الاعداد المركبة : العدد $z = x+iy$ حيث x,y اعداد حقيقية و $i = \sqrt{-1}$ يدعى عدد معقد حيث x يدعى الجزء الحقيقي ويرمز له بالرمز $Re(z)$ و y يدعى الجزء الخيالي ويرمز له بالرمز $Im(z)$ وتدعى المجموعة $\{x + iy: x, y \in R\}$ مجموعة الاعداد المعقدة ويرمز لها بالرمز C

ملاحظة : ١- العددان $x+iy, a+ib$ متساويان اذا وفقط اذا $x = a , y = b$

٢- العدد $x+iy = 0$ اذا وفقط اذا $x = 0 , y = 0$

٣- $R \subset C$ والعكس غير صحيح

جمع الاعداد المعقدة : ليكن $z_1 = a+ib , z_2 = x+iy$ عددين معقدين فان عملية الجمع للعدين المعقدين تعرف بالشكل

$$z_1 + z_2 = (a+ib)+(x+iy)= (a+x)+i(b+y)$$

مثال / ليكن $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 2+2i$ جد $z_1 + z_2$

الحل /

$$z_1 + z_2 =(1+i)+(2+2i) = (1+2)+i(1+2) = 3+3i$$

مثال / جد جمع $1+i$ و $3-i$

الحل /

$$(1+i)+(3-i) = (1+3)+i(1-1) = 4+0i = 4$$

مثال / جد جمع $-2+i$ و $2+i$

الحل /

$$(2+i)+(-2+i) = (2-2)+i(1+1) = 0+2i = 2i$$

ملاحظات :

١- $z_1+z_2 = z_2+z_1$

٢- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

طرح الاعداد المعقدة : ليكن $z_1 = a+ib$, $z_2 = x+iy$ عددين معقدين فان عملية الطرح للعدين المعقدين تعرف بالشكل

$$z_1 - z_2 = (a+ib)-(x+iy)= (a+ib)+(-x-iy) = (a-x)+i(b-y)$$

مثال / ليكن $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 2+2i$ جد $z_1 - z_2$

الحل /

$$z_1 - z_2 =(1+i)-(2+2i) = (1+i)+(-2-2i)= (1-2)+i(1-2) = -1-i$$

مثال / جد طرح $1+i$ و $3-i$

الحل /

$$(1+i)-(3-i) = (1+i)+(-3+i) = (1-3)+i(1+1) = -2+2i$$

مثال / جد طرح $2+i$ و $-2+i$

الحل /

$$(2+i)-(-2+i) =(2+i)+(2-i)= (2+2)+i(1-1) = 4+0i = 4$$

ضرب الاعداد المعقدة : ليكن $z_1 = a+ib$, $z_2 = x+iy$ عددين معقدين فان عملية الضرب للعدين المعقدين تعرف بالشكل

$$z_1 . z_2 = (a+ib).(x+iy)= ax+ayi+xbi-by = (ax-by)+i(ay+xb)$$

مثال / ليكن $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 2+2i$ جد $z_2 . z_1$

الحل /

$$z_1 . z_2 =(1+i).(2+2i) = (2-2)+i(2+2)= 0+4i = 4i$$

مثال / جد ضرب $1+i$ و $3-i$

الحل /

$$(1+i).(3-i) = (3+1)+(3-1)i = 4+2i$$

مثال / جد ضرب $-2+i$ و $2+i$

الحل /

$$(2+i).(-2+i) =(-4-1)+(2-2)i= -5+0i = -5$$

ملاحظات :

١- $z_1.z_2 = z_2.z_1$

٢- $z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$

٣- $z_1 . (z_2 + z_3) = (z_1 . z_2) +(z_1. z_3)$

قسمة الاعداد المعقدة : ليكن $z_1 = a+ib$, $z_2 = x+iy$عددين معقدين فان عملية الضرب للعدين المعقدين تعرف بالشكل

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(x+iy)} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{(ax+by)-i(ay-bx)}{(x^2+y^2)} = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) - i\left(\frac{ay-bx}{x^2+y^2}\right)$$

مثال / ليكن $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 2+2i$ جد z_1 / z_2

الحل /

$$z_1 / z_2 =(1+i)/(2+2i) = [(2+2)-i(2-2)]/(4+4)= [4-0i] / 8 = 4/8 = 1/2$$

مثال / جد قسمة $1+i$ و $3-i$

الحل /

$$(1+i)/(3-i) = [(3-1)-(-1-3)i]/(9+1) = [2+4i]/10$$

مثال / جد قسمة $2+i$ و $-2+i$

الحل /

$$(2+i)/(-2+i) = [(-4-1)-(2-2)i]/(4+1) = [-5-0i]/5 = -5/5 = -1$$

مرافق العدد المعقد : ليكن $z = a+bi$ عدد معقد فان مرافق العدد المعقد z يعرف بالشكل $\bar{z} = a-bi$

مثال / ليكن $z = 1+i$ جد $\bar{z}$

الحل / $\bar{z} = 1-i$

ملاحظة : مرافق العدد الصحيح عدد صحيح دائما

مثال / جد مرافق كل من $2i$ و $3-i$ و 4

الحل /

$\overline{2i} = -2i$

$\overline{3-i} = 3+i$

$\overline{4} = 4$

خواص مرافق العدد المعقد :

١- اثبت ان $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

البرهان : ليكن $z_1 = a+ib$ و $z_2 = x+iy$

$z_1 + z_2 = (a+ib)+(x+iy) = (a+x)+i(b+y)$

$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{(a+x)+i(b+y)} = (a+x)-i(b+y)$ ……..(1

$\bar{z_1} + \bar{z_2} = \overline{(a+ib)} + \overline{(x+iy)} = (a-ib)+(x-iy) = (a+x)-i(b+y)$ ……..(2

من ١) و ٢) ينتج

$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

٢- اثبت ان $\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$

البرهان : ليكن $z_1 = a+ib$ و $z_2 = x+iy$

$z_1 - z_2 = (a+ib)-(x+iy) = (a-x)+i(b-y)$

$\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{(a-x)+\imath(b-y)} = (a-x)-i(b-y)$ ……..(1

$\bar{z_1} - \bar{z_2} = \overline{(a+\imath b)} - \overline{(x+\imath y)} = (a-ib)-(x-iy) = (a-x)-i(b-y)$ ……..(2

من ١) و ٢) ينتج

$\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$

٣- اثبت ان $\overline{(z_1 . z_2)} = \bar{z_1} . \bar{z_2}$

البرهان : ليكن $z_1 = a+ib$ و $z_2 = x+iy$

$z_1 . z_2 = (a+ib).(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx)$

$\overline{(z_1 . z_2)} = \overline{(ax - by) + i(ay + bx)} = (ax-by)-i(ay+bx)$ ……..(1

$\bar{z_1} . \bar{z_2} = \overline{(a + ib)} . \overline{(x + iy)} = (a-ib).(x-iy) =ax-ayi-bxi-by = (ax-by)-i(ay+bx)$ ……..(2

من ١) و ٢) ينتج

$\overline{(z_1 . z_2)} = \bar{z_1} . \bar{z_2}$

٤- اثبت ان $\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z_1} / \bar{z_2}$

البرهان : ليكن $z_1 = a+ib$ و $z_2 = x+iy$

$z_1 / z_2 = (a+ib)/(x+iy) =[(a+ib)(x-iy)]/[(x+iy)(x-iy)] = [(ax+by)-i(ay-bx)]/ (x^2+y^2)$

$\overline{(z_1 / z_2)} = \overline{[(ax + by) - i(ay - bx)]/(x^2 + y^2)} = [(ax+by)+i(ay-bx)]/ (x^2+y^2)$……..(1

$\bar{z_1} / \bar{z_2} = \overline{(a + ib)} / \overline{(x + iy)} = (a-ib)/ (x-iy) = (a-ib)(x+iy)/ (x-iy)(x+iy) = [(ax+by)+i(ay-bx)]/ (x^2+y^2)$…… (2

من ١) و ٢) ينتج

$\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z_1} / \bar{z_2}$

٥- اثبت ن $z + \bar{z} = 2Re(z)$ و $z - \bar{z} = 2iIm(z)$ و $z . \bar{z} = (Re(z))^2+(Im(z))^2$

البرهان : ليكن $z = x+iy$

$z= x+iy , \bar{z} = x-iy , z + \bar{z} = (x+iy)+ (x-iy) = (x+x)+i(y-y) = 2x+0i = 2x = 2Re(z)$

$z= x+iy , \bar{z} = x-iy , z - \bar{z} = (x+iy)- (x-iy) =(x+iy)+(-x+iy) = (x-x)+i(y+y) = 0+2yi = 2yi = 2iIm(z)$

$z . \bar{z} = (x+iy).(x-iy) = x^2-ixy+ixy +y^2 = x^2 + y^2 = (Re(z))^2+(Im(z))^2$

٦- اثبت ان $\bar{\bar{z}} = z$

البرهان : ليكن $z = x+iy$

$z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$, $\bar{\bar{z}} = x+iy \Rightarrow \bar{\bar{z}} = z$

مثال / ليكن $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 2+2i$ جد كل من ١- $\overline{(z_1 + z_2)}$ ٢- $\overline{(z_1 - z_2)}$ ٣- $\overline{(z_1 . z_2)}$ ٤- $\overline{(z_1/z_2)}$

الحل /

$z_1 + z_2 = (1+i)+(2+2i) = (1+2)+i(1+2) = 3+3i$

$\overline{(z_1 + z_2)} = 3-3i$

$z_1 - z_2 = (1+i)-(2+2i) = (1-2)+i(1-2) = -1-i$

$\overline{(z_1 - z_2)} = -1+i$

$z_1 . z_2 = (1+i).(2+2i) = (2-2)+i(2+2) = 0+4i = 4i$

$\overline{(z_1 . z_2)} = -4i$

$z_1 / z_2 = (1+i)/(2+2i) =[(1+i)(2-2i)] / [(2+2i)(2-2i)] = [(2+2)-i(2-2)]/ (4+4)= 4/8 =1/2$

$\overline{(z_1/z_2)} = 1/2$

القيمة المطلقة للعدد المعقد : ليكن $z = x+iy$ عدد معقد فان القيمة المطلقة للعدد المعقد z التي يرمز لها بالرمز $|z|$ تعرف بالشكل

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال / ليكن $z = 1+i$ جد $|z|$

الحل /

$$|z| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

مثال / ليكن $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ جد $|z|$

الحل /

$$|z| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

مثال / ليكن $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$ جد $|z|$

الحل /

$$|z| = \left|\sqrt{2} + \sqrt{2} i\right| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2 + 2} = 2$$

مثال / ليكن $z = 1 + \sqrt{3} i$ جد $|z|$

الحل /

$$|z| = \left|1 + \sqrt{3} i\right| = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

خواص القيمة المطلقة للعدد المعقد :

١- اثبت ان $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

البرهان :

$z \cdot \bar{z} = (x+iy).(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

٢- اثبت ان $|z| \quad z + \bar{z} \leq 2|z|$ و $z - \bar{z} \leq 2i$

$z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = (x+x)+i(y-y) = 2x + 0i = 2x \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2|z| \Longrightarrow z + \bar{z} \leq 2|z|$

$z - \bar{z} = (x+iy) - (x-iy) = (x+iy)+(-x+iy) = (x-x)+i(y+y) = 0+2yi = 2yi \leq 2i\sqrt{x^2 + y^2} = 2i|z| \Longrightarrow z - \bar{z} \leq 2i|z|$

٣- اثبت ان $|z| = |\bar{z}|$

البرهان / ليكن $z = x+iy$

$z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\bar{z} = x - iy$, $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \Longrightarrow |z| = |\bar{z}|$

٤- اثبت ان $|z_1.z_2| = |z_1|\ .\ |z_2|$

البرهان : ليكن $z_1 = a+ib$, $z_2 = x+iy$

$z_1.z_2 = (ax-by)+i(ay+bx)$

$$|z_1.z_2| = \sqrt{(ax-by)^2+(ay+bx)^2} = \sqrt{a^2x^2-2axby+b^2y^2+a^2y^2+2axby+b^2x^2}$$

$$= \sqrt{a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2} = \sqrt{a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2} = \sqrt{a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} = \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2} = |z_1|\ .\ |z_2|$$

٥- اثبت ان $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

البرهان : ليكن $z_1 = a+ib$ و $z_2 = x+iy$

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1| + z_1\overline{z_2} + \overline{(z_1\overline{z_2})} + |z_2|$$

$$= |z_1| + 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2| \leq |z_1| + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2| \leq |z_1| + 2|z_1|.|\overline{z_2}| + |z_2| \leq |z_1| + 2|z_1|.|z_2| + |z_2|$$

$$\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \Longrightarrow |z_1+z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 \Longrightarrow |z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

٦- اثبت ان $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

البرهان :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(x+iy)} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{(ax+by)-i(ay-bx)}{(x^2+y^2)} = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right) - i\left(\frac{ay-bx}{x^2+y^2}\right)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{ay-bx}{x^2+y^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(ax+by)^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(ay-bx)^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{(ax+by)^2+(ay-bx)^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2x^2-2axby+b^2y^2+a^2y^2+2axby+b^2x^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{(x^2+y^2)}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

ملاحظة : $|z| \leq a$ اذا وفقط اذا $-a \leq z \leq a$

٧- اثبت ان $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 - z_2|$

البرهان :

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

٨- اثبت ان $|z_1 + z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

البرهان :

$z_1 = z_1 + z_2 - z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$

$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$ ..... (1

$z_2 = z_2 + z_1 - z_1 \Rightarrow |z_2| = |z_2 + z_1 - z_1| = |(z_2 + z_1) - z_1| \leq |z_2 + z_1| + |z_1| \Rightarrow |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_1|$

$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2| \Rightarrow -(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 + z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \geq -|z_1 + z_2|$ ..... (2

من ١) و ٢) ينتج

$$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \Rightarrow \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|$$

الاحداثيات القطبية :

ليكن r , θ احداثيات قطبية للنقطة (x,y) التي تقابل العدد المعقد الغير الصفري $z = x+iy$ بحيث $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و

$z = r\cos\theta + r\,i\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ يدعى الصيغة القطبية بحيث $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ و

$\arg(z) = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$. $\arg(z)$ يدعى القيمة الاساسية للعدد المعقد z .

ملاحظات :

١- العدد المعقد $z = 0$ لا يمكن كتابته على شكل صيغة قطبية لان θ تكون غير معرفة

٢- يمكن نرمز للصيغة $\cos\theta + i\sin\theta$ بالرمز $e^{i\theta}$ اي ان $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ تدعى هذه الصيغة صيغة اويلر . ويمكن كتابه الصيغة القطبية للعدد المعقد $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالشكل $z = r\,e^{i\theta}$

٣- $e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta)+i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ اي ان $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r\,e^{-i\theta}$

مثال / اكتب العدد المعقد $z = 1+i$ بالصيغة القطبية

الحل /

$z = 1+i$, $r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

مثال / اكتب العدد المعقد $z = 1+\sqrt{3}i$ بالصيغة القطبية

الحل /

$z = 1+\sqrt{3}i$, $r = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

خواص القيمة الاساسية للعدد المعقد ((arg(z)) :

١- $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_1)$

البرهان : ليكن $z_1 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ و $\arg(z_1) = \theta_1$ و $\arg(z_2) = \theta_2$

$z_1.z_2 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1).\ r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) = r_1 . r_2 . (\cos\theta_1+i\sin\theta_1).(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$= r_1 . r_2 . [\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2]$

$= r_1 . r_2 . [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$

$= r_1 . r_2 . [\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)]$

$\arg(z_1.z_2) = \theta_1 + \theta_2 \implies \arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_1)$

٢- اثبت ان $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_1)$

البرهان : ليكن $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ و $\arg(z_1) = \theta_1$ و $\arg(z_2) = \theta_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 \Longrightarrow \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_1)$

٣- اثبت ان $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

البرهان : ليكن $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $\arg(z) = \theta$

$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, $\arg(\bar{z}) = -\theta \Longrightarrow \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

٤- اثبت ان $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

البرهان : ليكن $z = r(\cos\theta)$ و $\arg(z) = \theta$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1(\cos\theta - i\sin\theta)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} = \frac{1}{r}[\cos\theta - i\sin\theta] = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta \Longrightarrow \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

ملاحظة / ليكن $z_1 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,……., $z_n = r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$ فان

$$z_1 . z_2 ….. z_n = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1). r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)…… r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

$$= r_1 . r_2 …. r_n. [\cos(\theta_1+\theta_2+…..+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+…..+\theta_n)]$$

اذا كان $z = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ فان

$$z . z …. . z = r(\cos\theta+i\sin\theta). r(\cos\theta+i\sin\theta_2)…… r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$= r . r …. r .. [\cos(\theta+\theta+…+\theta)+i\sin(\theta+\theta+…+\theta)] = r^n . [\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$$

$$z^n = r^n . [\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$$

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n = r^n . [\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$$

$$r^n . (\cos\theta+i\sin\theta)^n = r^n . (\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n =(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$$

وتسمى الصيغة $(\cos\theta+i\sin\theta)^n =(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ صيغة دي موفري

قوى العدد المعقد : ليكن العدد $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدد معقد مكتوب بالصيغة القطبية فان القوى النونية للعدد المعقد z تعرف بالشكل

$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n . (\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n . (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \Rightarrow z^n = r^n . [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

مثال : ليكن $z = 1+i$ جد z^4

الحل :

$z = 1+i$, $r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$z^4 = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^4 = (\sqrt{2})^4(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^4 = (\sqrt{2})^4(\cos 4.\frac{\pi}{4} + i\sin 4.\frac{\pi}{4}) = 4(-1+0.i) = -4$

مثال : ليكن $z = 1 - i$ جد $(z)^{\frac{8}{7}}$

الحل :

$z = 1- i$, $r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$,

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$z^{8/7} = [\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})]^{8/7} = (\sqrt{2})^{8/7}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})^{8/7} = (\sqrt{2})^{8/7}(\cos\frac{8}{7}.\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{8}{7}.\frac{7\pi}{4})$

$= (\sqrt{2})^{8/7}(1+0.i) = (\sqrt{2})^{8/7}$

مثال / ليكن $z = -1+i$ جد $(z)^{\frac{4}{3}}$

الحل :

$z = -1+i$, $r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$z^{4/3} = [\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})]^{4/3} = (\sqrt{2})^{4/3}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})^{4/3} = (\sqrt{2})^{4/3}(\cos\frac{4}{3}.\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{4}{3}.\frac{3\pi}{4})$

$= (\sqrt{2})^{4/3}\ (-1+0.i) = -(\sqrt{2})^{4/3}$

مثال / ليكن $z = -1- i$ جد $(z)^{\frac{2}{5}}$

الحل :

$z = -1-i$, $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$z^{2/5} = [\sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})]^{2/5} = (\sqrt{2})^{2/5}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})^{2/5} = (\sqrt{2})^{2/5}(\cos\frac{2}{5}.\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{2}{5}.\frac{5\pi}{4})$

$= (\sqrt{2})^{2/5}\ (0+1.i) = (\sqrt{2})^{2/5}\, i$

مثال / ليكن $z = 1+\sqrt{3}i$ جد z^3

الحل :

$z = 1+\sqrt{3}i$, $r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $z = 2\ (\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})$

$z^3 = [\ 2\ (\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})]^3 = (2)^3\ (\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})^3 = (2)^3\ (\cos 3.\frac{\pi}{3} + i \sin 3.\frac{\pi}{3}) = 8(-1+0.i) = -8$

مثال / ليكن $z = 1-\sqrt{3}i$ جد $(z)^{\frac{6}{5}}$

الحل :

$z = 1-\sqrt{3}i$, $r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$z = 2\ (\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3})$

$z^{6/5} = [\ 2\ (\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3})]^{6/5} = (2)^{6/5}\ (\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3})^{6/5} = (2)^{6/5}\ (\cos\frac{6}{5}.\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{6}{5}.\frac{5\pi}{3}) = (2)^{6/5}\ (1+0.i)$

$= (2)^{6/5}$

مثال / ليكن $z = -1+\sqrt{3}i$ جد $(z)^{\frac{3}{2}}$

الحل :

$z = -1+\sqrt{3}i$, $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,

$z = 2\ (\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3})$

$z^{3/2} = [\ 2\ (\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3})]^{3/2} = (2)^{3/2}\ (\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3})^{3/2} = (2)^{3/2}\ (\cos\frac{3}{2}.\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{3}{2}.\frac{2\pi}{3}) = (2)^{3/2}\ (-1+0.i)$

$= -(2)^{3/2}$

مثال / ليكن $z = -1-\sqrt{3}i$ جد $(z)^{\frac{3}{7}}$

الحل :

$z = -1-\sqrt{3}i$, $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$,

$z = 2\ (\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

$z^{3/7} = [\ 2\ (\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})]^{3/7} = (2)^{3/7}\ (\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})^{3/7} = (2)^{3/7}\ (\cos\frac{3}{7}.\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{3}{7}.\frac{7\pi}{6}) = (2)^{3/7}\ (0+1.i)$

$= (2)^{3/7}\ i$

جذور العدد المعقد : ليكن $z^n = x+iy$ عدد معقد فان جذور العدد المعقد z يمكن ايجادها من خلال القانون التالي

$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\ [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\ \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$, k = 0 , 1 , 2 ,…, n-1

مثال : ليكن $z^2 = 1$ جد جذور z

الحل :

$z^2 = 1$, $r = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$, $\theta = 0$, n = 2

$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\ [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\ \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$, k = 0 , 1

if k = 0

$z_1 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(0)\pi}{2})+i\ \sin(\frac{0+2(0)\pi}{2})] = 1(\cos0 +i\ \sin0) = 1(1+0.i) = 1 \Longrightarrow z_1 = 1$

if k = 1

$z_2 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(1)\pi}{2})+i\ \sin(\frac{0+2(1)\pi}{2})] = 1(\cos\pi +i\ \sin\pi) = 1(-1+0.i) = -1 \Longrightarrow z_2 = -1$

مثال : ليكن $z^2 = -1$ جد جذور z

الحل :

$z^2 = -1$, $r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$, $\theta = \pi$, n = 2

$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\ [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\ \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$, k = 0 , 1

if k = 0

$z_1 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{\pi+2(0)\pi}{2})+i\ \sin(\frac{\pi+2(0)\pi}{2})] = 1(\cos\frac{\pi}{2} +i\ \sin\frac{\pi}{2}) = 1(0+1.i) = i \Longrightarrow z_1 = i$

if k = 1

$z_2 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{\pi+2(1)\pi}{2})+i\ \sin(\frac{\pi+2(1)\pi}{2})] = 1(\cos\frac{3\pi}{2} +i\ \sin\frac{3\pi}{2}) = 1(0 -1.i) = -i \Longrightarrow z_2 = -i$

مثال : ليكن $z^3 = 1$ جد جذور z

الحل :

$z^3 = 1$, $r = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$, $\theta = 0$, $n = 3$

$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\ [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\ \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$, $k = 0 , 1 , 2$

if $k = 0$

$z_1 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(0)\pi}{3})+i\ \sin(\frac{0+2(0)\pi}{3})] = 1(\cos0 + i\ \sin0) = 1(1+0.i) = 1 \Longrightarrow z_1 = 1$

if $k = 1$

$z_2 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(1)\pi}{3})+i\ \sin(\frac{0+2(1)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3}) = 1(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i) = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.i \Longrightarrow z_2 = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ i$

if $k = 2$

$z_3 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(2)\pi}{3})+i\ \sin(\frac{0+2(2)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\ \sin\frac{4\pi}{3}) = 1(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i) = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i \Longrightarrow z_3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$

مثال : ليكن $z^3 = -1$ جد جذور z

الحل :

$z^3 = 1$, $r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$, $\theta = \pi$, $n = 3$

$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\,[\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$, $k = 0, 1, 2$

if $k = 0$

$z_1 = \sqrt[2]{1}\,[\cos(\frac{\pi+2(0)\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi+2(0)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \implies z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

if $k = 1$

$z_2 = \sqrt[2]{1}\,[\cos(\frac{\pi+2(1)\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi+2(1)\pi}{3})] = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1(-1+0.i) = -1 \implies z_2 = -1$

if $k = 2$

$z_3 = \sqrt[2]{1}\,[\cos(\frac{\pi+2(2)\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi+2(2)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \implies z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

مثال : ليكن $z^3 = i$ جد جذور z

الحل :

$z^3 = i$, $r = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $n = 3$

$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\,[\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$, $k = 0, 1, 2$

if $k = 0$

$z_1 = \sqrt[2]{1}\,[\cos(\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 1(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \implies z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

if $k = 1$

$z_2 = \sqrt[2]{1}\,[\cos(\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 1(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \implies z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

if $k = 2$

$z_3 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3})+i\ \sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}) = 1(0-1.i) = -i \implies z_3 = -i$

مثال : ليكن $z^3 = -i$ جد جذور z

الحل :

$z^3 = -i$, $r = \sqrt{(0)^2+(-1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $n = 3$

$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\ [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\ \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$, $k = 0, 1, 2$

if $k = 0$

$z_1 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(0)\pi}{3})+i\ \sin(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(0)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}) = 1(0+1.i) = i \implies z_1 = i$

if $k = 1$

$z_2 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(1)\pi}{3})+i\ \sin(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(1)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}) = 1(\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.i) = \frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \implies z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

if $k = 2$

$z_3 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(2)\pi}{3})+i\ \sin(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(2)\pi}{3})] = 1(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}) = 1(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.i) = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \implies z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

مثال : ليكن $z^4 = 1$ جد جذور z

الحل :

$z^4 = 1$, $r = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$, $\theta = 0$, $n = 4$

$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\ [\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\ \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})]$, $k = 0 , 1 , 2 ,3$

if $k = 0$

$z_1 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(0)\pi}{4})+i\ \sin(\frac{0+2(0)\pi}{4})] = 1(\cos0 + i\ \sin0) = 1(1+0.i) = 1 \Longrightarrow z_1 = 1$

if $k = 1$

$z_2 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(1)\pi}{4})+i\ \sin(\frac{0+2(1)\pi}{4})] = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}) = 1(0+1.i) = i \Longrightarrow z_2 = i$

if $k = 2$

$z_3 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(2)\pi}{4})+i\ \sin(\frac{0+2(2)\pi}{4})] = 1(\cos\pi + i\ \sin\pi) = 1(-1+0.i) = -1 \Longrightarrow z_3 = -1$

if $k = 3$

$z_4 = \sqrt[2]{1}\ [\cos(\frac{0+2(3)\pi}{4})+i\ \sin(\frac{0+2(3)\pi}{4})] = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\ \sin\frac{3\pi}{2}) = 1(0 -1.i) = -1 \Longrightarrow z_3 = -\ i$

الدالة المعقدة : اذا وجدت قاعدة ما يمكن بواسطتها اقتران اي عدد معقد $z \in D$ بعدد معقد w فان هذه القاعدة تسمى دالة معقدة وتكتب بالشكل $w = f(z)$ حيث ان f تمثل القاعدة التي بواسطتها يتم تعين w المقابلة الى z ويطلق على D منطلق الدالة f ويطلق على مجموعة قيم w التي تقابل قيم z بمدى الدالة f .

مثال : ١) ان منطلق كل من الدالتين

1) $f(z) = |z + 2|$
2) $f(z) = z^2 + z + 1$

هي مجموعة كل نقاط المستوي المعقد C

٣) ان منطلق الدالة

$f(x) = \frac{1}{z^2+4}$

كل نقاط المستوي المعقد C ماعدا $z = 2i , -2i$

ملاحظة : لنفرض u , v هما القسمان الحقيقي والخيالي للدالة f(x) حيث u القسم الحقيقي و v القسم الخيالي عندئذ u ,v دالتان تعتمدان على المتغيرين الحقيقين x ,y حيث $z = x+iy$ وتكتب الدالة المعقدة بالشكل التالي $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

مثال : لتكن $f(z) = z^2$ فان f(x) يمكن ان تكتب على شكل $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

الحل :

$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$

الدالة وحيدة القيمة : تكون الدالة f(z) وحيدة القيمة في المنطقة D اذا كان لكل $z \in D$ يقابلة قيمة واحدة من قيم f(z)

مثال : الدالة $f(z) = z^2 + z+1$ دالة وحيدة القيمة

الدالة متعددة القيمة : تكون الدالة f(z) متعددة القيمة في المنطقة D اذا كان لكل $z \in D$ يقابلة اكثر من قيمة واحدة من قيم f(z)

مثال : الدالة $f(z) = \sqrt{z}$ دالة متعددة القيمة

الدالة المتباينة : لتكن f دالة منطلقها D يقال بان f دالة متباينة اذا وفقط اذا كان لكل $z_1 , z_2 \in D$ فان

$f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow z_1 = z_2$ or $z_1 \neq z_2 \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

مثال : ليكن $f(z) = z+2$ منطلقها C ان f دالة متباينة ام لا

الحل : لكل $z_1 , z_2 \in C$ فان

$f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow z_1 + 2 = z_2 + 2 \Longrightarrow z_1 = z_2$

وعليه f دالة متباينة

الدالة الشاملة : لتكن f دالة منطلقها D ومداها S يقال بان f دالة شاملة اذا وفقط اذا كان لكل $s \in S$ فانه يوجد $z \in D$ بحيث $f(z) = s$

مثال : ليكن $f(z) = 2z+2$ دالة منطلقها C ومداها C ان f دالة شاملة ام لا

الحل : لكل $z \in C$ فان

$f(z) = s \Longrightarrow 2z + 2 = s \Longrightarrow 2z = s - 2 \Longrightarrow z = \frac{s-2}{2}$, $f(z) = f(\frac{s-2}{2}) = 2(\frac{s-2}{2}) + 2 = s - 2 + 2 = s$

وعليه لكل $s \in C$ فانه يوجد $z \in C$ بحيث $f(z) = s$ وعليه f دالة شاملة

الدالة المتقابلة : لتكن f دالة منطلقها D ومداها S يقال بان f دالة متقابلة اذا وفقط اذا كان f دالة متباينة وشاملة في نفس الوقت

مثال : ليكن $f(z) = \frac{2z-3}{3z-2}$

الحل : لكل $z_1 , z_2 \in C$ فان

$f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow \frac{2z_1-3}{3z_1-2} = \frac{2z_2-3}{3z_2-2} \Longrightarrow 6z_1 z_2 - 4z_1 - 9z_2 + 6 = 6z_1 z_2 - 9z_1 - 4z_2 + 6 \Longrightarrow 9z_1 - 4z_1 = 9z_2 - 4z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$

وعليه f دالة متباينة

لكل $z \in C$ فان

$f(z) = s \Longrightarrow \frac{2z-3}{3z-2} = s \Longrightarrow 3zs - 2s = 2z - 3 \Longrightarrow 3zs - 2z = 2s - 3 \Longrightarrow z = \frac{2s-3}{3s-2}$, $f(z) = f(\frac{2s-3}{3s-2}) = \frac{2(\frac{2s-3}{3s-2})-3}{3(\frac{2s-3}{3s-2})-2}$

$= \frac{\frac{4s-6-9s+6}{3s-2}}{\frac{6s-9-6s+4}{3s-2}} = \frac{-5s}{-5} = s$

وعليه لكل $s \in C$ فانه يوجد $z \in C$ بحيث $f(z) = s$ وعليه f دالة شاملة . وعليه f دالة متقابلة

الدالة العكسية : لتكن f دالة منطلقها D ومداها S و f دالة متقابلة فان الدالة العكسية للدالة f ويرمز لها بالرمز f^{-1} هي التي منطلقها S ومداها D بحيث لكل $w \in S$ يوجد $z \in D$ بحيث ان $z = f^{-1}(w)$.

مثال : ليكن $f(z) = \frac{2z-3}{3z-2}$ جد f^{-1}

الحل : لكل $z_1 , z_2 \in C$ فان

$$f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow \frac{2z_1-3}{3z_1-2} = \frac{2z_2-3}{3z_2-2} \Longrightarrow 6z_1 z_2 - 4z_1 - 9z_2 + 6 = 6z_1 z_2 - 9z_1 - 4z_2 + 6 \Longrightarrow 9z_1 - 4z_1 = 9z_2 - 4z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

وعليه f دالة متباينة

لكل $z \in C$ فان

$$f(z) = s \Longrightarrow \frac{2z-3}{3z-2} = s \Longrightarrow 3zs - 2s = 2z - 3 \Longrightarrow 3zs - 2z = 2s - 3 \Longrightarrow z = \frac{2s-3}{3s-2} \ , \ f(z) = f\left(\frac{2s-3}{3s-2}\right) = \frac{2\left(\frac{2s-3}{3s-2}\right)-3}{3\left(\frac{2s-3}{3s-2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{4s-6-9s+6}{3s-2}}{\frac{6s-9-6s+4}{3s-2}} = \frac{-5s}{-5} = s$$

وعليه لكل $s \in C$ فانه يوجد $z \in C$ بحيث $f(z) = s$ وعليه f دالة شاملة . وعليه f دالة متقابلة .

$$f^{-1}(z) = s_1 \Longrightarrow z = f(s_1) \Longrightarrow z = \frac{2s_1-3}{3s_1-2} \Longrightarrow 3zs_1 - 2z = 2s_1 - 3 \Longrightarrow 3zs_1 - 2s_1 = 2z - 3 \Longrightarrow s_1 = \frac{2z-3}{3z-2} \Longrightarrow f^{-1}(z) = \frac{2z-3}{3z-2}$$

الدالة المركبة : لتكن f دالة منطلقها D ومداها S و لتكن g دالة منطلقها S ومداها E فان تركيب الدالتين f , g ويرمز له بالرمز $g \circ f$ يكون معرفا اذا كان مدى f هو نفسه منطلق g وان $(g \circ f)(z)$ يعرف بالشكل $(g \circ f)(z) = g(f(z))$

واذا كان g دالة منطلقها D ومداها S و لتكن f دالة منطلقها S ومداها E فان تركيب الدالتين f , g ويرمز له بالرمز $f \circ g$ يكون معرفا اذا كان مدى g هو نفسه منطلق f وان $(f \circ g)(z)$ يعرف بالشكل $(f \circ g)(z) = f(g(z))$

مثال : لتكن $f(z) = 2z+3$ دالة منطلقها C ومداها C و $g(z) = 3z+2$ دالة منطلقها C ومداها C جد $g \circ f$ و $f \circ g$

الحل :

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(2z+3) = 3(2z+3)+2 = 6z+9+2 = 6z+11$$

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(3z+2) = 2(3z+2)+3 = 6z+4+3 = 6z+7$$

من المثال اعلاه نستنتج ان $f \circ g \neq g \circ f$

مثال : اعطي دالتين مختلفتين f , g بحيث $f \circ g = g \circ f$

الحل : لتكن $f(z)= z+1$ دالة منطلقها C ومداها C ولتكن $g(z)= z-1$ دالة منطلقها C ومداها C

$(g \circ f)(z) = g(f(z))$

$(g \circ f)(z) = g(z+1) = (z+1)- 1 = z$

$(f \circ g)(z) = f(g(z))$

$(f \circ g)(z) = f(z-1) = (z-1)+ 1 = z$

وعليه $f \circ g = g \circ f$

الغاية : لتكن $f : D \to S$ دالة معقدة معرفة عند النقطة z_0 يقال f تملك غاية L عند النقطة z_0 وتكتب كالتالي $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ اذا لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $|f(z) - L| < \in \implies |z - z_0| < \delta$.

مثال : بواسطة التعريف برهن $\lim_{z \to 2} 2z = 4$

الحل : لكل $\in > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $|z - 2| < \delta$

$$|f(z) - L| = |2z - 4| = 2|z - 2| < 2\delta$$

نفرض $\delta = \frac{\in}{2}$ وعليه $= |2z - 4||f(z) - L| < \in$

مبرهنة : لتكن $f(z) , g(z)$ دالتين معقدتين بحيث $\lim_{z \to z_0} g(z)$ و $\lim_{z \to z_0} f(z)$ موجودة فان

1) $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z)$

2) $\lim_{z \to z_0} (f(z) - g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) - \lim_{z \to z_0} g(z)$

3) $\lim_{z \to z_0} (f(z).g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) . \lim_{z \to z_0} g(z)$

4) $\lim_{z \to z_0} k\ f(z) = k \lim_{z \to z_0} f(z)$

5) $\lim_{z\to z_0} (f(z))^n = (\lim_{z\to z_0} f(z))^n$

6) $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)}$

مثال : جد كل من : 2) $\lim_{z\to 1+i} \left(\frac{z-i}{z^2}\right)$ 1)$\lim_{z\to 2i} (z^3 + 2z - 5)$

الحل :

1)$\lim_{z\to 2i} (z^3 + 2z - 5) = (2i)^3 + 2(2i) - 5 = 8i + 4i - 5 = 12i - 5$

2) $\lim_{z\to 1+i} \left(\frac{z-i}{z^2}\right) = \frac{1+i-i}{(1+i)^2} = \frac{1+i-i}{1+2i-1} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$

مبرهنة / لتكن $f(z)= u(x,y) +iv(x,y)$ ولتكن $w_0 = u_0 +iv_0$ و $z_0 = x_0 +iy_0$ فان $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ اذا وفقط اذا

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

مثال / جد $\lim_{(x,y)\to(1,2)} 2i\bar{z}$ 2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z}{\bar{z}}$

الحل /

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} 2i\bar{z} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} 2i\overline{(x+iy)} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} 2i(x-iy) = 2i\ (1-\ 2i\ ) = 2i+4$$

مثال / جد $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z}{\bar{z}}$

الحل /

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{\overline{x+iy}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy},$$

الاقتراب حول المحور السيني فان $x\to 0\ ,\ y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+0}{x-0} = 1$$

الاقتراب حول المحور الصادي فان $y\to 0\ ,\ x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0+iy}{0-iy} = -1$$

بمان $-1 \neq 1$ فان الغاية غير موجودة

الاستمرارية : يقال الدالة f مستمرة عند النقطة z_0 اذا تحققت الشروط التالية : ١) $f(z_0)$ موجودة ٢) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة

٣) $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

مثال : هل ان الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ مستمرة عند $z_0 = 0$

الحل : ١) $f(0) = \frac{1}{0}$ غير معرفة ٢) $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \frac{1}{0}$ غير معرفة . وعليه الدالة غير مستمرة عند $z_0 = 0$

مثال / هل ان الدالة $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ مستمرة عند $z_0 = 0$.

الحل / ١) $f(0) = \frac{0}{0}$ غير معرفة ٢) $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ غير موجودة . وعليه الدالة غير مستمرة عند $z_0 = 0$

مثال / هل ان الدالة $f(z) = 2z^2 + 4$ مستمرة عند $z_0 = 2$.

الحل /

1) $f(2) = 2(2)^2 + 4 = 8 + 4 = 12$

2) $\lim_{z\to 2} (2z^2 + 4) = 2(2)^2 + 4 = 8 + 4 = 12$

3) $\lim_{z\to 2} (2z^2 + 4) = f(2)$

وعليه الدالة مستمرة عند $z_0 = 2$.

مثال / هل ان الدالة $f(z) = -2iz^2 + 6iz$ مستمرة عند $z_0 = -4i$.

الحل /

1) $f(-4i) = -2i(-4i)^2 + (6i)(-4i) = -32i + 24 = 24 + 32\,i$

2) $\lim_{z\to -4i} (-2iz^2 + 6iz) = -2i(-4i)^2 + (6i)(-4i) = 32i + 24 = 24 + 32\,i$

3) $\lim_{z\to -4i} (-2iz^2 + 6iz) = f(-4i)$

وعليه الدالة مستمرة عند $z_0 = -4i$.

المشتقة / لتكن A مجموعة جزئية من المستوي المعقد (C) و لتكن $f : A \to C$ دالة . يقال ان f قابلة للاشتقاق عند النقطة $z_0 \in A$ اذا كان

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ موجودة ويرمز لها بالرمز $f'(z_0)$ او $\frac{df}{dz}$ حيث ان

$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ or $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

ويقال ان f دالة قابلة للاشتقاق على A اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط A . ويقال ان f دالة تحليلية عند النقطة z_0 اذا كانت f قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 وجوار النقطة z_0 .

مثال / جد مشتقة الدالة $f(z) = 3z^2 + 1$ عند النقطة $1+2i$ (بواسطة التعريف)

الحل /

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, $f(z+\Delta z) = 3(z+\Delta z)^2 + 1 = 3(z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2) + 1 = 3z^2 + 6z\Delta z + 3(\Delta z)^2 + 1$

$f(z) = 3z^2 + 1$, $f(z+\Delta z) - f(z) = 3z^2 + 6z\Delta z + 3(\Delta z)^2 + 1 - 3z^2 - 1 = 6z\Delta z + 3(\Delta z)^2 = \Delta z\,(6z + 3\Delta z)$

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z\,(6z+3\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (6z + 3\Delta z) = 6z$

$f'(1+2i) = 6(1+2i) = 6 + 12i$

مثال / جد مشتقة الدالة $f(z) = 3z^3 + 2$ عند النقطة $2i$ (بواسطة التعريف)

الحل /

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, $f(z+\Delta z) = 3(z+\Delta z)^3 + 2 = 3z^3 + 9z^2\Delta z + 9z(\Delta z)^2 + 3(\Delta z)^3 + 2$

$f(z) = 3z^3 + 2$, $f(z+\Delta z) - f(z) = 3z^3 + 9z^2\Delta z + 9z(\Delta z)^2 + 3(\Delta z)^3 + 2 - 3z^3 - 2 = \Delta z\,(9z^2 + 9z(\Delta z) + 3(\Delta z)^2)$

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z\,(9z^2 + 9z(\Delta z) + 3(\Delta z)^2)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (9z^2 + 9z(\Delta z) + 3(\Delta z)^2) = 9z^2$

$f'(2i) = 9(2i)^2 = -36$

مثال / جد مشتقة الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ عند النقطة -3i (بواسطة التعريف)

الحل /

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, $f(+\Delta z) = \frac{1}{z+\Delta z}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $f(z+\Delta z) - f(z) = \frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z} = \frac{z-z-\Delta z}{z(z+\Delta z)} = \frac{-\Delta z}{z^2+z\Delta z} =$

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{-\Delta z}{z^2+z\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\Delta z}{\Delta z(z^2+z\Delta z)} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{(z^2+z\Delta z)} = \frac{-1}{z^2}$

$f'(-3i) = \frac{-1}{(-3i)^2} = \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}$

مثال / جد مشتقة الدالة $f(z) = \sqrt{z}$ عند النقطة 16 (بواسطة التعريف)

الحل /

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, $f(z+\Delta z) = \sqrt{z+\Delta z}$, $f(z) = \sqrt{z}$, $f(z+\Delta z) - f(z) = \sqrt{z+\Delta z} - \sqrt{z}$

$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sqrt{z+\Delta z} - \sqrt{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sqrt{z+\Delta z} - \sqrt{z}}{\Delta z} \cdot \frac{\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}}{\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}}$

$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z+\Delta z - z}{\Delta z\,(\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z})} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{(\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z})} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

$f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$

قوانين المشتقة :

١) مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفر

٢) $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$

٣) $\frac{d}{dz}(cz^n) = cnz^{n-1}$ و c ثابت

٤) $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = \frac{d}{dz}[f(z)] \pm [g(z)]\frac{d}{dz}$

٥) $\frac{d}{dz}[f(z) \cdot g(z)] = f(z) \cdot \frac{d}{dz}[g(z)] + g(z) \cdot [f(z)]\frac{d}{dz}$

٦) $\frac{d}{dz}[\frac{f(z)}{g(z)}] = \frac{g(z) \cdot \frac{d}{dz}[f(z)] - f(z) \cdot \frac{d}{dz}[g(z)]}{[g(z)]^2}$

٧) $\frac{d}{dz}[f(z)]^n = n[f(z)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dz}[f(z)]$

مثال/ جد كل مشتقة كل من : ١) $f(z) = z^5$ ٢) $f(z) = 3$ ٣) $f(z) = 2z^3$ ٤) $f(z) = \sqrt{z}\,(3z^2+2)$ ٥) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ ٦) $f(z)=(z^6+3)^2$

الحل :

1) $\frac{d}{dz}[f(z)] = \frac{d}{dz}[z^5] = 5z^4$

2) $\frac{d}{dz}[f(z)] = \frac{d}{dz}[3] = 0$

3) $\frac{d}{dz}[f(z)] = \frac{d}{dz}[2z^3] = 6z^2$

4) $\frac{d}{dz}[f(z)] = \frac{d}{dz}[\sqrt{z}\,(3z^2+2)] = (\sqrt{z}\,)(6z) + (3z^2+2)(\frac{1}{2\sqrt{z}})$

5) $\frac{d}{dz}[f(z)] = \frac{d}{dz}[\frac{z-1}{z+1}] = \frac{(z+1).(1) - (z-1).(1)}{[z+1]^2} = \frac{z+1-z+1}{[z+1]^2} = \frac{2}{[z+1]^2}$

6) $\frac{d}{dz}[f(z)] = \frac{d}{dz}[(z^6+3)^2] = 2(z^6+3)(6z^5)$

شروط كوشي - ريمان :

مبرهنة / لتكن A مجموعة جزئية في المستوي المعقد C ولتكن $f(z): A \to C$ دالة بحيث $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ولتكن $z = x + iy \in A$

و $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ اذا كان مشتقة $f(z)$ موجودة عند النقطة z_0 فان $f(z)$ تحقق شروط كوشي- ريمان اذا وفقط اذا كانت u , v تحققان شروط كوشي- ريمان وهذه الشروط هي :

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ or $u_x = v_y$

2) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ or $u_y = - v_x$

مثال / لتكن $f(z) = z^2$ دالة بحيث $z = x + iy$ هل ان $f(z)$ تحقق شروط كوشي- ريمان

الحل / $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i2xy - y^2 = (x^2 - y^2) + i (2xy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$

$u(x,y) = x^2 - y^2$, $u_x = 2x$, $u_y = - 2y$, $v(x,y) = 2xy$, $v_x = 2y$, $v_y = 2x$

$u_x = 2x = v_y \Rightarrow u_x = v_y$, $u_y = - 2y = - v_x \Rightarrow u_y = - v_x$

وعليه $f(z)$ تحقق شروط كوشي – ريمان .

مثال / لتكن $f(z) = |z|^2$ دالة بحيث $z = x + iy$ هل ان $f(z)$ تحقق شروط كوشي- ريمان

الحل / $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + i\,(0) = u(x,y) + i\,v(x,y)\ ,\ u(x,y) = x^2 + y^2,\ v(x,y) = 0$

$u(x,y) = x^2 + y^2\ ,\ u_x = 2x\ ,\ u_y = 2y\ ,\ v(x,y) = 0\ ,\ v_x = 0\ ,\ v_y = 0$

$u_x = 2x \neq v_y \Rightarrow u_x \neq v_y\ ,\ u_y = 2y \neq - v_x \Rightarrow u_y \neq - v_x$

وعليه $f(z)$ لا تحقق شروط كوشي – ريمان .

مثال / لتكن $f(z) = (\bar{z})^2$ دالة بحيث $z = x + iy$ هل ان $f(z)$ تحقق شروط كوشي- ريمان

الحل / $f(z) = (\bar{z})^2 = (\,x - iy\,)^2 = x^2 - i2xy - y^2 = (\,x^2 - y^2) - i\,(2xy) = u(x,y) - i\,v(x,y)\ ,\ u(x,y) = x^2 - y^2\ ,\ v(x,y) = - 2xy$

$u(x,y) = x^2 - y^2\ ,\ u_x = 2x\ ,\ u_y = - 2y\ ,\ v(x,y) = -2xy\ ,\ v_x = - 2y\ ,\ v_y = - 2x$

$u_x = 2x \neq v_y \Rightarrow u_x \neq v_y\ ,\ u_y = - 2y \neq - v_x \Rightarrow u_y \neq - v_x$

وعليه $f(z)$ لا تحقق شروط كوشي – ريمان .

مثال / لتكن $f(z) = \bar{z}$ دالة بحيث $z = x + iy$ هل ان $f(z)$ تحقق شروط كوشي- ريمان .

الحل / $f(z) = \bar{z} = x - iy = u(x,y) - i\,v(x,y)\ ,\ u(x,y) = x\ ,\ v(x,y) = - y$

$u(x,y) = x\ ,\ u_x = 1\ ,\ u_y = 0\ ,\ v(x,y) = - y\ ,\ v_x = 0\ ,\ v_y = - 1$

$u_x = 1 \neq v_y \Rightarrow u_x \neq v_y\ ,\ u_y = 0 = - v_x \Rightarrow u_y = - v_x$

وعليه $f(z)$ لا تحقق شروط كوشي – ريمان .

مثال / لتكن $f(z) = z$ دالة بحيث $z = x + iy$ هل ان $f(z)$ تحقق شروط كوشي- ريمان .

الحل / $f(z) = z = x + iy = u(x,y) + i\,v(x,y)\ ,\ u(x,y) = x\ ,\ v(x,y) = y$

$u(x,y) = x\ ,\ u_x = 1\ ,\ u_y = 0\ ,\ v(x,y) = y\ ,\ v_x = 0\ ,\ v_y = 1$

$u_x = 1 = v_y \Rightarrow u_x = v_y$, $u_y = 0 = -0 = -v_x \Rightarrow u_y = -v_x$

وعليه f(z) تحقق شروط كوشي – ريمان .

معادلتي كوشي – ريمان بالصيغة القطبية :

لتكن $f(z) = u(r,\theta) + i\, v(r,\theta)$ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة z حيث ان $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

فان $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}$ و $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}$ او $u_r = \frac{1}{r}.v\theta$ و $v_r = \frac{-1}{r}.u\theta$

مثال / لتكن $f(z) = \frac{\cos\theta}{r} - i\,\frac{\sin\theta}{r}$ هل f(z) تحقق معادلتي كوشي- ريمان ام لا ؟

الحل /

$u(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r}$, $u_r = \frac{-\cos\theta}{r^2}$, $u\theta = \frac{-\sin\theta}{r}$

$v(r,\theta) = \frac{-\sin\theta}{r}$, $v_r = \frac{\sin\theta}{r^2}$, $v\theta = \frac{-\cos\theta}{r}$

$u_r = \frac{-\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{-\cos\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}.v\theta \Rightarrow u_r = \frac{1}{r}.\, v\theta$

$v_r = \frac{\sin\theta}{r^2} = \frac{-1}{r}\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right) = \frac{-1}{r}.u\theta \Rightarrow v_r = \frac{-1}{r}.\, u\theta$

وعليه f(z) تحقق تحقق معادلتي كوشي- ريمان

مثال / لتكن $f(z) = \frac{\sin\theta}{r} + i\,\frac{\cos\theta}{r}$ هل f(z) تحقق معادلتي كوشي- ريمان ام لا ؟

الحل /

$u(r,\theta) = \frac{\sin\theta}{r}$, $u_r = \frac{-\sin\theta}{r^2}$, $u\theta = \frac{\cos\theta}{r}$

$v(r,\theta) = \frac{\cos\theta}{r}$, $v_r = \frac{-\cos\theta}{r^2}$, $v\theta = \frac{-\sin\theta}{r}$

$u_r = \frac{-\sin\theta}{r^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{-\sin\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}.v\theta \Rightarrow u_r = \frac{1}{r}.\, v\theta$

$v_r = \frac{-\cos\theta}{r^2} = \frac{-1}{r}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) = \frac{-1}{r}.u\theta \Rightarrow v_r = \frac{-1}{r}.\, u\theta$

وعليه f(z) تحقق معادلتي كوشي- ريمان .

معادلة لإبلاس : اذا كانت A مجموعة جزئية في المستوي المعقد وكانت $f(z) : A \to C$ دالة بحيث $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ تحقق شروط كوشي – ريمان وكان المشتقة الثانية للدالة $f(z)$ موجودة و $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{yx}, v_{xx}, v_{yy}, v_{xy}, v_{yx}$ وموجودة وكان $u_{xy} = u_{yx}$ و $v_{xy} = v_{yx}$ وكان $u_{xx} + u_{yy} = 0$ و $v_{xx} + v_{yy} = 0$ فان u , v تحققان معادلة لإبلاس .

مثال : لتكن $u(x,y) = x^2 - y^2$ هل ان u تحقق معادلة لإبلاس

الحل : $u(x,y) = x^2 - y^2 , \; u_x = 2x , u_{xx} = 2 , u_y = -2y , u_{yy} = -2 , \; u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$

وعليه u تحقق معادلة لإبلاس .

مثال : لتكن $v(x,y) = 2xy$ هل ان u تحقق معادلة لإبلاس

الحل : $v(x,y) = 2xy , v_x = 2y , v_{xx} = 0 , v_y = 2x , v_{yy} = 0 , v_{xx} + v_{yy} = 0 + 0 = 0$

وعليه v تحقق معادلة لإبلاس .

مثال : لتكن $u(x,y) = x^2 + y^2$ هل ان u تحقق معادلة لإبلاس

الحل : $u(x,y) = x^2 + y^2 , \; u_x = 2x , u_{xx} = 2 , u_y = 2y , u_{yy} = 2 , \; u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2 = 4 \neq 0$

وعليه u لا تحقق معادلة لإبلاس .

مثال : لتكن $v(x,y) = x + y^2$ هل ان u تحقق معادلة لإبلاس

الحل : $v(x,y) = x + y^2 , v_x = 1 , v_{xx} = 0 , v_y = 2y , v_{yy} = 2 , v_{xx} + v_{yy} = 0 + 2 = 2 \neq 0$

وعليه v لا تحقق معادلة لإبلاس .

معادلة لإبلاس بالصيغة القطبية : لتكن $f(z) = u(r,\theta) + i\, v(r,\theta)$ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة z حيث ان $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ و

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ فان u تحقق معادلة لإبلاس اذا كان $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$ وكذلك v تحقق معادلة لإبلاس اذا كان

. $r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\theta\theta} = 0$

مثال / لتكن $u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$ هل ان u تحقق معادلة لإبلاس ام لا ؟

الحل /

$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$, $u_r = 2r \cos 2\theta$, $u_{rr} = 2 \cos 2\theta$, $u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$, $u_\theta = -2r^2 \sin 2\theta$, $u_{\theta\theta} = -4 r^2 \cos 2\theta$

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 2 r^2 \cos 2\theta + 2 r^2 \cos 2\theta - 4 r^2 \cos 2\theta = 0$

وعليه u تحقق معادلة لإبلاس .

مثال / لتكن $v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta$ هل ان v تحقق معادلة لإبلاس ام لا ؟

الحل /

$v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta$, $v_r = 2r \sin 2\theta$, $v_{rr} = 2 \sin 2\theta$, $v(r,\theta) = r^2 \sin 2\theta$, $v_\theta = 2r^2 \cos 2\theta$, $v_{\theta\theta} = -4 r^2 \sin 2\theta$

$r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\theta\theta} = 2 r^2 \sin 2\theta + 2 r^2 \sin 2\theta - 4 r^2 \sin 2\theta = 0$

وعليه v تحقق معادلة لإبلاس .

مثال / لتكن $v(r,\theta) = r^2 \sin \theta$ هل ان v تحقق معادلة لإبلاس ام لا ؟

الحل /

$v(r,\theta) = r^2 \sin\theta$, $v_r = 2r \sin\theta$, $v_{rr} = 2 \sin\theta$, $v(r,\theta) = r^2 \sin\theta$, $v_\theta = r^2 \cos\theta$, $v_{\theta\theta} = -r^2 \sin\theta$

$r^2 v_{rr} + r v_r + v_{\theta\theta} = 2 r^2 \sin\theta + 2 r^2 \sin\theta - r^2 \sin\theta \neq 0$

وعليه v لا تحقق معادلة لإبلاس .

الدالة الاسية : الدالة e^z = f(z) = exp(z) حيث z = x+iy معرفة على جميع نقاط المستوي المعقد C . حيث يمكن ان تمثل بالشكل التالي

$f(z) = \exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

حيث y مقاسة بالتقدير الدائري . اذا كانت y = 0 فان $f(z) = e^x$ وهي تمثل الدالة الاسية الحقيقية . اذا كانت x = 0 فان

$f(z) = e^{iy} = \cos y + i \sin y$ وهي تمثل صيغة اويلر.

س / جد قيم z التي تحقق المعادلة $e^z = w$.

الحل / لتكن $w = re^{i\theta}$ و $z = x + iy$

$e^{x+iy} = re^{i\theta} \Rightarrow e^x \cdot e^{iy} = re^{i\theta}$

$r = e^x \Rightarrow \log r = \log e^x \Rightarrow \log r = x \Rightarrow x = \log |w|$, $iy = i\theta \Rightarrow y = \theta + 2k\pi$, k = 0 , ± 1 , ± 2 , ……

$e^z = w \Rightarrow \log e^z = \log w \Rightarrow z = \log (re^{i\theta}) \Rightarrow z = \log r + \log(e^{i\theta}) \Rightarrow z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$, k = 0 , ± 1 , ± 2 , ……

$z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$, k = 0 , ± 1 , ± 2 , ……

مثال / جد قيم z التي تحقق المعادلة $e^z = 1+i$.

الحل /

$e^z = 1+i$, $r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$z = \log r + i (\theta + 2k\pi)$, k = 0 , ± 1 , ± 2 , ……

$z = \log \sqrt{2} + i (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, k = 0 , ± 1 , ± 2 , ……

مثال / جد قيم z التي تحقق المعادلة $e^z = 1+ \sqrt{3}\, i$.

الحل /

$e^z = 1+ \sqrt{3}\, i$, $r = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$z = \log r + i\,(\theta + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$

$z = \log 2 + i\,(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$

مثال / جد قيم z التي تحقق المعادلة $e^z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

الحل /

$e^z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$, $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$z = \log r + i\,(\theta + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$

$z = \log 1 + i\,(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$

$z = i\,(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$

مثال / جد قيم z التي تحقق المعادلة $e^z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$.

الحل /

$e^z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$, $r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$z = \log r + i\,(\theta + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$

$z = \log 1 + i\,(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$

$z = i\,(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$

خواص الدالة الاسية :

١) اثبت ان $|e^z| = e^x$

البرهان : $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x . e^{iy}| = |e^x(\cos y + i\sin y)| = . |\cos y + i\sin y)| = |e^x| . \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}\, |e^x|$

$= |e^x| = e^x$

٢) اثبت ان $e^{z+2\pi i} = e^z$

البرهان : $e^{z+2\pi i} = e^z . e^{2\pi i} = e^z . (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z . (1+0.i) = e^z$

٣) اثبت ان $e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

البرهان : $e^{z_1} . e^{z_2} = e^{x_1+iy_1} . e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} . e^{iy_1} . e^{x_2} . e^{iy_2} = e^{x_1} . (\cos y_1 + i\sin y_1) . e^{x_2} . (\cos y_2 + i\sin y_2)$

$= e^{x_1} . e^{x_2} . (\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{x_1+x_2} . [\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] = e^{x_1+x_2} . e^{i(y_1+y_2)}$

$= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2+iy_1+iy_2} = e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = e^{z_1+z_2}$

٤) اثبت ان $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

البرهان: $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1+iy_1}}{e^{x_2+iy_2}} = \frac{e^{x_1} . e^{iy_1}}{e^{x_2} . e^{iy_2}} = \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)} = e^{x_1-x_2} (\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 - i\sin y_2)$

$= e^{x_1-x_2} \left(\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)\right) = e^{x_1-x_2} . e^{i(y_1-y_2)} = e^{x_1-x_2+i(y_1-y_2)} = e^{x_1-x_2+iy_1-iy_2}$

$= e^{x_1+iy_1-(x_2+iy_2)} = e^{z_1-z_2}$

٥) اثبت ان $(e^z)^n = e^{nz}$

البرهان : $(e^z)^n = (e^{x+iy})^n = (e^x.e^{iy})^n = [\, e^x.(\cos y+i\sin y)]^n = (e^x)^n\,.\,(\cos y+i\sin y)^n = e^{nx}.\,(\cos ny+i\sin ny) = e^{nx}.e^{iny} = e^{nx+iny}$

$= e^{nx+iny} = e^{n(x+iy)} = e^{nz}$

٦) اثبت ان $= e^{\bar{z}}\,\overline{(e^z)}$

البرهان : $\overline{(e^z)} = = \overline{(e^x.e^{iy})(e^{x+iy})} = \overline{[e^x(\cos y + i\sin y)]} = \overline{(e^x)}\,.\overline{(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y)$

$= e^x.(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^x.e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$

مشتقة الدالة الاسية :

لتكن $f(z) = e^z$ دالة اسية معرفة على جميع نقاط المستوي المعقد فان $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$. واذا كانت u دالة بدلالة z فان $\frac{d}{dz}(e^u) = e^u\,.\,\frac{du}{dz}$

مثال/ جد مشتقة كل من : ١) $f(z) = e^{z^2}$ ٢) $f(z) = e^{\sqrt{z}}$ ٣) $f(z) = e^{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$ ٤) $f(z) = e^{\frac{z}{3}}$

الحل /

1) $\frac{d}{dz}(f(z)) = \frac{d}{dz}(e^{z^2}) = e^{z^2}.\,2z$

2) $\frac{d}{dz}(f(z)) = \frac{d}{dz}(e^{\sqrt{z}}) = e^{\sqrt{z}}.\,\frac{1}{2\sqrt{z}}$

3) $\frac{d}{dz}(f(z)) = \frac{d}{dz}(e^{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}) = e^{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}.\,\frac{(z+1)-(z-1)}{(z+1)^2} = e^{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}.\,\frac{2}{(z+1)^2}$

4) $\frac{d}{dz}(f(z)) = \frac{d}{dz}(e^{\frac{z}{3}}) = e^{\frac{z}{3}}.\,\frac{1}{3}$

الدالة اللوغاريتمية : تسمى الدالة $w = \log(z)$ المعرفة على جميع نقاط المستوي المعقد C دالة لوغاريتمية حيث $z = re^{i\theta}$

س : جد قيم w التي تحقق المعادلة $w = \log(z)$

الحل : ليكن $z = re^{i\theta}$ و

$w = \log(z) \Rightarrow w = \log(re^{i\theta}) \Rightarrow w = \log r + \log(e^{i\theta}) \Rightarrow w = \log|z| + i\arg(z) \Rightarrow$

$\log(z) = \log|z| + i(\theta + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , ...$

مثال : جد قيمة $\log(1+i)$

الحل : $z = 1+i$, $|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\log(z) = \log|z| + i(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \log(1+i) = \log\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , ...$

مثال : جد قيمة $\log(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

الحل :

$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\log(z) = \log|z| + i(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \log(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \log 1 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 0 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , ...$

مثال : جد قيمة $\log(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

الحل :

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\log(z) = \log|z| + i(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \log(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \log 1 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = 0 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k = 0 , \pm 1 , ...$

مثال : جد قيمة $\log(1+\sqrt{3}\,i)$

الحل : $z = 1+\sqrt{3}\,i$, $|z| = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\log(z) = \log|z| + i(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \log(1+\sqrt{3}\,i) = \log 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

مثال : جد قيمة $\log(\sqrt{3}+i)$

الحل : $z = \sqrt{3}+i$, $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\log(z) = \log|z| + i(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \log(\sqrt{3}+i) = \log 2 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

<u>خواص الدالة اللوغاريتمية :</u>

١) اثبت ان $\log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$

البرهان : $\log(z_1.z_2) = \log|z_1.z_2| + \log(|z_1|.|z_2|) + i(\arg(z_1) + \arg(z_2))$

$i\arg(z_1.z_2) =$

$= \log|z_1| + \log|z_2| + i\arg(z_1) + i\arg(z_2) = \log|z_1| + i\arg(z_1) + \log|z_2| + i\arg(z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$

٢) اثبت ان $\log(\frac{z_1}{z_2}) = \log(z_1) - \log(z_2)$

البرهان : $\log(\frac{z}{z}) = \log\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log\left(\frac{|z_1|}{|z_2|}\right) + i(\arg(z_1) - \arg(z_2))$

$= \log|z_1| - \log|z_2| + i\arg(z_1) - i\arg(z_2) = \log|z_1| + i\arg(z_1) - \log|z_2| - i\arg(z_2) = \log(z_1) - \log(z_2)$

الدوال الزائدية : ليكن z عدد معقد يمكن تعريف دالتي الجيب والجيب تمام الزائدي كالاتي

$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

ويمكن تعريف بقية الدوال الزائدية كالاتي

$\tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, $\coth z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$, $\operatorname{sech} z = \frac{2}{e^z + e^{-z}}$, $\operatorname{csch} z = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$

مشتقة الدوال الزائدية /

1) $\frac{d}{dz}(\sinh z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z$

2) $\frac{d}{dz}(\cosh z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z$

3) $\frac{d}{dz}(\tanh z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right) = \frac{(e^z + e^{-z})(e^z + e^{-z}) - (e^z - e^{-z})(e^z - e^{-z})}{(e^z + e^{-z})^2} = \frac{e^{2z} + 1 + 1 + e^{-2z} - (e^{2z} - 1 - 1 + e^{-2z})}{(e^z + e^{-z})^2} = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2}$

$= \left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^2 = \operatorname{sech}^2 z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\tanh z) = \operatorname{sech}^2 z$

4) $\frac{d}{dz}(\coth z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\right) = \frac{(e^z - e^{-z})(e^z - e^{-z}) - (e^z + e^{-z})(e^z + e^{-z})}{(e^z - e^{-z})^2} = \frac{e^{2z} - 1 - 1 + e^{-2z} - (e^{2z} + 1 + 1 + e^{-2z})}{(e^z - e^{-z})^2} = \frac{-4}{(e^z - e^{-z})^2}$

$= -\left(\frac{2}{e^z - e^{-z}}\right)^2 = -\operatorname{csch}^2 z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\coth z) = -\operatorname{csch}^2 z$

5) $\frac{d}{dz}(\operatorname{sech} z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right) = \frac{(e^z + e^{-z})(0) - (2)(e^z - e^{-z})}{(e^z + e^{-z})^2} = \frac{-(2)(e^z - e^{-z})}{(e^z + e^{-z})^2} = \frac{-2}{(e^z + e^{-z})} \cdot \frac{(e^z - e^{-z})}{(e^z + e^{-z})} = -\operatorname{sech} z \tanh z$

$\frac{d}{dz}(\operatorname{sech} z) = -\operatorname{sech} z \tanh z$

5) $\frac{d}{dz}(\operatorname{csch} z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2}{e^z - e^{-z}}\right) = \frac{(e^z - e^{-z})(0) - (2)(e^z + e^{-z})}{(e^z - e^{-z})^2} = \frac{-(2)(e^z + e^{-z})}{(e^z - e^{-z})^2} = \frac{-2}{(e^z - e^{-z})} \cdot \frac{(e^z + e^{-z})}{(e^z - e^{-z})} = -\operatorname{csch} z \coth z$

$\frac{d}{dz}(\operatorname{csch} z) = -\operatorname{csch} z \coth z$

مبرهنة / اذا كانت u بدلالة z فان مشتقة الدوال الزائدية تصبح كالاتي :

1) $\frac{d}{dz}(\sinh u) = \cosh u \cdot \frac{du}{dz}$

2) $\frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh u \cdot \frac{du}{dz}$

3) $\frac{d}{dz}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \cdot \frac{du}{dz}$

4) $\frac{d}{dz}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \cdot \frac{du}{dz}$

5) $\frac{d}{dz}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \cdot \frac{du}{dz}$

6) $\frac{d}{dz}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \cdot \frac{du}{dz}$

مثال / جد مشتقة كل من : ١) $\sinh\sqrt{z}$ ٢) $\tanh(z^2-2z)$ ٣) $\operatorname{sech}(\frac{z}{z-1})$ ٤) $\operatorname{csch}(\cosh z)$ ٥) $\coth(\sinh z)$

الحل /

1) $\frac{d}{dz}(\sinh\sqrt{z}) = \cosh\sqrt{z} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}}$

2) $\frac{d}{dz}(\tanh(z^2-2z)) = \operatorname{sech}^2(z^2-2z) \cdot (2z-2)$

3) $\frac{d}{dz}(\operatorname{sech}(\frac{z}{z-1})) = -\operatorname{sech}(\frac{z}{z-1}) \tanh(\frac{z}{z-1}) \cdot \frac{(z-1)(1)-z}{(z-1)^2} = -\operatorname{sech}(\frac{z}{z-1}) \cdot \tanh(\frac{z}{z-1}) \cdot \frac{-1}{(z-1)^2}$

4) $\frac{d}{dz}(\operatorname{csch}(\cosh z)) = -\operatorname{csch}(\cosh z) \cdot \coth(\cosh z) \cdot \sinh z$

5) $\frac{d}{dz}(\coth(\sinh z)) = -\operatorname{csch}^2(\sinh z) \cdot \cosh z$

خواص الدوال الزائدية :

١) اثبت ان $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

البرهان : $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x.e^{iy} - e^{-x}.e^{-iy}}{2} = \frac{e^x(\cos y+i\sin y)-e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2}$

$$= \frac{e^x\cos y + ie^x\sin y - e^{-x}\cos y+ie^{-x}\sin y}{2} = \frac{\cos y(e^x-e^{-x})+ i\sin y(e^x+e^{-x})}{2} = \frac{\cos y(e^x-e^{-x})}{2} + \frac{i\sin y(e^x+e^{-x})}{2}$$

$$= \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y$$

٢) اثبت ان $\cosh z = \cosh x \cos y + i\sinh x \sin y$

البرهان : $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x.e^{iy} + e^{-x}.e^{-iy}}{2} = \frac{e^x(\cos y+i\sin y) + e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2}$

$$= \frac{e^x\cos y + ie^x\sin y + e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y}{2} = \frac{\cos y(e^x + e^{-x})+ i\sin y(e^x - e^{-x})}{2} = \frac{\cos y(e^x + e^{-x})}{2} + \frac{i\sin y(e^x- e^{-x})}{2}$$

$$= \cosh x \cos y + i\sinh x \sin y$$

٣) اثبت ان $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

البرهان : $\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{(e^z + e^{-z})^2}{4} - \frac{(e^z - e^{-z})^2}{4} = \frac{(e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2}{4}$

$$= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} - (e^{2z} - 2 + e^{-2z})}{4} = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

٤) اثبت ان $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$

البرهان : بما ان $\sinh z = \sinh x \cos y + i\cosh x \sin y$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y = \sinh^2 x (1 - \sin^2 y) + (1 + \sinh^2 x) \sin^2 y$$

$$= \sinh^2 x - \sinh^2 x \sin^2 y + \sin^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

٥) اثبت ان $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$

البرهان : بما ان $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$$|\cosh z|^2 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y = (1+ \sinh^2 x) \cos^2 y + \sinh^2 x (1 - \cos^2 y)$$

$$= \cos^2 y + \sinh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x - \sinh^2 x \cos^2 y = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

٦) اثبت ان $\cosh z + \sinh z = e^z$

البرهان : $\cosh z + \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} + \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = \frac{e^z + e^{-z} + e^z - e^{-z}}{2} = e^z$

٧) اثبت ان $\cosh z - \sinh z = e^{-z}$

البرهان : $\cosh z - \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2} \right) = \frac{e^z + e^{-z} - e^z + e^{-z}}{2} = e^{-z}$

٨) اثبت ان $\sinh z - \cosh z = - e^{-z}$

البرهان : $\sinh z - \cosh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} - \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right) = \frac{e^z - e^{-z} - e^z - e^{-z}}{2} = - e^{-z}$

الدوال المثلثية : ليكن z عدد معقد يمكن تعريف دالتي الجيب والجيب تمام كالاتي

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

ويمكن تعريف بقية الدوال الزائدية كالاتي

$$\tan z = -i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}\right) \quad , \cot z = i\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}\right) , \sec z = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad , \csc z = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

مشتقة الدوال المثلثية /

$$1)\ \frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

$$2)\ \frac{d}{dz}(\cos z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = -\sin z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$$

$$3)\ \frac{d}{dz}(\tan z) = \frac{d}{dz}\left(-i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}\right)\right) = (-i)\left[\frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)(ie^{iz} + ie^{-iz}) - (e^{iz} - e^{-iz})(ie^{iz} - ie^{-iz})}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{e^{2iz} + 1 + 1 + e^{-2iz} - (e^{2iz} - 1 - 1 + e^{-2iz})}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2}\right] = \left[\frac{4}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2}\right] = \sec^2 z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\tan z) = \sec^2 z$$

$$4)\ \frac{d}{dz}(\cot z) = \frac{d}{dz}\left(i\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}\right)\right) = (i)\left[\frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)(ie^{iz} - ie^{-iz}) - (e^{iz} + e^{-iz})(ie^{iz} + ie^{-iz})}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2}\right]$$

$$= (-1)\left[\frac{e^{2iz} - 1 - 1 + e^{-2iz} - (e^{2iz} + 1 + 1 + e^{-2iz})}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2}\right] = \frac{4}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2} = -\left(\frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}\right)^2 = -\csc^2 z$$

$$5)\ \frac{d}{dz}(\sec z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}\right) = \frac{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)(0) - (2)(ie^{iz} - ie^{-iz})}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2} = \frac{-(2i)(e^{iz} - e^{-iz})}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2} = \frac{2}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} \cdot \frac{(-i)(e^{iz} - e^{-iz})}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}$$

$$= \sec z \tan z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \tan z$$

$$5)\ \frac{d}{dz}(\csc z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}\right) = \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)(0) - (2)(ie^{iz} + ie^{-iz})}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2} = \frac{-(2i)(e^{iz} + e^{-iz})}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2} = -\frac{2}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)} \cdot \frac{(i)(e^{iz} + e^{-iz})}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}$$

$$= -\csc z \cot z \Rightarrow \frac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot z$$

مبرهنة / اذا كانت u بدلالة z فان مشتقة الدوال المثلثية تصبح كالاتي :

1) $\frac{d}{dz}(\sin u) = \cos u \cdot \frac{du}{dz}$

2) $\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin u \cdot \frac{du}{dz}$

3) $\frac{d}{dz}(\tan u) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dz}$

4) $\frac{d}{dz}(\cot u) = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dz}$

5) $\frac{d}{dz}(\sec u) = \sec u \tan u \cdot \frac{du}{dz}$

6) $\frac{d}{dz}(\csc u) = -\csc u \cot u \cdot \frac{du}{dz}$

مثال / جد مشتقة كل من : ١) $\sin\sqrt{z+2}$ ٢) $\tan(z^2+6z)$ ٣) $\sec(\frac{2z}{z+1})$ ٤) $\csc(\cos z)$ ٥) $\cot(\sin z)$

الحل /

1) $\frac{d}{dz}(\sin\sqrt{z}) = \cosh\sqrt{z+2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z+2}}$

2) $\frac{d}{dz}(\tan(z^2+6z)) = \sec^2(z^2+6z) \cdot (2z+6)$

3) $\frac{d}{dz}(\sec(\frac{2z}{z+1})) = \sec(\frac{2z}{z+1}) \tan(\frac{2z}{z+1}) \cdot \frac{(z+1)(2)-2z}{(z+1)^2} = \sec(\frac{2z}{z+1}) \cdot \tan(\frac{2z}{z+1}) \cdot \frac{2}{(z+1)^2}$

4) $\frac{d}{dz}(\csc(\cos z)) = -\csc(\cos z) \cdot \cot(\cos z) \cdot -\sin z$

5) $\frac{d}{dz}(\cot(\sin z)) = -\csc^2(\sin z) \cdot \cos z$

خواص الدوال المثلثية :

١) اثبت ان $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

البرهان : $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{ix}.e^{-y} - e^{-ix}.e^{y}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2i}$

$= \frac{e^{-y}\cos y+ie^{-y}\sin x-e^{y}\cos x+ie^{y}\sin x}{2i} = \frac{\cos y(e^{-y}-e^{y})+i\sin x(e^{y}+e^{-y})}{2i} = \frac{i\sin x(e^{-y}+e^{y})-\cos x(e^{y}-e^{-y})}{2i}$

$= \frac{\sin x(e^{-y}+e^{y})}{2} - \frac{\cos x(e^{y}-e^{-y})}{2i} = \frac{\sin x(e^{-y}+e^{y})}{2} + \frac{i\cos x(e^{y}-e^{-y})}{2} = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

٢) اثبت ان $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

البرهان : $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} = \frac{e^{ix}.e^{-y} + e^{-ix}.e^{y}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x) + e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2}$

$= \frac{e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x + e^{y}\cos x-ie^{y}\sin x}{2} = \frac{\cos x(e^{-y}+ e^{y})+i\sin x(- e^{y}+e^{-y})}{2} = \frac{\cos x(e^{y}+ e^{-y})-i\sin x(e^{y}-e^{-y})}{2}$

$= \frac{\cos x(e^{y}+e^{-y})}{2} - \frac{i\sin x(e^{y}-e^{-y})}{2} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh x$

٣) اثبت ان $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

البرهان : بما ان $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos y \sinh y$

$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x (1+\sinh^2 y)+(1-\sin^2 x) \sinh^2 y = \sin^2 x +\sin^2 x \sinh^2 y+ \sinh^2 y-\sin^2 x\sinh^2 y$

$= \sin^2 x + \sinh^2 y$

٤) اثبت ان $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

البرهان : بما ان $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin y \sinh y$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y = \cos^2 x (1+\sinh^2 y) + (1-\cos^2 x)\sinh^2 y = \cos^2 x + \cos^2 x \sinh^2 y + \sinh^2 y - \cos^2 x \cosh^2 y$

$= \cos^2 x + \sinh^2 y$

٥) اثبت ان $\sin iz = i \sinh z$

البرهان : $\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = \frac{-(e^{z} - e^{-z})}{2i} = \frac{i\,(e^{z} - e^{-z})}{2} = i \sinh z$

٦) اثبت ان $\cos iz = \cosh z$

البرهان : $\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cosh z$

٧) اثبت ان $i \sin z = \sinh iz$

البرهان : $i \sin z = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2} = \sinh iz$

٨) اثبت ان $\cos z = \cosh iz$

البرهان : $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz$

الدوال الزائدية العكسية /

١) $\sinh^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة sinhz ويعرف بالشكل التالي $w = \sinh^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \sinh w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$

٢) $\cosh^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة coshz ويعرف بالشكل التالي $w = \cosh^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \cosh w = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2}$

٣) $\tanh^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة tanhz ويعرف بالشكل التالي $w = \tanh^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \tanh w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}$

٤) $\coth^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة cothz ويعرف بالشكل التالي $w = \coth^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \coth w = \frac{e^{w} + e^{-w}}{e^{w} - e^{-w}}$

٥) $\operatorname{sech}^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة sechz ويعرف بالشكل التالي $w = \operatorname{sech}^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \operatorname{sech} w = \frac{2}{e^{w} + e^{-w}}$

٦) $\operatorname{csch}^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة cschz ويعرف بالشكل التالي $w = \operatorname{csch}^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \operatorname{csch} w = \frac{2}{e^{w} - e^{-w}}$

خواص الدوال الزائدية العكسية :

1) اثبت ان $\sinh^{-1}z = \log[\, z + \sqrt{z^2 + 1}\,]$

البرهان /

$$w = \sinh^{-1}z \Rightarrow \sinh w = \sinh(\sinh^{-1}z) \Rightarrow \sinh w = z \Rightarrow \frac{e^{w} - e^{-w}}{2} = z \Rightarrow e^{w} - e^{-w} = 2z \Rightarrow e^{w} - 2z - e^{-w} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{2w} - 2ze^{w} - 1 = 0 \Rightarrow e^{w} = \frac{2z \mp \sqrt{4z^2+4}}{2} \Rightarrow e^{w} = z \mp \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow w = \log[z + \sqrt{z^2 + 1}] \Rightarrow \sinh^{-1}z = \log[\, z + \sqrt{z^2 + 1}]$$

2) اثبت ان $\cosh^{-1}z = \log[\, z + \sqrt{z^2 - 1}\,]$

البرهان /

$$w = \cosh^{-1}z \Rightarrow \cosh w = \cosh(\cosh^{-1}z) \Rightarrow \cosh w = z \Rightarrow \frac{e^{w} + e^{-w}}{2} = z \Rightarrow e^{w} + e^{-w} = 2z \Rightarrow e^{w} - 2z + e^{-w} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{2w} - 2ze^{w} + 1 = 0 \Rightarrow e^{w} = \frac{2z \mp \sqrt{4z^2 - 4}}{2} \Rightarrow e^{w} = z \mp \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow w = \log[z + \sqrt{z^2 - 1}] \Rightarrow \cosh^{-1}z = \log[\, z + \sqrt{z^2 - 1}]$$

3) اثبت ان $\tanh^{-1}z = \frac{1}{2}\log[\, 1+z\,] - \frac{1}{2}\log[1-z]$

البرهان /

$w = \tanh^{-1}z \Rightarrow \tanh w = \tanh(\tanh^{-1}z) \Rightarrow \tanh w = z \Rightarrow \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}} = z \Rightarrow e^{w} - e^{-w} = z\,e^{w} + z\,e^{-w} \Rightarrow$

$e^{2w} - 1 = z\,e^{2w} + z \Rightarrow e^{2w} - z\,e^{2w} = 1 + z \Rightarrow e^{2w}(1 - z) = (1 + z) \Rightarrow e^{2w} = \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow 2w = \log[\frac{1+z}{1-z}] \Rightarrow w = \frac{1}{2}\log[\frac{1+z}{1-z}] \Rightarrow$

$w = \frac{1}{2}\log[1 + z] - \frac{1}{2}\log[1 - z] \Rightarrow \tanh^{-1}z = \frac{1}{2}\log[1 + z] - \frac{1}{2}\log[1 - z]$

4) اثبت ان $\coth^{-1}z = \frac{1}{2}\log[z+1] - \frac{1}{2}\log[z-1]$

البرهان /

$w = \coth^{-1}z \Rightarrow \coth w = \coth(\coth^{-1}z) \Rightarrow \coth w = z \Rightarrow \frac{e^{w} + e^{-w}}{e^{w} - e^{-w}} = z \Rightarrow e^{w} + e^{-w} = z\,e^{w} - z\,e^{-w} \Rightarrow$

$e^{2w} + 1 = z\,e^{2w} - z \Rightarrow ze^{2w} - e^{2w} = z + 1 \Rightarrow e^{2w}(z - 1) = (z + 1) \Rightarrow e^{2w} = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow 2w = \log[\frac{z+1}{z-1}] \Rightarrow w = \frac{1}{2}\log[\frac{z+1}{z-1}] \Rightarrow$

$w = \frac{1}{2}\log[z + 1] - \frac{1}{2}\log[z - 1] \Rightarrow \tanh^{-1}z = \frac{1}{2}\log[z + 1] - \frac{1}{2}\log[z - 1]$

5) اثبت ان $\operatorname{sech}^{-1}z = \log[\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}]$

البرهان /

$w = \operatorname{sech}^{-1}z \Rightarrow \operatorname{sech} w = \operatorname{sech}(\operatorname{sech}^{-1}z) \Rightarrow \operatorname{sech} w = z \Rightarrow \frac{2}{e^{w} + e^{-w}} = z \Rightarrow ze^{w} + ze^{-w} = 2 \Rightarrow ze^{w} - 2 + ze^{-w} = 0 \Rightarrow$

$ze^{2w} - 2e^{w} + z = 0 \Rightarrow e^{w} = \frac{2 \mp \sqrt{4-4z^2}}{2z} \Rightarrow e^{w} = \frac{1 \mp \sqrt{1-z^2}}{z} \Rightarrow w = \log[\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}] \Rightarrow \operatorname{sech}^{-1}z = \log[\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}]$

1) اثبت ان $\operatorname{csch}^{-1}z = \log[\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}]$

البرهان /

$w = \operatorname{csch}^{-1}z \Rightarrow \operatorname{csch} w = \operatorname{csch}(\operatorname{csch}^{-1}z) \Rightarrow \operatorname{csch} w = z \Rightarrow \frac{2}{e^{w} - e^{-w}} = z \Rightarrow ze^{w} - ze^{-w} = 2 \Rightarrow ze^{w} - 2 - ze^{-w} = 0 \Rightarrow$

$ze^{2w} - 2e^{w} - z = 0 \Rightarrow e^{w} = \frac{2 \mp \sqrt{4+4z^2}}{2z} \Rightarrow e^{w} = e^{w} = \frac{1 \mp \sqrt{1+z^2}}{z} \Rightarrow w = \log[\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}] \Rightarrow \operatorname{csch}^{-1}z = \log[\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}]$

مشتقة الدوال الزائدية العكسية :

1) اثبت ان $(\sinh^{-1}z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$w = \sinh^{-1}z \Rightarrow \sinh w = \sinh(\sinh^{-1}z) \Rightarrow \sinh w = z \Rightarrow \cosh w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\cosh w} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 w}} \Rightarrow$

$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\sinh^{-1}z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

2)اثبت ان $(\cosh^{-1}z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$w = \cosh^{-1}z \Rightarrow \cosh w = \cosh(\cosh^{-1}z) \Rightarrow \cosh w = z \Rightarrow \sinh w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sinh w} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 w-1}} \Rightarrow$

$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\cosh^{-1}z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

3) اثبت ان $(\tanh^{-1}z) = \frac{1}{1-z^2}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$w = \tanh^{-1}z \Rightarrow \tanh w = \tanh(\tanh^{-1}z) \Rightarrow \tanh w = z \Rightarrow \operatorname{sech}^2 w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 w} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{1-\tanh^2 w} \Rightarrow$

$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{1-z^2} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\tanh^{-1}z) = \frac{1}{1-z^2}$

4) اثبت ان $(\coth^{-1}z) = \frac{1}{1-z^2}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$w = \coth^{-1}z \Rightarrow \coth w = \coth(\coth^{-1}z) \Rightarrow \coth w = z \Rightarrow -\operatorname{csch}^2 w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{-\operatorname{csch}^2 w} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{1-\coth^2 w} \Rightarrow$

$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{1-z^2} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\coth^{-1}z) = \frac{1}{1-z^2}$

5) اثبت ان $(\operatorname{sech}^{-1}z) = \frac{1}{-z\sqrt{1-z^2}}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$w = \text{sech}^{-1}z \Rightarrow \text{sech}w = \text{sech}(\text{sech}^{-1}z) \Rightarrow \text{sech}w = z \Rightarrow -\text{sech}w \cdot \tanh w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{-\text{sech}w \cdot \tanh w} \Rightarrow$

$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{-\text{sech}w \cdot \sqrt{1-\text{sech}^2 w}} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{-z\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\text{sech}^{-1}z) = \frac{1}{-z\sqrt{1-z^2}}$

6) اثبت ان $\frac{d}{dz}(\text{csch}^{-1}z) = \frac{1}{-z\sqrt{z^2+1}}$

البرهان /

$w = \text{csch}^{-1}z \Rightarrow \text{csch}w = \text{csch}(\text{csch}^{-1}z) \Rightarrow \text{csch}w = z \Rightarrow -\text{csch}w \cdot \coth w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{-\text{csch}w \cdot \coth w} \Rightarrow$

$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{-\text{csch}w \cdot \sqrt{\text{csch}^2 w + 1}} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{-z\sqrt{z^2+1}} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\text{csch}^{-1}z) = \frac{1}{-z\sqrt{z^2+1}}$

مبرهنة / لتكن u دالة بدلالة z فان مشتقة الدوال الزائدية العكسية كالاتي :

1) $\frac{d}{dz}(\sinh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{du}{dz}$

2) $\frac{d}{dz}(\cosh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dz}$

3) $\frac{d}{dz}(\tanh^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2} \cdot \frac{du}{dz}$

4) $\frac{d}{dz}(\coth^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2} \cdot \frac{du}{dz}$

5) $\frac{d}{dz}(\text{sech}^{-1}u) = \frac{1}{-u\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dz}$

6) $\frac{d}{dz}(\text{csch}^{-1}u) = \frac{1}{-u\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{du}{dz}$

مبرهنة / جد مشتقة كل من : ١) $\sinh^{-1}z^2$ ٢) $\tanh^{-1}\sqrt{z}$ ٣) $\text{sech}^{-1}(z^3+2)$

الحل /

1) $\frac{d}{dz}(\sinh^{-1}z^2) = \frac{1}{\sqrt{1+z^4}} \cdot (2z)$

2) $\frac{d}{dz}(\tanh^{-1}\sqrt{z}) = \frac{1}{1-(\sqrt{z})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}}$

3) $\frac{d}{dz}(\text{sech}^{-1}(z^3+2)) = \frac{1}{-(z^3+2)\sqrt{1-(z^3+2)^2}} \cdot (3z^2)$

الدوال المثلثية العكسية /

١) $\sin^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة sinz ويعرف بالشكل التالي $w = \sin^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$

٢) $\cos^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة cosz ويعرف بالشكل التالي $w = \cos^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$

٣) $\tan^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة tanz ويعرف بالشكل التالي $w = \tan^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \tan w = -i(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}})$

٤) $\cot^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة cotz ويعرف بالشكل التالي $w = \cot^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \cot w = i(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{e^{iw} - e^{-iw}})$

٥) $\sec^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة secz ويعرف بالشكل التالي $w = \sec^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \sec w = \frac{2}{e^{iw} + e^{-iw}}$

٦) $\csc^{-1}z$ هو الدالة العكسية للدالة cscz ويعرف بالشكل التالي $w = \csc^{-1}z$ اذا وفقط اذا $z = \csc w = \frac{2i}{e^{iw} - e^{-iw}}$

مشتقة الدوال المثلثية العكسية :

1) اثبت ان $(\sin^{-1}z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$$w = \sin^{-1}z \Rightarrow \sin w = \sin(\sin^{-1}z) \Rightarrow \sin w = z \Rightarrow \cos w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\cos hw} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 w}} \Rightarrow$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\sin^{-1}z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

2)اثبت ان $(\cos^{-1}z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$$w = \cos^{-1}z \Rightarrow \cos w = \cos(\cos^{-1}z) \Rightarrow \cos w = z \Rightarrow -\sin w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{-\sin w} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 w}} \Rightarrow$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\cos^{-1}z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$$

3) اثبت ان $(\tan^{-1}z) = \frac{1}{1+z^2}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$$w = \tan^{-1}z \Rightarrow \tan w = \tan(\tan^{-1}z) \Rightarrow \tan w = z \Rightarrow \sec^2 w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sec^2 w} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{1+\tan^2 w} \Rightarrow$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\tan^{-1}z) = \frac{1}{1+z^2}$$

4) اثبت ان $(\cot^{-1}z) = \frac{-1}{1+z^2}\frac{d}{dz}$

البرهان /

$$w = \cot^{-1}z \Rightarrow \cot w = \cot(\cot^{-1}z) \Rightarrow \cot w = z \Rightarrow -\csc^2 w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{-\csc^2 w} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{-1}{1+\cot^2 w} \Rightarrow$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-1}{1+z^2} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\cot^{-1}z) = \frac{-1}{1+z^2}$$

5) اثبت ان $\frac{d}{dz}(\sec^{-1}z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$

البرهان /

$$w = \sec^{-1}z \Rightarrow \sec w = \sec(\sec^{-1}z) \Rightarrow \sec w = z \Rightarrow \sec w \cdot \tan w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sec w \cdot \tan w} \Rightarrow$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\sec w \cdot \sqrt{\sec^2 w - 1}} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\sec^{-1}z) = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$$

6) اثبت ان $\frac{d}{dz}(\csc^{-1}z) = \frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$

البرهان /

$$w = \csc^{-1}z \Rightarrow \csc w = \csc(\csc^{-1}z) \Rightarrow \csc w = z \Rightarrow -\csc w \cdot \cot w \cdot \frac{dw}{dz} = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{1}{-\csc w \cdot \cot w} \Rightarrow$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{-1}{\csc w \cdot \sqrt{\csc^2 w - 1}} \Rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}} \Rightarrow \frac{d}{dz}(\csc^{-1}z) = \frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$$

مبرهنة / لتكن u دالة بدلالة z فان مشتقة الدوال الزائدية العكسية كالاتي :

1) $\frac{d}{dz}(\sin^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dz}$

2) $\frac{d}{dz}(\cos^{-1}u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dz}$

3) $\frac{d}{dz}(\tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dz}$

4) $\frac{d}{dz}(\cot^{-1}u) = \frac{-1}{1-u^2} \cdot \frac{du}{dz}$

5) $\frac{d}{dz}(\sec^{-1}u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dz}$

6) $\frac{d}{dz}(\csc^{-1}u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dz}$

مبرهنة / جد مشتقة كل من : ١) $\cos^{-1}z^2$ ٢) $\cot^{-1}\sqrt{z}$ ٣) $\csc^{-1}(z^3+2)$

الحل /

1) $\frac{d}{dz}(\cos^{-1}z^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^4}} \cdot (2z)$

2) $\frac{d}{dz}(\cot^{-1}\sqrt{z}) = \frac{-1}{1-(\sqrt{z})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}}$

3) $\frac{d}{dz}(\csc^{-1}(z^3+2) = \frac{-1}{(z^3+2)\sqrt{(z^3+2)^2-1}} \cdot (3z^2)$