(x,t)|^2} = |\psi(x,t)|^2 \quad \text{الاحتمال}$$

حيث تحمل هذه العلاقة معنى فيزيائي رائع وهو معرفة احتمالية وجود الجسيم في عنصر حجم dV بدلالة دالته الموجية فالدالة الموجية فالدالة الموجية ψ لا تكون ذات أهمية في حد ذاتها بل هي التي تحدد احتمال تواجد الجسيم في مكان ما من الفضاء حول النواة يمكن معرفة احتمالية تواجده في المنطقة المختلفة المحيط بالنواة من خلال العلاقة الرياضية التالية

$$dP = \int |\psi(r,t)|^2 d\tau = \int |\psi^*(r,t) \psi(r,t)| d\tau \quad (2)$$

حيث ان dP هو احتمال تواجد الجسيم بالحجم $d\tau$ وبما ان دوماً قيمة حقيقية

$$d\tau = dV = dx dy dz \quad \text{حيز الحجم}$$



نقوم بإجراء التكامل على المعادلة رقم (١) للفضاء كله الممتد من اللانهاية والذي يصير عن مجموع احتمالات تواجد الجسيم في كل عناصر الحجم الموجود في الفضاء اللانهائي و هنا نحن متأكدون من تواجد الجسيم في هذا الفضاء وبالتالي فإن احتمال تواجد الجسيم سيكون منه بامثلة (١٠٠٪) وحساب واحد $100\% = 1$

اشتقاق معادلة شرط الصارية $P = |\psi(r,t)|^2$

١) $dP = \int |\psi(r,t)|^2 d\tau = \int \psi(r,t) \psi^*(r,t) d\tau$

إجراء التكامل للطرفين

من الطرف الأيسر $\int_0^1 dP = P|_0^1 = P(1) - P(0) = 1 - 0 = 1$ من الطرف الأيمن $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(r,t)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r,t) \psi^*(r,t) d\tau = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(r,t)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r,t) \psi^*(r,t) d\tau = 1$$

هذه العلاقة تسمى شرط الصارية (المالة الصارية)



* التمثيل الرياضي للموجة تدوير ثابت

$$\psi(x,t) = A_0 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)}$$

معادلة الموجة الواقفة

• استنتاج معادلة حالة الموجة

$$\psi(x,t) = A_0 e^{i(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t)} \quad \text{--- (1)}$$

معادلة الموجة الواقفة

$$E = h\nu = \hbar\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{E}{\hbar}} \quad \text{in (1)}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \quad \text{in (1)}$$

$$\therefore \psi(x,t) = A_0 e^{i(\frac{2\pi x p}{h} - \frac{Et}{\hbar})} \quad \text{--- (2)}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \boxed{h = 2\pi\hbar} \quad \text{in (2)}$$

$$\psi(x,t) = A_0 e^{i(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar})} \quad \text{--- (3)}$$

$$\boxed{\psi(x,t) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}}$$

حالة جسم على المحور x

or

$$\boxed{\psi(x,t) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}}$$

كذلك الفضايا



depend for equation
time / / / التايمة

: Equation

* معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمان TDSE

$$E = T + V$$

or $E = K.E + P.E$

(P.E) V الطاقة الكامنة

(K.E) T الطاقة الحركية

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V$$

$$T(K.E) = \frac{1}{2} m v^2 * \frac{m}{m} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

V تتغير مع تغير الجسيم مثلاً
V=0 - جسيم يتحرك في خط مستقيم
V=1/2 kx² - نابض (مزنون)
V=mgh - جسيم يسقط من ارتفاع معين

$$\psi(x,t) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} (px - Et)}$$

الدالة موجية الاحتمال

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} (px - Et)} \cdot \frac{i}{\hbar} p$$

① مشتق الدالة الموجية x
خرج الطرف من * iħ
[i² = -1]

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = -\psi(x,t) p$$

خرج الطرف من * -1

$$-i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) p$$

دوثر الزخم P → $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{p}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ على محور x

$$p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

$$p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$



$$\hat{P}_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$$

المكانية

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{P}_r = -i\hbar \nabla$$

معادلة شرودنجر الزخم

$$\hat{P}_r^2 = -\hbar^2 \nabla^2 \quad \text{or} \quad \hat{P}_r^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

حالة عامة لمربع مؤثر الزخم

$$\psi(x,t) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} (px - Et)}$$

(2) مشتق بالنسبة للزمن (t)

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} (px - Et)} \cdot \frac{i}{\hbar} (-E)$$

نخرج الحدين * $i\hbar$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \psi(x,t) \cdot E$$

معادلة الطاقة

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \rightarrow$$

حالة عامة

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \rightarrow$$

معادلة شرودنجر

حالة عامة

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x,t) \right)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,t) + V(x) \psi(x,t) \right)$$

معادلة شرودنجر العامة (في الفراغ)



time independent Schrödinger Equation

المعادلة

TISE معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن

Constant coefficients

$$\Psi(x,t) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

معادلة حالة الحزمة

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) \cdot \Psi(t) \quad \text{فصل المتغيرات}$$

$$\Psi(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px)} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(-Et)}$$

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x,t) \quad \text{معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} + V(x) \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$i\hbar \cancel{\Psi(x)} e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \left(\frac{-i}{\hbar} E \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}Et}} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \cancel{e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}$$

$$E \Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x) \quad \text{معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن}$$

$$E \Psi(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r) + V(r) \Psi(r) \quad \text{معادلة شرودنجر المستقلة عن الزمن}$$



$$E \psi(r) = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r) + V(r) \psi(r) \quad * \quad \frac{-2m}{\hbar^2}$$

$$\frac{-2m}{\hbar^2} E \psi(r) = \nabla^2 \psi(r) - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \psi(r)$$

$$\nabla^2 \psi(r) - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \psi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi(r) = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 \psi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - \underbrace{V(r)}_{\text{الطاقة}}) \psi(r) = 0} \rightarrow \text{TISE}$$

معادلة الطاقة

يلاحظ من العلاقة على عدم اعتمادها على الزمن t
ولذا يمكن اعتبار معادلة شرودنجر غير المعتمدة على الزمن



* حل معادلة شرودنجر

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V(x) \Psi(x,t)$$

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) \cdot \Psi(t) \quad \text{فرضنا أن}$$

مع
معادلة
شرودنجر
الزمنية

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x) \Psi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) \Psi(t) + V(x) \Psi(x) \Psi(t)$$

نقسم الطرفين

$$i\hbar \Psi(x) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) + V(x) \Psi(x) \Psi(t) \quad \} \div \Psi(x) \Psi(t) \quad \text{نقسم الطرفين على}$$

$$i\hbar \frac{1}{\Psi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\Psi(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x) + V(x)$$

$$i\hbar \frac{1}{\Psi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = E \quad \} * \frac{-i}{\hbar}$$

$$\frac{1}{\Psi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \frac{-i}{\hbar} E \quad \} * dt \quad \text{نضرب الطرفين}$$

$$\frac{\partial \Psi(t)}{\Psi(t)} = \frac{-i}{\hbar} E dt \quad \text{نكامل الطرفين}$$

$$\int_0^t \frac{\partial \Psi(t)}{\Psi(t)} = \frac{-i}{\hbar} E \int_0^t dt$$



$$\ln \Psi(t) \Big|_0^t = \frac{-i}{\hbar} E t \Big|_0^t$$

$$\ln \Psi(t) - \ln \Psi(0) = \frac{-i}{\hbar} E t$$

$$\ln \frac{\Psi(t)}{\Psi(0)} = \frac{-i}{\hbar} E t \quad \text{عوضه في المعادلة}$$

$$\frac{\Psi(t)}{\Psi(0)} = e^{\frac{-i}{\hbar} E t}$$

$$\Psi(t) = \Psi(0) e^{\frac{-i}{\hbar} E t}$$

$$\Psi_0 = 1 \quad \text{بما أن}$$

$$\Psi(t) = e^{\frac{-i}{\hbar} E t}$$

$$\therefore \Psi(x, t) = \Psi(x) \Psi(t)$$

$$\therefore \Psi(x, t) = \Psi(x) e^{\frac{-i}{\hbar} E t}$$



س / حل الا حالية في حالة التوازن

$$P = |\Psi(x,t)|^2 = |\Psi(x,t) \Psi(x,t)^*| \quad \text{في حالة حالية} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x,t) &= \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \\ \Psi^*(x,t) &= \Psi^*(x) e^{+\frac{i}{\hbar} Et} \end{aligned} \right\} \text{ in 1 } \Psi \text{ حالية}$$

Ψ^* حالية على Ψ باستثناء الجزء المعقد

$$\therefore P = \Psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} Et} \cdot \Psi^*(x) e^{+\frac{i}{\hbar} Et}$$

$$P = \Psi(x) \Psi^*(x) e^{-\frac{i}{\hbar} Et + \frac{i}{\hbar} Et}$$

$$e^0 = 1$$

$$P = \Psi(x) \Psi^*(x) e^0$$

$$P = \Psi(x) \Psi^*(x)$$

$$P = |\Psi(x)|^2$$

الاحالية لا تتغير على التوازن



الفصل الثالث / المؤثرات Operators

* الكمية الملاحظة والمؤثر

• الكمية الملاحظة : هي كمية فيزيائية يمكن قياسها او هو المتغير الديناميكي للنظام القابل للقياس مثل الطاقة الزخم الموضع الخ.

في ميكانيك الكم يتم تمثيل كل كمية ملاحظة بمؤثر (operator)

• المؤثر : هو الكمية التي اذا اثرت على دالة الموجة حولتها الى دالة موجية جديدة ورمز المؤثر A و A_{op}

امثلة //

1) $\hat{A} = x$, $\psi = x^2$

$\hat{A}\psi = x \cdot x^2 = x^3 = \phi$ دالة موجية جديدة

منطق السؤال / اذا كانت الدالة $\psi = x^2$ والمؤثر على هذه الدالة $\hat{A} = x$ جد الدالة الجديدة باستخدام صيغة المؤثر ؟
 $\phi = \hat{A}\psi$

2) $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\psi = x^4$

$\hat{A}\psi = \frac{\partial x^4}{\partial x} = 4x^3 = \phi$ دالة موجية جديدة



الكمية المرصدة Observable	التمثيل في الميكانيكا الكلاسيكية (C.M.R)	التمثيل في الميكانيكا الكمية
1) الموقع Position	$x, y, z (r)$ المتغيرات الموقعية $V =$	$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{r}$
2) الزخم Momentum	$P_x = m \dot{x}$	$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (\hat{P}_r = i\hbar \nabla) \quad \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$
3) الطاقة الحركية Kinetic energy	$T = \frac{p^2}{2m}$	$\hat{T}_x = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
4) الطاقة الكلية Total energy	$E = T + V(x)$	$\hat{E} = +i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
5) هاميلتون Hamilton	$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$	$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ or $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$



* خواص المؤثرات

(1) الصفة الخطية

يقال المؤثر $\hat{A}$ هو مؤثر خطي إذا حقق الشروط التالية:

$$1) \hat{A}(\alpha \psi) = \alpha \hat{A} \psi$$

 α : ثابت

$$2) \hat{A}(\psi_1 + \psi_2) = \hat{A} \psi_1 + \hat{A} \psi_2$$

مثال 1/ هل المؤثر خطي أم لا؟ $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\alpha = 2$, ψ

$$1) \hat{A}(\alpha \psi) = \alpha \hat{A} \psi$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2\psi) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$2) \hat{A}(\psi_1 + \psi_2) = \hat{A} \psi_1 + \hat{A} \psi_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial x} \psi_2$$

∴ المؤثر $\hat{A}$ هو مؤثر خطي

$$\hat{A} = \sqrt{\quad}, \alpha = 2, \psi$$

مثال 2 / حل المؤثر خطي أم لا

$$1) \hat{A}(\alpha\psi) = \alpha \hat{A}\psi$$

$$\sqrt{2\psi} \neq 2\sqrt{\psi}$$

$$2) \hat{A}(\psi_1 \mp \psi_2) = \hat{A}\psi_1 \mp \hat{A}\psi_2$$

$$\sqrt{\psi_1 \mp \psi_2} \neq \sqrt{\psi_1} \mp \sqrt{\psi_2}$$

المؤثر $\hat{A}$ غير خطي
لعدم تحقق شرط الخطية

ملاحظة /

جميع المؤثرات تخضع للعمليات الجبرية

$$1) (\hat{A}_1 \mp \hat{A}_2)\psi = \hat{A}_1\psi \mp \hat{A}_2\psi$$

المؤثرات اقتران
دالة القيمة صفر
أي تتركها غير متغيرة

$$2) \hat{A}_1 \hat{A}_2 \psi = \hat{A}_1 (\hat{A}_2 \psi)$$

C ثابت

$$3) \hat{A}C\psi = C\hat{A}\psi$$



(2) صفة المتبادل

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

$$1) [\hat{A}, \hat{B}]\psi = \hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi = 0 \Rightarrow \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$$

المتغير متبادلي والمصفى المتريايوي هو

(1) لا يخضعون لمبدأ الازدقة لهايزنبرك (أي أن $\hat{A}$ لها قيمة معينة دقيقة و $\hat{B}$ لها قيمة معينة دقيقة)

أمثلة المتبادلة - المتبادلة

$$1) [\hat{p}, \hat{x}] = 0$$

(2) يمتلك المتغير دوال مشتركة

$$2) \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x^n} \right] = 0$$

$$2) [\hat{A}, \hat{B}]\psi = \hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi \neq 0 \Rightarrow \hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

المتغير غير متبادلي والمصفى المتريايوي هو

(1) يخضعون لمبدأ الازدقة لهايزنبرك

(2) لا يمتلك المتغير دوال مشتركة

أمثلة المتغير - غير متبادلة

$$1) [\hat{p}_x, \hat{x}^2] \neq 0$$

$$2) [\hat{H}, \hat{x}] \neq 0$$

$$3) [\hat{H}, \hat{p}] \neq 0$$



صيفتين لسؤال واحد

١) $[P_x, x]$ ^{اقواس التبادل} P_x و x متبادلتين وبين المعنى الفيزيائي

٢) اجبت ان وبين المعنى الفيزيائي $[P_x, x] = -i\hbar$

اكد

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

خارج القوس $[P_x, x] = P_x x - x P_x$ ^{الجملة البقية} ψ

$$[P_x, x]\psi = P_x x\psi - x P_x \psi$$

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

^{حامل مربع}
^{والتي}

$$[P_x, x]\psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x\psi - x (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi)$$

$$[P_x, x]\psi = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} \psi + \psi(1) - x \frac{\partial}{\partial x} \psi \right)$$

المؤثر في غير متبادلتين

$$[P_x, x]\psi = -i\hbar \psi$$

١) ψ هي صفر ليس لها علاقة بالمتغير x
٢) لا يمتلك المؤثر x دالة مشتركة

$$[P_x, x] = -i\hbar \neq 0$$



في ميكانيكا الكم

$$1) [\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$$

$$2) [\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$

$$3) [\hat{A}, \hat{B} \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C} + \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}]$$
$$= \hat{C} [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \hat{B}$$

$$4) [\hat{A}, \hat{B}^2] = [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} + \hat{B} [\hat{A}, \hat{B}]$$
$$= \hat{B} [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}$$

$$5) [\hat{A}^2, \hat{B}] = \hat{A} [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A}$$
$$= [\hat{A}, \hat{B}] \hat{A} + \hat{A} [\hat{A}, \hat{B}]$$



مثال / هل المؤثر متبادلي؟ حيث المعنى الفيزيائي

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} \quad [\hat{x}, \hat{p}]$$

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi = \hat{x}\hat{p}\psi - \hat{p}\hat{x}\psi$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi = -\hat{x}i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi + i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\hat{x}\psi$$

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi = i\hbar \left[-\hat{x} \frac{\partial}{\partial x}\psi + \frac{\partial}{\partial x}\hat{x}\psi \right]$$

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi = i\hbar \left[-\cancel{\hat{x} \frac{\partial}{\partial x}\psi} + \cancel{\hat{x} \frac{\partial}{\partial x}\psi} + \psi(1) \right]$$

$$[\hat{x}, \hat{p}]\psi = i\hbar \psi$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0$$

المؤثر غير متبادلي للمعنى الفيزيائي

① حيث هو مبدأ الازدواج لهايزنبرغ

② لا يمتلك المؤثر دوال مشتركة

$$[\hat{p}^2, \hat{x}]$$

مثال / هل المؤثر متبادلي؟

$$[\hat{A}^2, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A} + \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}]$$

باستخدام الكاميتا

$$[\hat{p}^2, \hat{x}] = [\hat{p}, \hat{x}]\hat{p} + \hat{p}[\hat{p}, \hat{x}]$$

$$= -i\hbar \hat{p} - i\hbar \hat{p}$$

نأخذ هذا الجهد ونحله (مبدأ الازدواج)

حيث هو نوع بالكاميتا

التي هي النتيجة النهائية

$$= -2i\hbar \hat{p} \neq 0$$

المؤثر غير متبادلي للمعنى الفيزيائي

① حيث هو مبدأ الازدواج لهايزنبرغ

② لا يمتلك المؤثر دوال مشتركة



سؤال / هل المؤثر متبادلي؟ $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^n}{\partial x^n} \right]$

$$[A, B] = AB - BA$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^n}{\partial x^n} - \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x}$$

عندما نضع
هنا

$$= \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} - \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} = 0$$

∴ المؤثر متبادلي المعنى التبادلي

١ لا يفرض علينا اللادقة لهاي نبدأ

٢ يمتلك المؤثر دوال مشتركة

سؤال / هل المؤثر متبادلي؟ $[\hat{H}, \hat{P}]$ للجسيم الحر

$$[A, B] = AB - BA$$

$$V(x) = 0 \text{ للجسيم الحر}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(x)$$

$$[\hat{H}, \hat{P}] = \hat{H}\hat{P} - \hat{P}\hat{H} \Rightarrow [\hat{H}, \hat{P}]\psi = \hat{H}\hat{P}\psi - \hat{P}\hat{H}\psi$$

$$[\hat{H}, \hat{P}]\psi = \frac{\hat{P}^2}{2m} \hat{P}\psi - \hat{P} \frac{\hat{P}^2}{2m} \psi$$

$$[\hat{H}, \hat{P}]\psi = \frac{1}{2m} \psi [\hat{P}^3 - \hat{P}^3]$$

∴ المؤثر متبادلي المعنى

التبادلي

١ لا يفرض علينا اللادقة لهاي نبدأ

٢ يمتلك المؤثر دوال مشتركة

$$[\hat{H}, \hat{P}] = 0$$



1) $[\hat{p}, \hat{x}^n]$

$n\hat{x}^{n-1}[\hat{p}, \hat{x}]$

$$[\hat{p}, \hat{x}^n] = \hat{p}\hat{x}^n - \hat{x}^n\hat{p} \quad \text{on } \psi$$

$$[\hat{p}, \hat{x}^n]\psi = \hat{p}\hat{x}^n\psi - \hat{x}^n\hat{p}\psi$$

$$\because \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[\hat{p}, \hat{x}^n]\psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \hat{x}^n\psi - \hat{x}^n \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$[\hat{p}, \hat{x}^n]\psi = -i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{x}^n\psi - \hat{x}^n \frac{\partial}{\partial x} \psi \right]$$

$$[\hat{p}, \hat{x}^n]\psi = -i\hbar \left[\cancel{\hat{x}^n \frac{\partial}{\partial x} \psi} + \psi(n\hat{x}^{n-1}) - \hat{x}^n \cancel{\frac{\partial}{\partial x} \psi} \right]$$

= الخواص غير متبادلة

$$[\hat{p}, \hat{x}^n]\psi = -i\hbar n\hat{x}^{n-1}\psi \Rightarrow [\hat{p}, \hat{x}^n] = -i\hbar n\hat{x}^{n-1}$$

2) $[\hat{p}^n, \hat{x}]$

$n\hat{p}^{n-1}[\hat{p}, \hat{x}]$

$$= -i\hbar n\hat{p}^{n-1}$$



$$3) [\hat{p}^n, \hat{x}^n]$$

$$4) [\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}^2]$$

طريقة ناتج الحل

$$[\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}] \hat{x} + \hat{x} [\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}]$$

لأن $[\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}] = 1$
 (لأن $\hat{x}$ ليس متغيراً) $\rightarrow$ ليس

$$\hat{x} + \hat{x} = 2\hat{x}$$

$$[\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}^2] = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x}^2 - \hat{x}^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}^2] \psi = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x}^2 \psi - \hat{x}^2 \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$= \hat{x}^2 \frac{\partial}{\partial x} \psi + \psi (2\hat{x}) - \hat{x}^2 \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$[\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}^2] \psi = 2\hat{x} \psi$$

المؤثر غير متبادلي

لأنه لا بد من الانتباه

$$[\frac{\partial}{\partial x}, \hat{x}^2] = 2\hat{x} \neq 0$$

لذلك المؤثر غير متبادلي



معادلة القيمة الذاتية

لـ $\hat{A}$ مؤثر هناك عدد يساوي (α) ودالة (ψ) التي تعرف بالعلاقة

$$\hat{A} \psi = \alpha \psi$$

$\swarrow$ قيمة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ $\searrow$ دالة ذاتية
 شحط (بيوت مختبر x, y, z)

الدوال الذاتية في تلك الدوال الخاصة التي تبقى بدون تغيير بعد عملية قاسم المؤثر عند فحص النظر عن القيمة الذاتية

مثال / باستخدام معادلة القيمة الذاتية اثبت ان

$$\psi(x) = e^{i4x}$$

في حالة ذاتية للمؤثر $\hat{A} = \frac{d}{dx}$

$$\hat{A} \psi = \alpha \psi$$

معادلة القيمة الذاتية

$$\hat{A} \psi = \frac{d}{dx} e^{i4x} = i4 e^{i4x} \quad (14)$$

$$= \alpha \psi = i4 e^{i4x}$$

$$\therefore \hat{A} \psi = \alpha \psi$$

$$\frac{d}{dx} e^{i4x} = i4 e^{i4x}$$

$\therefore$ الدالة $\psi = e^{i4x}$ دالة ذاتية

القيمة الذاتية $\alpha = i4$



مثال / حل الدالة $\psi(x) = e^{-ix}$ ذاتية لمؤثر الزخم $\hat{p}$ وإذا كانت ذاتية من القيمة الذاتية.

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

$$\hat{p}\psi = p\psi$$

$$\begin{aligned}\hat{p}\psi &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{-ix} = -i\hbar e^{-ix} (-i) \\ &= i^2 \hbar e^{-ix} \\ &= -\hbar e^{-ix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{p}\psi &= p\psi \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{-ix} &= -\hbar e^{-ix}\end{aligned}$$

∴ الدالة e^{-ix} دالة ذاتية
القيمة الذاتية $p = -\hbar$
قيمة ثابتة

مثال / حل الدالة $\psi(x) = e^{x^2}$ ذاتية لمؤثر الزخم $\hat{p}$ وإذا كانت ذاتية من القيمة الذاتية.

$$\hat{p}\psi = p\psi$$

$$\begin{aligned}\hat{p}\psi &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2} \\ &= -i\hbar 2x e^{x^2}\end{aligned}$$

$$= -2i\hbar x e^{x^2}$$

∴ الدالة e^{x^2} ليست ذاتية
لوجود متغير x في القيمة الذاتية.



مثال / هل الحالة $\psi(x) = \sin(6x)$ ذاتية للمؤثر $\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ وإذا كانت ذاتية، حدد القيمة الذاتية.

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

$$\begin{aligned}\hat{A}\psi &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(6x) = \frac{\partial}{\partial x} \cos(6x) \cdot 6 = 6 \frac{\partial}{\partial x} \cos(6x) \\ &= -6 \sin(6x) \cdot 6 \\ &= -36 \sin(6x)\end{aligned}$$

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(6x) = -36 \sin(6x)$$

الـ حالة ذاتية $\psi = \sin 6x$

الـ القيمة الذاتية $\alpha = -36$

مثال / هل الحالة $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ذاتية للمؤثر $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2)$ وإذا كانت ذاتية، ما هي القيمة الذاتية للحالة.

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

$$\begin{aligned}\hat{A}\psi &\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} (-1) + -x (e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot -x) - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= -e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^2 \right) e^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

الـ حالة ذاتية $\psi = e^{-\frac{x^2}{2}}$

الـ القيمة الذاتية $\alpha = -1$



$$1) \psi(x) = \cos(4x), \quad \hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

$$\hat{A}\psi \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \cos(4x) = \frac{d}{dx} [-\sin(4x) \cdot 4] = \frac{d}{dx} -4\sin 4x$$

$$= -4 \cos(4x) \cdot 4$$

$$= -16 \cos(4x)$$

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos(4x) = -16 \cos(4x)$$

القيمة الذاتية $\psi = \cos(4x)$

القيمة الذاتية $\alpha = -16$

$$2) \psi(x) = A e^{-\alpha x}, \quad \hat{F} = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} + \frac{2\alpha}{x} \right) \text{ for } A$$

$$\hat{F}\psi = f\psi$$

$$\hat{F}\psi \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} + \frac{2\alpha}{x} \right) A e^{-\alpha x}$$

$$= A \frac{d^2}{dx^2} e^{-\alpha x} + \frac{2A}{x} \frac{d}{dx} e^{-\alpha x} + \frac{2\alpha A}{x} e^{-\alpha x}$$

$$= A \frac{d}{dx} e^{-\alpha x} \cdot -\alpha + \frac{2A}{x} e^{-\alpha x} \cdot -\alpha + \frac{2\alpha A}{x} e^{-\alpha x}$$

$$= -\alpha A e^{-\alpha x} \cdot -\alpha - \frac{2\alpha A}{x} e^{-\alpha x} + \frac{2\alpha A}{x} e^{-\alpha x}$$

$$= +\alpha^2 A e^{-\alpha x}$$

$\psi = A e^{-\alpha x}$: القيمة الذاتية

for $= +\alpha^2$ القيمة الذاتية



المؤثر الهرميتي المؤثر $\hat{F}$ يسمى مؤثر هرميتي إذا حقق العلامة

التالية ١-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{F} \psi_2 dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{F}^* \psi_1^* dV$$

في حالة دالة موجية

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{F} \psi dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \hat{F}^* \psi^* dV$$

معادلة دالة موجية

$dV = dx dy dz$

إذا كان المؤثر هرميتياً فإن

- بعض جزئيات (١)
- (١) القيم الذاتية له تكون حقيقية
 - (٢) الدوال المتعامدة تكون متعامدة



استنتاج/ اثبات المصفوفة الهرميتية : اثبت ان العنيم الذاتية للمؤثر الهرميتي حقيقة

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{F} \psi dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \hat{F}^* \psi^* dV \quad (1) \quad \text{شرط المؤثر الهرميتي}$$

$$\hat{F} \psi = f \psi \quad (2) \quad \text{معادلة القيمة الذاتية}$$

$$\hat{F}^* \psi^* = f^* \psi^* \quad (3)$$

نخرج المعادلة (2) بـ ψ^* ونكامل لكل الفضاء

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{F} \psi dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* f \psi dV \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi \hat{F}^* \psi^* dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi f^* \psi^* dV \quad (5) \quad \text{نخرج المعادلة (3) بـ } \psi \text{ ونكامل لكل الفضاء}$$

بالاعتماد على المعادلة (2) وبما ان الجزء الاسير للمعادلة رقم (4) و (5) متساوية لذا الجزء الايمن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{F} \psi dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \hat{F}^* \psi^* dV \quad (6) \quad \text{المعادلة رقم (4) و (5) متساوية ايضاً}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi \psi^* dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \psi^* dV$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi \psi^* dV = 1 \quad \text{شرط العيارية}$$

$$f = f^*$$

∴ العنيم الذاتية للمؤثر الهرميتي حقيقة



أثبت أنه

اشتقاق / اثبات الصفة التامة : الدوال الموجية للمؤثر الهرميتي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{F} \psi_2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{F}^* \psi_1^* dv \quad (1)$$

شرط الهرميتي

$$\hat{F} \psi_1 = f_1 \psi_1 \quad \text{معادلة القيمة الذاتية} \quad \hat{F}^* \psi_1^* = f_1^* \psi_1^* \quad f_1^* = f_1 \quad \hat{F}^* \psi_1^* = f_1 \psi_1^* \quad \text{شرط الهرميتي}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_2 dv = 0$$

$$f_1 \neq f_2$$

من أجل المعادلة رقم ٢ ψ_2 ونكامل لكل الضمائم

$$\hat{F} \psi_2 = f_2 \psi_2 \quad (3)$$

نضرب المعادلة رقم ٣ بـ ψ_1^* ونكامل لكل الضمائم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{F} \psi_1^* dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 f_1 \psi_1^* dv \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{F} \psi_2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* f_2 \psi_2 dv \quad (5)$$

حالت الجهة اليسرى للمعادلة = ٤ و ٥ متساوية بالاعتماد على معادلة رقم ١

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 f_1 \psi_1^* dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* f_2 \psi_2 dv$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 f_1 \psi_1^* dv - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* f_2 \psi_2 dv = 0$$

$$(f_1 - f_2) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_2 dv = 0$$

$$a) \quad f_1 - f_2 = 0$$

$$f_1 \neq f_2 \quad \text{كثافة مختلفة}$$

$$b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_2 dv = 0 \quad \text{أو}$$

بما أن الدوال التامة للمؤثر الهرميتي تكون متعامدة



س/ اثبت ان المؤثر $\hat{P}_x$ هو مؤثر هرميتي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dV = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{A}^* \psi_1^* dV$$

احتمال صحة السؤال تتغير
على حسب نوع المؤثر
 $\hat{T}(KE)$ أو $\hat{E}$ أو $\hat{H}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \hat{P}_x \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{P}_x^* \psi_1^* dx \quad (1)$$

$$\text{لدينا } \hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (2) \quad \hat{P}_x^* = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (3)$$

$$-i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 dx = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^* dx$$

$$-i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 dx \quad (4)$$

نأخذ الجهة اليسرى

نستخدم التكامل الجزئي

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u dv = uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v du$$

نفرض ان $u = \psi_1^*$, $du = \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^*$, $dv = \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 dx$, $v = \psi_2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 dx = \underbrace{\psi_1^* \psi_2}_{\text{صفر}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^* dx$$

الحد الاول $\psi_1^* \psi_2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \psi_1, \psi_2 = 0$

الحد الثاني

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^* dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^* dx \quad (5)$$

نقوم بـ (3) و (4)

$$-i\hbar \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^* dx \right)$$

نساوي - الجهة اليمنى بالشروط الهرميتي

المؤثر $\hat{P}_x$ هو مؤثر هرميتي

$$i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^* dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2 \hat{P}_x^* \psi_1^* dx \quad (ن.م.م.)$$



* التعامد والعيارية للدالة الموجية orthonormal wave function

normalization عيارية
orthogonal متعامد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_m dV = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Kronker function دلتا كرونكر

شرط التعامد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dV = 1$$

شرط العيارية

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dV = 0$$

شرط التعامد

* القيمة المتوقعة

نحن نتعامل في ميكانيك الكم مع الاكترونات والفوتونات وجميع الجسيمات غير المتفلورة وتكون حركتها على شكل سيل من الفوتونات او الاكترونات او الذرات ولذلك يجب ان نأخذ معدل قيم هذه الكميات من الطاقة (معدل هذه القيم في ميكانيك الكم يسمى بالقيمة المتوقعة) في ميكانيك الكم لا يوجد مقياس مباشر للطاقة الا انهم اوالوم ولكن يوجد قيمة متوقعة للطاقة والآنهم والبرم اواي كمية يراد حسابها.

$$\bar{A} = \langle A \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{A} \psi dV}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dV}$$

القيمة المتوقعة لـ A

لان الدالة موجية عيارية

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dV = 1$$

لذا نأخذ الشرط العياري

$$\bar{A} = \langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{A} \psi dV$$

القيمة المتوقعة لـ A
معدل (القيمة، الطاقة، الزخم، ...)



$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{A} \psi dx$$

حساب القيمة المتوقعة

202 / / الثانية : 2020

القيمة المتوقعة للوضع

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{x} \psi dx$$

(1) الموضع

$$\langle P_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{P}_x \psi dx$$

(2) الزخم

القيمة المتوقعة للزخم

$$\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\therefore \langle P_x \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi dx$$

(3) الطاقة الكلية

$$\langle E_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{E}_x \psi dx$$

القيمة المتوقعة للطاقة الكلية

$$\hat{E}_x = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\therefore \langle E_x \rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi dx$$

(4) الطاقة الحركية T

$$\langle T_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{T}_x \psi dx$$

$$\hat{T}_x = \frac{\hat{P}_x^2}{2m}, \quad \hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \therefore \hat{P}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\therefore \hat{T}_x = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

القيمة المتوقعة للطاقة الحركية

$$\langle T_x \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi dx$$



* نظرية ارفنست (نظرية هرفنست)
هو تعبير رياضي عبر عنه العالم الالماني پاول ارفنست وكما
موضح من العلاقات

$$1) \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

$$2) \frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = - \langle \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

استنتج العلاقة التالية ثم اذكر المعنى الفيزيائي

$$1) \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m}$$

[اذا كانت داخل
اقواس التبادل ففست
الجنس الناتج دائماً
صفر]

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle$$

معادلة الحركة (هرفنست)
المشتق المتوسط للمؤثر $\hat{A}$ في المتغير المزدوج

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{x}] \rangle \quad (1)$$

$$\frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{x}] \rangle$$

فأنتيجة الجهة المعنى

$$\langle [\hat{H}, \hat{x}] \rangle = [\hat{H}, \hat{x}]$$

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{V}$$

خطوات
اقواس
التبادل

$$\left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{V}, \hat{x} \right] = \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2m}, \hat{x} \right] + [\hat{V}, \hat{x}]$$

$$[\hat{V}, \hat{x}] = 0$$

(1) $V=0$ (2) $V \propto x$ (3) $V \propto x^2$
مثلاً $[\hat{V}, \hat{x}] \psi = V x \psi - x V \psi$
 $= mgx \cdot x \psi - x mgx \psi$
 $= mgx^2 \psi - mgx^2 \psi$
 $= 0$

كأنها صفر في الحقيقة

أولاً / التبادل $[\frac{\hat{P}_x^2}{2m}, \hat{x}] = [\frac{\hat{P}_x}{2m}, \hat{x}] \hat{P}_x + \hat{P}_x [\frac{\hat{P}_x}{2m}, \hat{x}] \dots (2)$

$[\frac{\hat{P}_x}{2m}, \hat{x}] \psi = \frac{\hat{P}_x}{2m} \hat{x} \psi - \hat{x} \frac{\hat{P}_x}{2m} \psi$: $\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$[\frac{\hat{P}_x}{2m}, \hat{x}] \psi = \frac{-i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} x \psi - x \frac{-i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi$

$[\frac{\hat{P}_x}{2m}, \hat{x}] \psi = \frac{-i\hbar}{2m} (\frac{\partial}{\partial x} x \psi - x \frac{\partial}{\partial x} \psi)$

$[\frac{\hat{P}_x}{2m}, \hat{x}] \psi = \frac{-i\hbar}{2m} (x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(1) - x \frac{\partial \psi}{\partial x})$

$[\frac{\hat{P}_x}{2m}, \hat{x}] \psi = \frac{-i\hbar}{2m} \psi$

$[\frac{\hat{P}_x}{2m}, \hat{x}] = \frac{-i\hbar}{2m} \dots (3)$

$\therefore [\frac{\hat{P}_x^2}{2m}, \hat{x}] = \frac{-i\hbar}{2m} \hat{P}_x - \frac{i\hbar}{2m} \hat{P}_x = \frac{-2i\hbar}{2m} \hat{P}_x$

$[\frac{\hat{P}_x^2}{2m}, \hat{x}] = \frac{-i\hbar}{m} \hat{P}_x \dots (4)$

$\therefore \frac{i}{\hbar} \langle [-i\hbar P] \rangle$

$= \frac{\langle P \rangle}{m}$

$\therefore \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{\langle P \rangle}{m}$

المعادلة (2) هي (3)
 المعادلات الكلاسيكية تناظر
 القوانين الكمية ولكن تتعامل (و.ج.م)
 في ميكانيك الكم مع المعادلة المتفرقة



استنتج العلاقة التالية مع ذكر المعنى الفيزيائي

$$\textcircled{2} \frac{d}{dt} \langle P_x \rangle = - \langle \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle \quad \text{معادلة الحركة}$$

$$\frac{d}{dt} \langle P_x \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{P}_x] \rangle \quad \textcircled{2}$$

المعنى الفيزيائي

$$\frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{P}_x] \rangle$$

$$\because \hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \hat{V}$$

$$\therefore \langle [\hat{H}, \hat{P}_x] \rangle = \langle [\frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \hat{V}, \hat{P}_x] \rangle \quad \text{(مبدأ التراكب)}$$

$$\langle [\hat{H}, \hat{P}_x] \rangle = \langle [\frac{\hat{P}_x^2}{2m}, \hat{P}_x] \rangle + \langle [\hat{V}, \hat{P}_x] \rangle$$

$$[\frac{\hat{P}_x^2}{2m}, \hat{P}_x] = 0 \quad \text{مبدأ التراكب}$$

$$\langle [\hat{H}, \hat{P}_x] \rangle = \langle [\hat{V}, \hat{P}_x] \rangle \quad \textcircled{2}$$

$$[\hat{V}, \hat{P}_x] \psi = \hat{V} \hat{P}_x \psi - \hat{P}_x \hat{V} \psi \quad \because \hat{P}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$[\hat{V}, \hat{P}_x] \psi = \hat{V} (-i\hbar \frac{d}{dx} \psi) - (-i\hbar \frac{d}{dx} \hat{V} \psi)$$

$$[\hat{V}, \hat{P}_x] \psi = -i\hbar \left(\hat{V} \frac{d}{dx} \psi - \frac{d}{dx} \hat{V} \psi \right) \quad \begin{aligned} &= -i\hbar \left(\hat{V} \frac{d\psi}{dx} - \left(\hat{V} \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\hat{V}}{dx} \right) \right) \\ &= -i\hbar \left(\hat{V} \frac{d\psi}{dx} - \hat{V} \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\hat{V}}{dx} \right) \end{aligned}$$

$$[\hat{V}, \hat{P}_x] \psi = -i\hbar \left(\cancel{\hat{V} \frac{d\psi}{dx}} - \cancel{\hat{V} \frac{d\psi}{dx}} - \psi \frac{d\hat{V}}{dx} \right)$$



$$[\hat{V}, \hat{P}_x] \psi = +i\hbar \psi \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$[\hat{V}, \hat{P}_x] = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \dots (3)$$

$$\langle [\hat{H}, \hat{P}_x] \rangle = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \dots (4)$$

$$\frac{\partial \langle P_x \rangle}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \langle i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

$$\frac{\partial \langle P_x \rangle}{\partial t} = - \langle \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

المبدأ الفيزيائي -
القوانين الكلاسيكية تناظر
المقاسم الكمية ولكن في ميكانيك
الكم فتعامل مع القيمة المتوقعة.

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{A} \psi dx$$

* التباين (Δ)

هو مقدار الاختلاف بقيمة القياس عن القيمة المتوقعة لذلك المؤثر ويصطلح
بالشكل التالي

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

1) Δx التباين في الموضع

2) ΔP_x التباين في الزخم

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$(\Delta P_x)^2 = \langle P_x^2 \rangle - \langle P_x \rangle^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{x}^2 \psi dx$$

$$\langle P_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{P}_x^2 \psi dx$$

$$\langle x \rangle^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{x} \psi dx \right)^2$$

$$\langle P_x \rangle^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{P}_x \psi dx \right)^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{x}^2 \psi dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{x} \psi dx \right)^2}$$

$$\Delta P_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{P}_x^2 \psi dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{P}_x \psi dx \right)^2}$$



* الدالة الذاتية وتوافق الحركة

إذا كانت الدالة ψ دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ مع قيمة ذاتية مقابلة α فإن في مثل هذه الحالة كل عمليات القياس التي تجري لاجبار الكمية الملاحظة (A) ستؤدي إلى القيمة الذاتية α أي أن $\langle A \rangle = \alpha$ في مثل هذه الحالة يقال للقيمة الملاحظة (A) توافق الحركة وذلك يعني بأن الكمية الملاحظة A ثابتة لا تتغير مع الزمن $\frac{\delta A}{\delta t} = 0$

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

دالة ذاتية
معادلة القيمة الذاتية
قيمة ذاتية

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{A} \psi dV$$

القيمة المتوقعة

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \alpha \psi dV$$

$$\langle A \rangle = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dV$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dV = 1$$

شرط التلك

$$\therefore \langle A \rangle = \alpha$$

ثابت

$$\frac{\delta A}{\delta t} = 0$$

ثابت الحركة A



من / اثبت ان الزخم الخطي P_x لجسيم حر هو ثابت الحركة

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle \quad \text{معادلة الحركة}$$

$$\frac{d\langle P_x \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{P}_x] \rangle \quad \text{حيث } 0 = \hbar \omega$$

$$= \frac{i}{\hbar} \langle [\frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}, \hat{P}_x] \rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar} \langle [\frac{\hat{P}^2}{2m}, \hat{P}_x] \rangle \quad \text{مفتر الجيب}$$

$$\therefore \frac{d\langle P_x \rangle}{dt} = 0$$

ن P_x هو ثابت الحركة

من / اثبت ان $\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$$

معادلة شرودنجر T.D.S.E
المعتمدة على كلاص

$$\hat{E}\psi = \hat{T}\psi + \hat{V}\psi$$

* ψ^* مترافق القوي في ψ ونكاد
لكل الفضاء

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{E} \psi dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{T} \psi dv + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{V} \psi dv$$

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle \quad \text{و.و.م}$$

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{A} \psi dv$$

معادلة القيمة
المتوقعة



دالة ذاتية للمؤثر $\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ / اثبت له

$\hat{A}\psi = \alpha\psi$ معادلة القيمة الذاتية، وجب القيمة الذاتية $(\frac{d^2}{dx^2} - x^2)$

$$\hat{A}\psi = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \frac{d}{dx}(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}) - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$= -x(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}) + e^{-\frac{1}{2}x^2}(-1) - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$= x^2e^{-\frac{1}{2}x^2} - e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi$$

$$\hat{A}\psi = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

القيمة الذاتية = -1

$[P_x, V(x)] = P_x V(x) - V(x) P_x$ $[P_x, V(x)] = -i\hbar \frac{dV(x)}{dx}$

$$[P_x, V(x)]\psi = P_x V(x)\psi - V(x) P_x \psi$$

$$[P_x, V(x)]\psi = -i\hbar \frac{d}{dx} V(x)\psi - V(x) -i\hbar \frac{d}{dx} \psi$$

$$[P_x, V(x)]\psi = -i\hbar \left[\frac{d}{dx} V(x)\psi - V(x) \frac{d\psi}{dx} \right]$$

$$= -i\hbar \left[V(x) \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{dV(x)}{dx} - V(x) \frac{d\psi}{dx} \right]$$

$$[P_x, V(x)]\psi = -i\hbar \psi \frac{dV(x)}{dx} = -i\hbar \frac{dV(x)}{dx} \psi$$

(ع. ٥.٢)



الفصل الرابع

تطبيقات معادلة كيرشوف

١) الجسم الحر

هو الجسم الذي لا يتعرض الى اية قوة اية ان الجسم يتحرك بحرية وهذا يعني ان الطاقة الكامنة للجسم تساوي صفر ($V(x) = 0$) نفرض ان الجسم كتلته m يتحرك بسرعة واحدة على امتداد المحور السيني (x) في مجال جهه (طاقة كامنة) تساوي صفر اى ان $V(x) = 0$

 $\psi = ?$

$$E\psi = T\psi + V(\psi) \Rightarrow V=0$$

$$T\psi = E\psi \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad * \quad \frac{-2m}{\hbar^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = \frac{-2m}{\hbar^2} E\psi(x) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) = 0 \quad (1)$$

$$E = T + V \xrightarrow{V=0} E = T \Rightarrow E = \frac{1}{2} m v^2 \quad * \quad \frac{m}{m}$$

$$E = \frac{m^2 v^2}{2m} \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} ; p = \frac{h}{\lambda} \quad * \quad \frac{2\pi}{2\pi} \Rightarrow \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\therefore \boxed{p = \hbar k} \quad , \quad \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$\therefore E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2)$$

نفرض ان $\psi(x)$ هونفسه في $\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \psi(x) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i^2 k^2 \right) \psi(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + ik \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - ik \right) \psi(x) = 0$$



$$b) \left(\frac{d}{dx} + iK \right) \psi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \psi(x) + iK \psi(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = -iK \psi(x) \Rightarrow \frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = -iK dx \quad \text{نكسر الطرفين}$$

$$\int \frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = -iK \int dx \Rightarrow \ln \psi(x) = -iKx \quad \text{ناخذ اللوغاريتم}$$

$$\psi(x) = e^{-iKx} \quad (3)$$

$$a) \left(\frac{d}{dx} - iK \right) \psi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \psi(x) - iK \psi(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = iK \psi(x) \Rightarrow \frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = iK dx \Rightarrow \int \frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = iK \int dx$$

$$\ln \psi(x) = iKx \Rightarrow \psi(x) = e^{iKx} \quad (4)$$

نأخذ الحد الأول = الدالة $\psi(x)$ جمع (3) + (4)

$$\psi(x) = A e^{iKx} + B e^{-iKx} \quad (5) \quad \text{الدالة الموجية لحد الجسم اكر}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

طاقة الجسم اكر

* المعنى الفيزيائي للمعادلة الدالة الموجية
الحد الجسم اكر

$$P = \hbar k$$

زخم الجسم اكر

• تمثل الدالة e^{iKx} حركة جسم يمتلك زخم $\hbar K$ وطاقة $(\frac{\hbar^2 K^2}{2m})$ ويتحرك

باتجاه الموجبة على المحور السيني (x) ~~جسم اكر~~

• بينما تمثل الدالة e^{-iKx} حركة جسم يمتلك زخم $\hbar K$ وطاقة $\frac{\hbar^2 K^2}{2m}$ ويتحرك باتجاه السالبة على المحور السيني (x)



السؤال 1 / احسب الاحتمالية لحركة الجسيم (جسيم حر) نحو اليمين
(التي تسمى الموجة) على المحور السيني (x)

$$P = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x) \psi(x)$$

المطلوب
جسيم حر
 $x \rightarrow +$

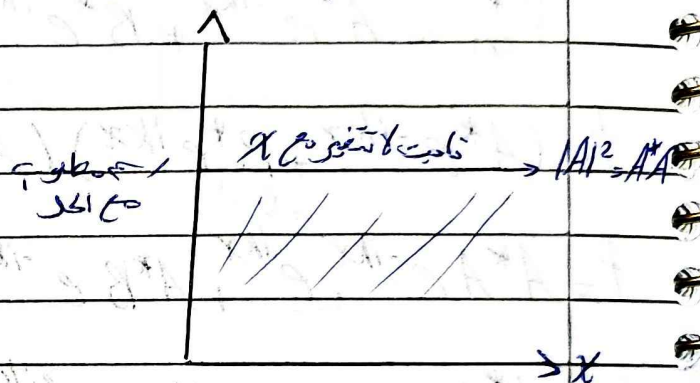
$$\psi(x) = A e^{ikx} \quad \text{هنا الاتجاه الموجب} \quad P = |\psi|^2 = \psi^* \psi \quad P = ?$$

$$\psi^*(x) = A^* e^{-ikx}$$

$$P = A^* e^{-ikx} A e^{ikx}$$

$$P = A^* A$$

$$P = |A|^2$$



السؤال 2 / احسب الاحتمالية لحركة الجسيم (جسيم حر) على المحور السيني

$$P = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x) \psi(x)$$

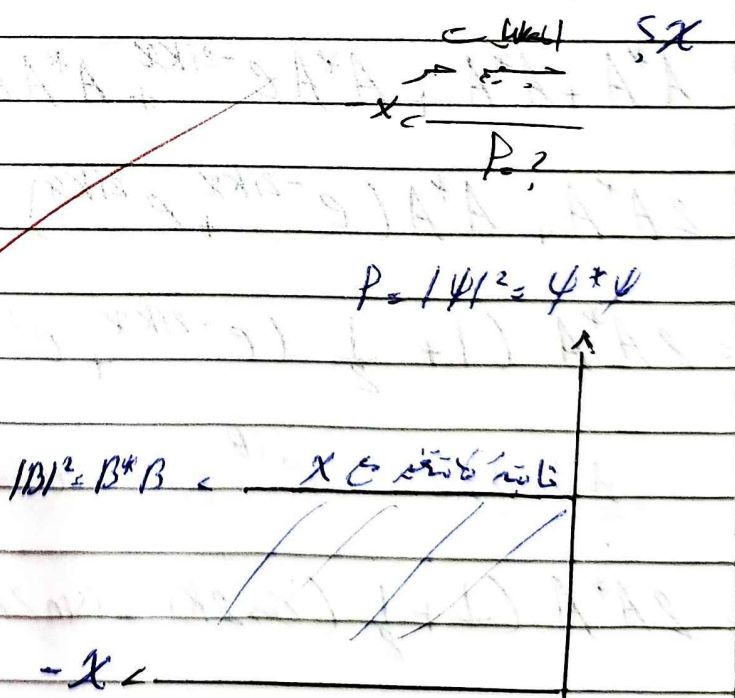
$$\psi(x) = B e^{-ikx}$$

$$\psi^*(x) = B^* e^{ikx}$$

$$P = B^* e^{ikx} B e^{-ikx}$$

$$P = B^* B \quad [e^0 = 1]$$

$$P = |B|^2$$



30/ أمثلة على التداخل في حيز (حيز) (حيز)

$$P = |\psi(x)|^2 = \psi^*(x) \psi(x)$$

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\psi^*(x) = A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}$$

$$P = (A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx}) (A e^{ikx} + B e^{-ikx})$$

$$P = A^* A e^{-ikx} e^{ikx} + A^* B e^{-ikx} e^{-ikx} + B^* A e^{ikx} e^{ikx} + B^* B e^{ikx} e^{-ikx}$$

$$P = A^* A + B^* B + A^* B e^{-2ikx} + B^* A e^{2ikx}$$

نلاحظ أن الحد الأخير هو الحد الأول مع إشارة عكسية (A-B)

$$P = A^* A + A^* A + A^* A e^{-2ikx} + A^* A e^{2ikx}$$

$$P = 2A^* A + A^* A (e^{-2ikx} + e^{2ikx})$$

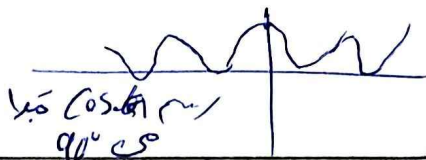
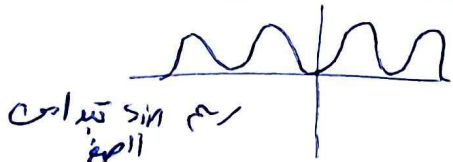
$$P = 2A^* A \left(1 + \frac{1}{2} (e^{-2ikx} + e^{2ikx}) \right)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\theta = 2Kx$$

$$P = 2A^* A \left(1 + \frac{1}{2} (\cos 2Kx - i \sin 2Kx + \cos 2Kx + i \sin 2Kx) \right)$$





٢٠٢

التاريخ

: Equabla

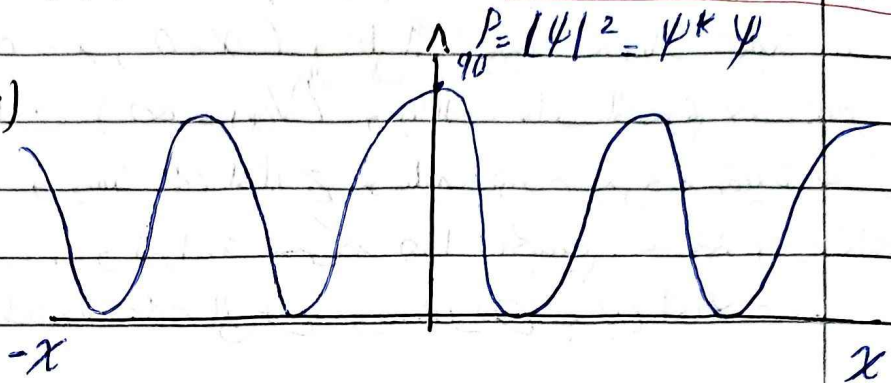
$$P = 2A^*A \left(1 + \frac{1}{2} (\cos 2kx) \right)$$

$$P = 2A^*A (1 + \cos 2kx)$$

$$1 + \cos 2kx = 2\cos^2 kx$$

$$P = 2A^*A (2\cos^2 kx)$$

$$P = 4A^*A \cos^2 kx$$



ثلاثة تطبيقات معادلة شرودنجر

(2) جسيم في صندوق

نفرض ان الجسيم كتلته m مقيد الحركة داخل صندوق في المنطقة بين $(x=0, x=\alpha)$ وبما ان حركة الجسيم في المنطقة المحصورة بين $(x=0, x=\alpha)$ ونظرا لوجود حدرات صلبة عند نهايتي الصندوق فان $(V(x) = \infty)$ وبذلك فان الجسيم لا يستطيع ان يخترق الحدرات ويتقيد الى الخارج وعليه تكون حركة مقيدة بين حدرات الصندوق. ولدراسة حركة هذا الجسيم نستخدم معادلة شرودنجر الغير المعتمدة على الزمن وسندرس بعض الحالات.

$\psi = 0$		$V(x) = 0$		$\psi = 0$
$V(x) = \infty$		$\psi = ?$		$V(x) = \infty$
احتمالية تواجد الجسيم	$P = 0$	$E = ?$		$P = 0$
		$P = ?$		
	$x = 0$		$x = \alpha$	x

(1) الحالة الاولى : - الجسيم خارج الصندوق

في المنطقة $(0 \leq x \leq \alpha)$ فان الحل المفضل والوحيد لمعادلة شرودنجر هو ان $\psi(x) = 0$ لظلالا ان $V(x) = \infty$ وبدوره فان كثافة الاحتمالية (الاحتمالية) $P = |\psi|^2 = 0$ وهذا يعني ان احتمالية ايجاد الجسيم خارج الصندوق تساوي صفر لان $P = |\psi|^2 = \psi^* \psi = 0$ هذا يعني لا يوجد جسيم خارج الصندوق.



(2) اكمال الثانية :- الجسم في الصندوق

عندما يكون الجسم داخل الصندوق فان $0 \leq x \leq a$ و $V(x)=0$

$$T\psi + V\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

الجسم داخل الصندوق $V=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E \psi(x)$$

فمن هنا - انتزاع الجسم اكر ينتج

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (1) \quad \text{من هنا انتزاع}$$

الان نستخدم الشروط الحدودية

$$1) \psi(x=0) = 0$$

$$2) \psi(x=a) = 0$$

$$0 = A e^{ik(0)} + B e^{-ik(0)} \quad \text{نطبق الشرط الاول}$$

$$\boxed{A = -B} \quad (2)$$

$$B = -A$$



$$\psi(x) = A e^{ikx} - A e^{-ikx} \quad \text{نوع (1) و (2)}$$

$$\psi(x) = A (e^{ikx} - e^{-ikx})$$

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad \text{اويلر}$$

$$\psi(x) = A (\cos Kx + i \sin Kx - (\cos Kx - i \sin Kx))$$

$$\psi(x) = A (\cancel{\cos Kx} + i \sin Kx - \cancel{\cos Kx} + i \sin Kx)$$

$$\psi(x) = 2i A \sin Kx \quad C = 2iA \text{ el } \psi \text{ نوع}$$

$$\psi(x) = C \sin Kx \quad (3)$$

نطبق الحظ الثاني على (3)

$$0 = C \sin Ka$$

$$C \neq 0 \text{ لا تقبل}$$

$$\therefore \sin Ka = 0$$

$$Ka = n\pi \Rightarrow K = \frac{n\pi}{a} \quad (4)$$

$$n = 1, 2, 3, 4 \dots \text{عدد طبيعي}$$

نوع (3) و (4)

$$\psi(x) = C \sin \frac{n\pi}{a} x \quad \text{حالة الموجة لجسيم داخل الصندوق}$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

C فيها استيفاءات هامة



$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$P = \hbar k \rightarrow P_n = \frac{\hbar n \pi}{a}$$

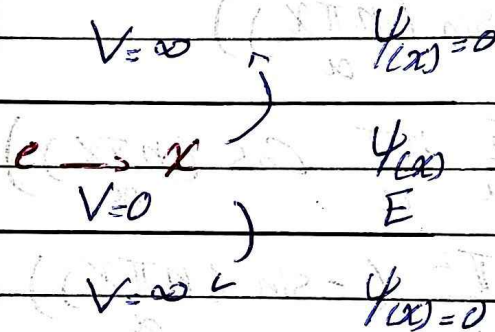
زخم جسم داخل الصندوق

$$E = \frac{P^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

طاقة الجسم داخل الصندوق

جسم في صندوق



1/ احسب الطاقة لمستقيم ψ باستخدام معادلة القيمة الذاتية
ثم خاضع النتيجة وارسم النتيجة؟

$$\hat{A}\psi(x)_n = \hat{a}_n \psi(x)_n \quad \text{معادلة القيمة الذاتية}$$

$$\hat{H}\psi(x)_n = E \psi(x)_n ; \hat{H} = T + V ; V = 0 ; \hat{H} = \hat{T}$$

$$\hat{H}\psi(x)_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)_n$$

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\psi(x)_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} (-\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right))$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \left(\sqrt{\frac{2}{a}} \right) \left(\frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right) \rightarrow \psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m a^2} \psi(x) = E_n \psi(x)$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m a^2}$$

← E_n هي الطاقة

$$n=0, E_0=0$$

← E_0 هي الطاقة

$$n=1, E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m a^2}$$



$$n=2, E_2 = 4 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = 4E_1$$

$$n=3, E_3 = 9 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = 9E_1$$

$$n=4, E_4 = 16 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = 16E_1$$

(1) طاقة كمومية : الطاقة ليد طاقة (مستويات)

(2) الطاقة المستمرة $E=0 \Leftarrow n=0$ عند الحد الأدنى الكلاسيكية

$$n=4 \quad 16E_1$$

$$n=3 \quad 9E_1$$

$$n=2 \quad 4E_1$$

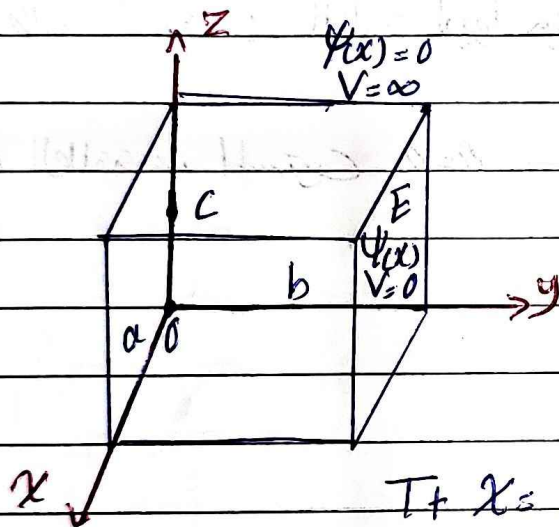
$$n=1 \quad E_1$$



(2) جسيم في صندوق في ثلاث ابعاد

سنبحث الآن حالة جسيم الحرة داخل الصندوق الذي ابعاده a, b, c على التوازي. ولنفرض ان ابعاد الصندوق مطابقة للمحاور الكارتيزية (x, y, z) ونفرض الاصل 0 تقع في احد زوايا كما في الشكل.

داخل الصندوق يكون الجهد $V=0$ اما خارج الصندوق $V=\infty$



جسيم حر $V=0$, $T + X = E$
 $T \psi = E \psi$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,y,z) = E \psi(x,y,z)$$

$$\nabla^2 \psi(x,y,z) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x,y,z) ; K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\nabla^2 \psi(x,y,z) = -K^2 \psi(x,y,z)$$

فرض المتغير

$$\psi(x,y,z) = \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

$$\nabla^2 \psi(x) \psi(y) \psi(z) = -K^2 \psi(x) \psi(y) \psi(z) ; \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\psi(y)\psi(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \psi(x)\psi(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(y) + \psi(x)\psi(y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z) = -K^2 \psi(x)\psi(y)\psi(z)$$

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{1}{\psi(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(y) + \frac{1}{\psi(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z) = -K^2; \quad K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2$$

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = -K_x^2 \quad \text{حيث } K_x^2 = K^2 - K_y^2 - K_z^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + K_x^2 x \psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{\psi(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(y) = -K_y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(y) + K_y^2 y \psi(y) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n_y \pi y}{b}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\psi(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z) = -K_z^2 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(z) + K_z^2 z \psi(z) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{n_z \pi z}{c}\right) \quad (3)$$

$$\psi(x, y, z) = \psi(x) \psi(y) \psi(z)$$

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{c}\right)$$

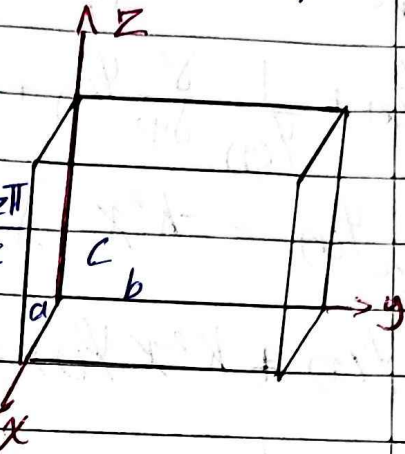
دالة الموجة لجسيم في صندوق ثلاثي الأبعاد



1/ حساب طاقة لجسم في صندوق ثلاثي الأبعاد

$$K_a = n\pi \Rightarrow K = \frac{n\pi}{a} \quad \text{في بعد واحد}$$

$$k^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2, \quad K_x = \frac{n_x \pi}{a}, \quad K_y = \frac{n_y \pi}{b}, \quad K_z = \frac{n_z \pi}{c}$$



$$K^2 = \frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n_y^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n_z^2 \pi^2}{c^2} \quad \text{--- 1$$

$$K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \dots \quad \text{--- 2} \quad \text{بالإضافة إلى 1}$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n_x^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n_y^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n_z^2 \pi^2}{c^2}$$

$$a = b = c \quad \text{فرض أن الأبعاد متساوية}$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

طاقة الجسم في صندوق ثلاثي الأبعاد



١/ ارسم دالة الموجة والاحتمالية لجسيم في صندوق في بعد واحد

١) $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ حالة الموجة لجسيم في صندوق في بعد واحد

٢) $P = |\psi(x)|^2$ الاحتمالية لجسيم في صندوق في بعد واحد

إذا طلبت على محور
فقلبته اكله

