الاعداد

مجاميع الاعداد

١- مجموعة الاعداد الطبيعية (N) Natural numbers

وهي الاعداد الصحيحة الموجبة مع الصفر وتعتبر مجموعة غير منتهية

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

٢- مجموعة الاعداد الصحيحة (Z) Integer numbers

وهي المجموعة المكونة من كل الاعداد الصحيحة الموجبة والسالبة مع الصفر وهي ايضاً مجموعة غير منتهية، اي ان

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

٣- مجموعة الاعداد النسبية (Q) Rational numbers

يمكن تعبير العدد النسبي بصورة مبسطة على انه نسبة عدد صحيح على عدد صحيح مغاير الصفر، اي ان

$$Q = \left\{\frac{a}{b},\ a, b \in Z,\ b \neq 0\right\}$$

٤- مجموعة الاعداد الغير النسبية (I) Irrational numbers

يمكن تعريف العدد الغير النسبي على انه كسر عشري غير منتهي وغير دوري مثل π

$$I = \{x : x \text{ كسر عشري غير منتهي وغير دوري}\}$$

٥- مجموعة الاعداد الحقيقية (R) Real numbers

$$R = (-\infty, \infty)$$

٦- مجموعة الاعداد المعقدة (المركبة) (C) Complex numbers

$$C = \{z = a + ib,\ a, b \in R,\ i = \sqrt{-1}\}$$

الفترات

١- الفترة المفتوحة :- ويرمز للفترة المفتوحة من a الى b بالرمز (a,b) a-b

وتعرف كالاتي

$$(a,b) = \{ x : x \in R, a < x < b \}$$

٢- الفترة المغلقة :- ويرمز للفترة المغلقة من a الى b بالرمز $[a,b]$ a-b

وتعرف كالاتي

$$[a,b] = \{ x : x \in R, a \leq x \leq b \}$$

اي ان الفترة المغلقة $[a,b]$ هي مجموعة كل الاعداد الحقيقية بين a و b ومن ضمنها الطرفين a و b اي ان

$$[a,b] = (a,b) \cup \{a,b\}$$

٣- الفترة نصف مفتوحة من اليسار $(a,b]$ او نصف مغلقة من اليمين

وتعرف كالاتي

$$(a,b] = \{ x : x \in R, a < x \leq b \}$$

$$(a,b] = (a,b) \cup \{b\}$$ أو

٤- الفترة نصف مفتوحة من اليمين $[a,b)$ او نصف مغلقة من اليسار

وتعرف كالاتي

$$[a,b) = \{ x : x \in R, a \leq x < b \}$$

$$[a,b) = (a,b) \cup \{a\}$$ أو

أمثلة

1- $\{x : x \in R, x \geq 9\} \Rightarrow [9, \infty)$

2- $\{x : x \in R, x < 9\} \Rightarrow (-\infty, 9)$

3- $\{x : x \in R, -\infty < x < 3\} \Rightarrow (-\infty, 3)$

4- $\{x : x \in R, -3 \leq x < 3\} \Rightarrow [-3, 3)$

5- $\{x : x \in R\} \Rightarrow (-\infty, \infty)$

6- $\{x : x \in R, x > 0\} \Rightarrow (0, \infty)$

المتباينات والمتراجحات

ليكن a و b عددين حقيقيين فإن

$a < b$ وتقرأ a أقل من b $\Leftrightarrow$ $b - a =$ عدد موجب

$a > b$ وتقرأ b أقل من a $\Leftrightarrow$ $b - a =$ عدد سالب

خواص المتباينات

1- ليكن $a, b, c \in R$ ، إذا كان $a < b$ و $b < c$ فإن $a < c$.

2- إذا كان $a, b, c \in R$ فإن $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

3- ليكن $a, b, c, d \in R$ ، إذا كان $a < b$ و $c < d$ فإن $a + c < b + d$

4- $a, b, c \in R$ عندما c عدد موجب يكون

$a < b \Leftrightarrow ac < bc$

5- $a, b, c \in R$ عندما c عدد سالب يكون

$a < b \Leftrightarrow ac > bc$

6- إذا كان $a \neq 0$ فإن $a^2 > 0$

7- إذا كان a و b لهما نفس الإشارة وكان

$a < b$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

8- إذا كان $a \neq 0$ فإن $\frac{1}{a}$ لها نفس الإشارة،

9- إذا كان a و b مختلفين بالإشارة أي أن a عدد سالب أو b موجب فإن

$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

١٠- لتكن $a<b$ ، اذا كان a و b عددين موجبين فان $a^2<b^2$
واذا كان a و b عددين سالبين فان $a^2>b^2$

مجموعة حل المتباينة :- ونقصد بحل متباينة متضمنة متغيرا هو ايجاد مجموعة الاعداد الحقيقية بحيث كل منها يحقق المتباينة المعطاة

Examples :- أمثلة

① $2x+1<4x-3$, $x\in R$

$2x-4x<-1-3$

$-2x<-4$ $\quad (*-1)$

$2x>4$

$x>2$

$\therefore \xi=\{x : x\in R, x>2\}=(2,\infty)$

② $-5<2x+6<4$

$-6-5<2x+6-6<4-6$

$-11<2x<-2$

$-5.5<x<-1 \Rightarrow \left(\frac{-11}{2},-1\right)$

③ $0<5x+2<1$

$-2+0<5x+2-2<1-2$

$-2<5x<-1$

$-\frac{2}{5}<x<-\frac{1}{5} \Rightarrow \left(\frac{-2}{5},\frac{-1}{5}\right)$

④ $3x^2-x-2<0$

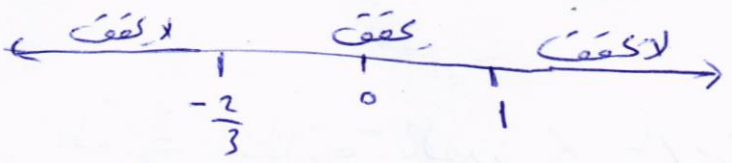
$(3x+2)(x-1)<0$ $\quad \therefore$ هناك احتمالان

الاحتمال الاول $3x+2>0 \Rightarrow x>-\frac{2}{3}$ ... كتقاطع

$x-1<0 \Rightarrow x<1$ ... كتقاطع

الاحتمال الثاني $3x+2<0 \Rightarrow x<-\frac{2}{3}$ ... كتقاطع

$x-1>0 \Rightarrow x>1$ ... كتقاطع



$\therefore$ مج $= \{x : -\frac{2}{3} < x < 1\}$ or $(-\frac{2}{3}, 1)$

⑤ $x^2 > 4x + 12$

$x^2 - 4x - 12 > 0$

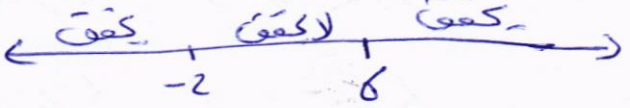
$(x+2)(x-6) > 0$ هناك احتمالان

الاحتمال الأول $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$ حل

$x-6 < 0 \Rightarrow x < 6$ حل

الاحتمال الثاني $x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$ يحقق

$x-6 > 0 \Rightarrow x > 6$ يحقق



$\therefore$ مج $= \{x : x > 6\} \cup \{x : x < -2\}$

أو مج $= (6, \infty) \cup (-\infty, -2)$

⑥ $x^2 - 5x - 24 \leq 0$

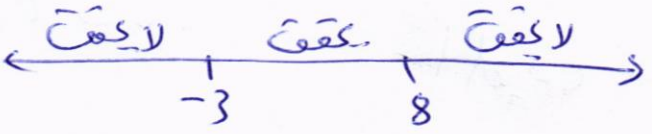
$(x+3)(x-8) \leq 0$ هناك احتمالان

الاحتمال الأول $x - 8 \leq 0 \Rightarrow x \leq 8$ يحقق

$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ يحقق

الاحتمال الثاني $x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq 8$ حل

$x + 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq -3$ حل



$\therefore$ مج $= \{x : -3 \leq x \leq 8\}$

أو مج $= [-3, 8]$

القيمة المطلقة :-

ليكن x عدد حقيقي نرمز للقيمة المطلقة للعدد x بالرمز $|x|$ ونعرف كالآتي :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Ex: $|7| = 7$, $|-8| = 8$

خواصها

١- $-a < x < a \iff |x| < a$

$-a \leq x \leq a \iff |x| \leq a$

$x < -a$ او $x > a \iff |x| > a$

$x \leq -a$ او $x \geq a \iff |x| \geq a$

$|x| = a \iff x = \pm a$ ،

٢- اذا كان a, b عددين حقيقيين

$$|a| \cdot |b| = |ab| \quad , \quad \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$$

٣- $|x-b| < a \iff -a < x-b < a$

$b-a < x < b+a$

٤- المتباينة المثلثية : اذا كان $a, b \in R$ فان

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

٥- اذا كان $c, d \in R$ فان

$$|c| - |d| \leq |c-d|$$

٦- لكل عدد حقيقي x فان $\sqrt{x^2} = |x|$

Examples

هـ مجموعة الحلول للمتباينات التالية

① $|2x+3| < 5$

$-5 < 2x+3 < 5$

$-8 < 2x < 2$

$-4 < x < 1$

$\therefore \xi = \{x : -4 < x < 1\}$

② $|x| < 7$

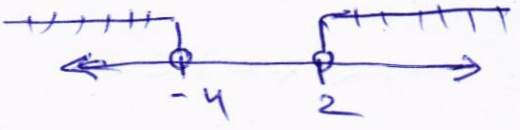
$-7 < x < 7$

$\therefore \xi = \{x : -7 < x < 7\}$

③ $|x+1| > 3$

ب/ $x+1 > 3$ أو $x+1 < -3$

$x > 2$ أو $x < -4$



$\therefore \xi = \{(-\infty, -4) \cup (2, \infty)\}$

④ $|2x-3| = 7$

$2x-3 = \pm 7$

$2x-3 = 7$ ، $2x-3 = -7$

$2x = 10$ ، $2x = -4$

$\boxed{x = 5}$ ، $\boxed{x = -2}$

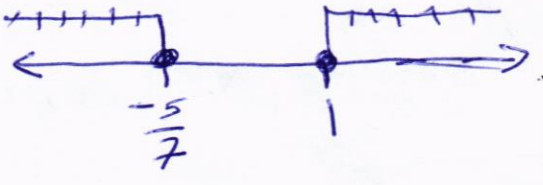
$\xi = \{x : x = -2, x = 5\}$

⑤ $|7y-1| \geq 6$ ans

ب/ $7y-1 \geq 6$ أو $7y-1 \leq -6$

$7y \geq 7$ أو $7y \leq -5$

$y \geq 1$ أو $y \leq -\frac{5}{7}$



$\therefore \xi = \{[1, \infty) \cup (-\infty, -\frac{5}{7}]\}$

⑥ $|2x-3| \geq 1$

↳ $2x-3 \geq 1$, $2x-3 \leq -1$

$2x \geq 4$, $2x \leq 2$

$\boxed{x \geq 2}$, $\boxed{x \leq 1}$

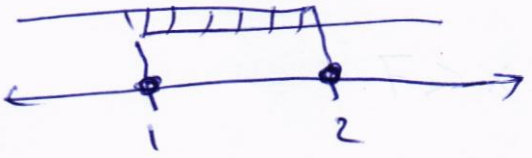
$\therefore \xi = \{x : x \geq 2, x \leq 1\}$ or $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

⑥ $|2x-3| \leq 1$

$-1 \leq 2x-3 \leq 1$

$2 \leq 2x \leq 4$

$1 \leq x \leq 2$



$\therefore \xi = \{x : 1 \leq x \leq 2\}$, $[1, 2]$

⑦ $|x^2-3| < 1$

$-1 < x^2-3 < 1$

$2 < x^2 < 4$ $\quad \because |x| = \sqrt{x^2}$

$\sqrt{2} < \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$

$\sqrt{2} < |x| < 2$, $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

if $x > 0$

$\sqrt{2} < x < 2$

if $x < 0$ $\quad \sqrt{2} < -x < 2$

$\Rightarrow -\sqrt{2} > x > -2$

$\Rightarrow -2 < x < -\sqrt{2}$

$\therefore \xi = \{x : (\sqrt{2}, 2) \cup (-2, -\sqrt{2})\}$

⑧ لتكن E عدد موجب، اثبت انه اذا كان $|x-2| < E/5$ فان

$6-E < 5x-4 < 6+E$

$|x-2| < \frac{E}{5}$

$-\frac{E}{5} < x-2 < \frac{E}{5}$ $\quad *5$

$-E < 5x-10 < E$ $\quad +6$

$6-E < 5x-4 < E+6$

⑨ $|2x+5| < |x+4|$

$\frac{|2x+5|}{|x+4|} < 1$ ، $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

$\left|\frac{2x+5}{x+4}\right| < 1$

$-1 < \frac{2x+5}{x+4} < 1$

∴ إما $x+4>0$

أو $x+4<0$

أو $x+4=0$ (مرفوض)

∴ ناخذ الاحتمال الاول والثاني

الاحتمال الاول

(I) $x+4>0 \Rightarrow x>-4$

$-1 < \frac{2x+5}{x+4} < 1$

$-(x+4) < 2x+5 < (x+4)$

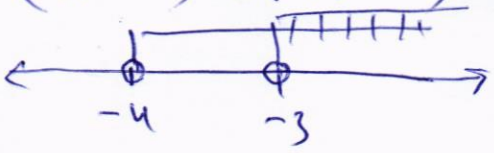
$-(x+4) < 2x+5$ ، $2x+5 < x+4$

$-x-4 < 2x+5$ ، $\boxed{x<-1}$

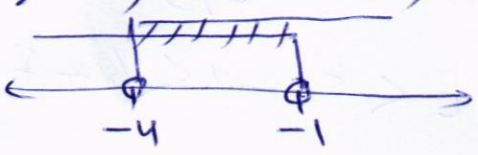
$-9 < 3x$

$\boxed{x>-3}$

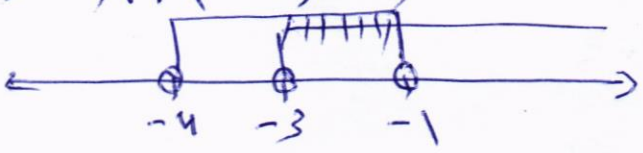
$(x>-4)\cap(x>-3)$,



$(x>-4)\cap(x<-1)$



$(-3,\infty)\cap(-4,-1)$



$\therefore S_1 = (-3,-1)$

(II) $x+4<0 \Rightarrow x<-4$

$$-1 > \frac{2x+5}{x+4} > 1$$

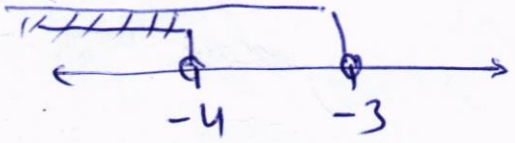
$$-x-4 > 2x+5 > x+4$$

$-x-4>2x+5$, $2x+5>x+4$

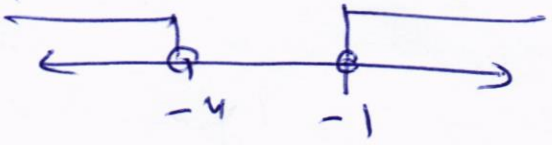
$-9>3x$, $\boxed{x>-1}$

$\boxed{x<-3}$

$(x<-4)\cap(x<-3)$,



$(x<-4)\cap(x>-1)$



$(-\infty,-4)\cap\phi = \phi$

$\therefore S_2 = \phi$

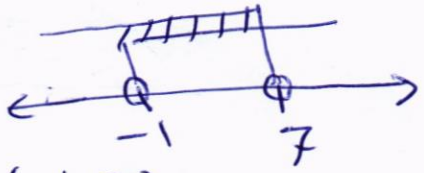
$\therefore \xi = S_1 \cup S_2 = (-3,-1)\cup\phi$

$\xi = (-3,-1)$

(10) $|x-3|<4$

$-4<x-3<4$

$-1<x<7$



$\therefore \xi = \{x : -1<x<7\}$, $(-1,7)$

الدوال ومخططاتها :-

الدالة :- هي قاعدة تقابل بين مجموعتين غير خاليتين من العناصر تسمى المجموعة الاولى بالمنطلق (Domain) ويرمز لها بالرمز D_f والمجموعة الثانية تدعى بالمدى (Range) ويرمز لها بالرمز R_f بحيث ان كل عنصر في المدى يقابل لعنصر واحد في الاول في المنطلق، ويسمى العنصر x بالمتغير المستقل والعنصر y بالمتغير المعتمد.

مثال :- اي الجدولين يمثل دالة؟ (1) ام (2)

x	y
4	9
-6	4
7	9
$\sqrt{2}$	9
0	-2

جدول (1)

x	y
4	2
5	3
$-\frac{2}{3}$	-8
5	1

جدول (2)

الحل :- ان الجدول رقم (1) سوف يمثل دالة بينما الجدول رقم (2) لا يمثل دالة.

(بسبب تكرار العدد 5 في y ولاختلاف x)

المنطلق والمدى للجدول رقم (1) هي

$$D_f = \{4, -6, 7, \sqrt{2}, 0\}$$

$$R_f = \{9, 4, -2\}$$

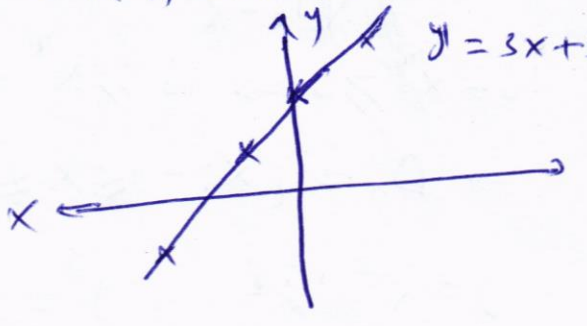
ملاحظة :- لايجاد المنطلق نختار قيم x بحيث تكون الدالة معرفة عندها ولايجاد المدى y نكتب x بدلالة y ونجد قيم y التي تكون الدالة معرفة عندها مع مراعاة قيم x

مثال (1) :- اذا كان لديك $f(x) = 3x + 5$ جد $f(2), f(h+\Delta h), f(h), f(-1), f(0)$ ثم ارسم الدالة وتدلك جد المنطلق والمدى

$f(0) = 5$ ، $f(-1) = 2$ ، $f(2) = 11$ ، $f(h) = 3h + 5$

$f(h+\Delta h) = 3(h+\Delta h) + 5$

x	$y = 3x + 5$
-2	-1
-1	2
0	5
1	8
2	11



$f(x) = 3x + 5$

$y = 3x + 5$

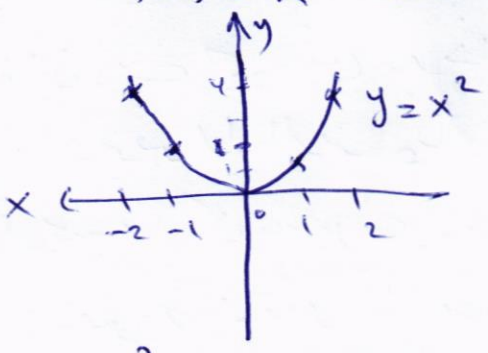
$x = \frac{y-5}{3}$

$D_f = \{x : x \in R\}$, $R_f = \{y : y \in R\}$

or $D_f = R$, $R_f = R$

مثال (2) :- ضع D_f ، R_f ثم ارسم الدالة $f(x) = x^2$

x	$y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



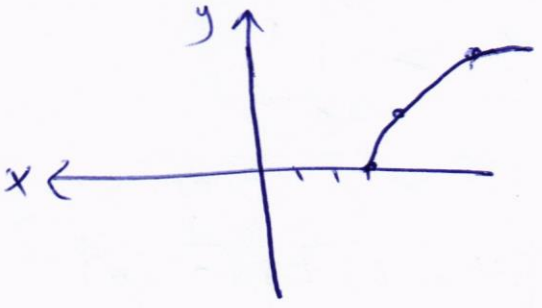
$D_f = \{x : x \in R\}$ or $D_f = R = (-\infty, \infty)$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$, $y \geq 0$

$R_f = \{y : y \geq 0\}$ or $R_f = [0, \infty)$

مثال (3) :- ضع D_f ، R_f ثم ارسم الدالة الآتية $y = \sqrt{x-3}$

x	$y = \sqrt{x-3}$
3	0
4	1
6	$\sqrt{3}$



$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$\therefore D_f = \{x : x \geq 3\}$ or $[3, \infty)$

$y = \sqrt{x-3} \Rightarrow y^2 = x - 3 \Rightarrow x = y^2 + 3$

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$ or $R_f = [0, \infty)$

مثال (4) :- ضع D_f ، R_f ثم ارسم الدالة الآتية

$y = \sqrt{16 - x^2}$

$16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 16 \geq x^2 \Rightarrow |x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$

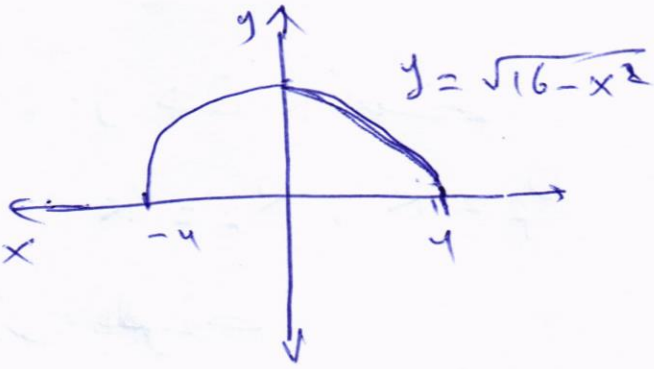
$\therefore D_f = \{x : -4 \leq x \leq 4\}$

$y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 = 16 - y^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{16 - y^2}$

$\therefore R_f = \{y : 0 \leq y \leq 4\}$

x	$y=\sqrt{16-x^2}$
-4	0
-2	$\sqrt{12}$
0	4
2	$\sqrt{12}$
4	0



R_f ، D_f ↓ ∴ (5) جـ

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

$$x-3>0 \Rightarrow x>3$$

$$D_f=\{x: x>3\} \text{ or } (3,\infty)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow y^2=\frac{1}{x-3}$$

$$\Rightarrow y^2(x-3)=1 \Rightarrow xy^2-3y^2=1 \Rightarrow xy^2=1+3y^2$$

$$\therefore x=\frac{1+3y^2}{y^2}$$

$$R_f=\{y: y\in R, y\neq 0\}, y\in(0,\infty)$$

R_f ، D_f ↓ ∴ (6) جـ

$$f(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\therefore D_f=R\setminus\{2\}$$

$$f(x)=\frac{x+3}{x-2} \Rightarrow y=\frac{x+3}{x-2} \Rightarrow y(x-2)=x+3$$

$$\Rightarrow xy-2y=x+3 \Rightarrow xy-x=2y+3 \Rightarrow x(y-1)=2y+3$$

$$\Rightarrow x=\frac{2y+3}{y-1}$$

$$R_f=R\setminus\{1\}$$

أنواع الدوال :-

١- الدالة الثابتة :- وتعرف $y = f(x) = k$ حيث k ثابت

$D_f = k$, $R_f = k$ (Constant Function)

٢- دالة متعددة الحدود :- هي الدالة التي تكون بالصورة

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ (polynomail Function)

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابت ، n عدد صحيح موجب

عندما $n=1$ عندئذ تكون بالصورة

$f(x) = a_0 x + a_1$ ← (linear function) وتسمى دالة خطية

عندما $n=2$ عندئذ تكون بالصورة

$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ ← (Quadratic Function) وتسمى دالة تربيعية

٣- الدالة النسبية :- وهي دالة يمكن التعبير عنها بالشكل التالي.

(Rational function)

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ ، $b_0, b_1, \dots, b_m$ ثوابت

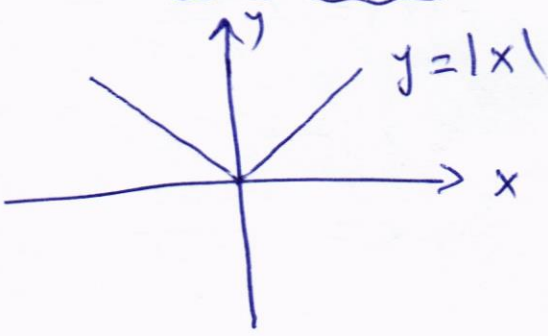
، m, n أعداد صحيحة موجبة والقاء لا يساوي صفر

أمثلة $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $x \neq 1$ ، $f(x) = \frac{3}{x^2+3}$

٤- دالة القيمة المطلقة :- وتعرف بـ (Absolute Function)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$D_f = R$, $R_f = [0, \infty)$

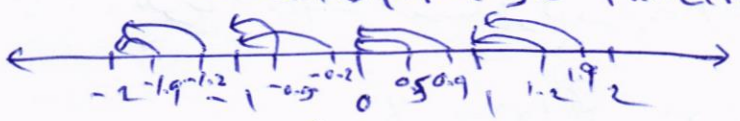


x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

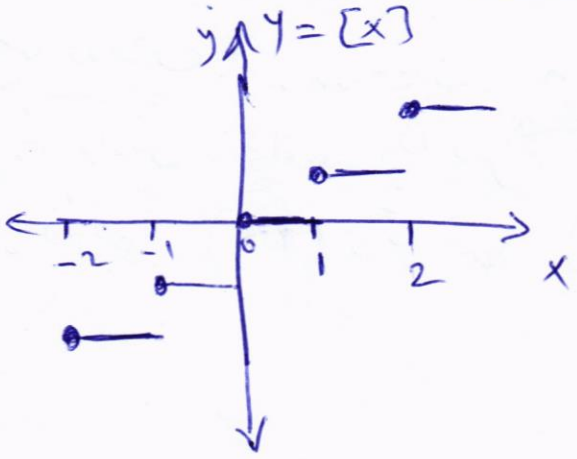
٥- دالة العدد الصحيح الأعظم :- ويرمز لها بالرمز $y=[x]$

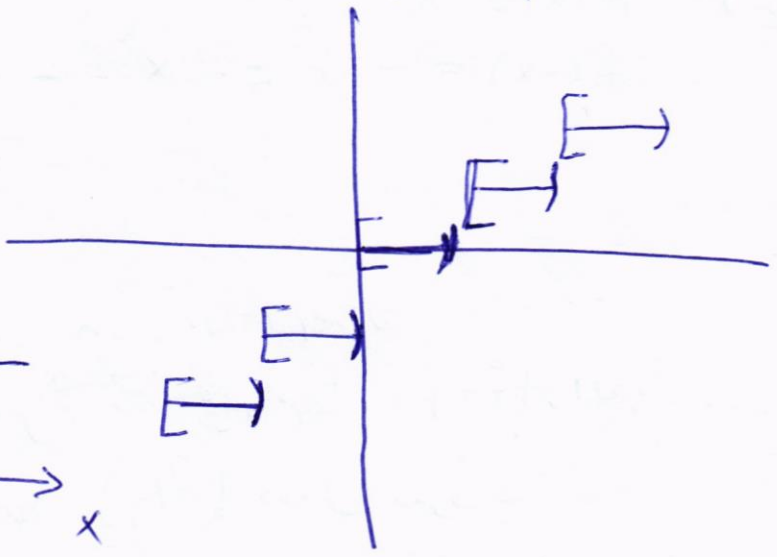
Greatest integer Function

$D_f = R, \quad R_f = Z$



x	$y=[x]$
-2	-2
-1.9	-2
-1.5	-2
-1.2	-2
-1	-1
-0.5	-1
-0.2	-1
0	0
0.2	0
0.5	0
1	1
1.2	1
1.5	1
1.9	1
2	2

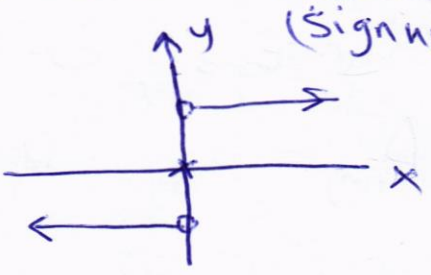




٦- دالة الإشارة :- وتعرف بـ

(Signum Function)

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$



$D_f = R, \quad R_f = \{-1, 0, 1\}$

(Even Function)

٧- الدالة الزوجية :- يقال للدالة $f(x)$ بأنها دالة زوجية إذا حققت الشرط الآتي :- $f(-x)=f(x)$ وتكون متناظرة حول y

Ex: $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^4+1}=\frac{x^2}{x^4+1}=f(x)$$

إذن الدالة زوجية

٨- الدالة الفردية: يقال للدالة $f(x)$ بأنها دالة فردية إذا تحققت الشرط $f(-x) = -f(x)$ لكل x في مجال الدالة ويكون منحناها متناظر بالنسبة لنقطة الأصل (odd function)

Ex: $f(x) = x^3$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

إذن الدالة فردية

العمليات على الدوال: operations on functions

إذا كانت f, g دالتين مجالهما D_f و D_g فإن مجموعهما $(f+g)$ والفرق بينهما $(f-g)$ وحاصل ضربهما $(f \cdot g)$ وقسمتهما (f/g) دوال تعرف بـ

1- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

ومجال هذه الدوال هو جميع قيم x المشتركة بين D_f و D_g أي أن

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

ومجال f/g هو جميع قيم x المشتركة بين D_f و D_g عدا القيم التي تجعل g تساوي صفر، أي أن

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\}$$

مثال: إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ فأوجد $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ ، f/g ثم حدد مجال كل حالة

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x^2}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x^2}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x^2}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \sqrt{x+1} \,/\, \sqrt{4-x^2}$$

$f(x) = \sqrt{x+1}$

$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$D_f = \{x : x \geq -1\}$ or $[-1, \infty)$

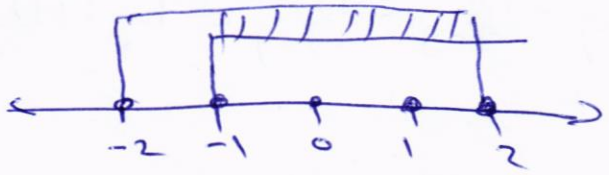
$g(x) = \sqrt{4-x^2}$

$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$D_g = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$ or $[-2, 2]$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

$= [-1, 2]$



$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\}$

$D_{f/g} = [-1, 2] - \{-2, 2\}$

$D_{f/g} = [-1, 2)$

$D_{g/f} = D_g \cap D_f - \{f(x) = 0\}$

$D_{g/f} = [-1, 2] - \{-1\}$

$D_{g/f} = (-1, 2]$

مثال :- اذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$ جد $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ ثم جد مجالات كل من f/g , g/f

1- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

2- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$

3- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{x(1-x)}$

4- $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

5- $(g/f)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

$f(x) = \sqrt{x}$

$x \geq 0$

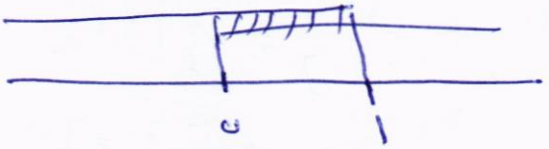
$D_f = \{x : x \geq 0\}$ or $[0, \infty)$

$g(x) = \sqrt{1-x}$

$1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

$D_g = \{x : x \leq 1\}$ or $(-\infty, 1]$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = [0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1]$



$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\}$

$= [0, 1] - \{1\} = [0, 1)$

$D_{g/f} = D_f \cap D_g - \{f(x) = 0\}$

$= [0, 1] - \{0\} = (0, 1]$

تركيب الدوال

الدالة المركبة تعرف بـ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

مثال: اذا كانت $f(x) = x$ ، $g(x) = \sqrt{x+1}$ جد $f \circ f$ ، $f \circ g$ ، $g \circ f$ ، $g \circ g$ وحدد منطلق كل حالة

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$ ، $D_{f \circ f} = R$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \sqrt{x+1}$ ، $D_{f \circ g} = [-1, \infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = \sqrt{x+1}$ ، $D_{g \circ f} = [-1, \infty)$

$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \sqrt{\sqrt{x+1} + 1} \geq 0$

$D_{g \circ g} = [-1, \infty)$

واجب/ اذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = 3x - 7$ جد $(g \circ f)(x)$ ، $(f \circ g)(x)$

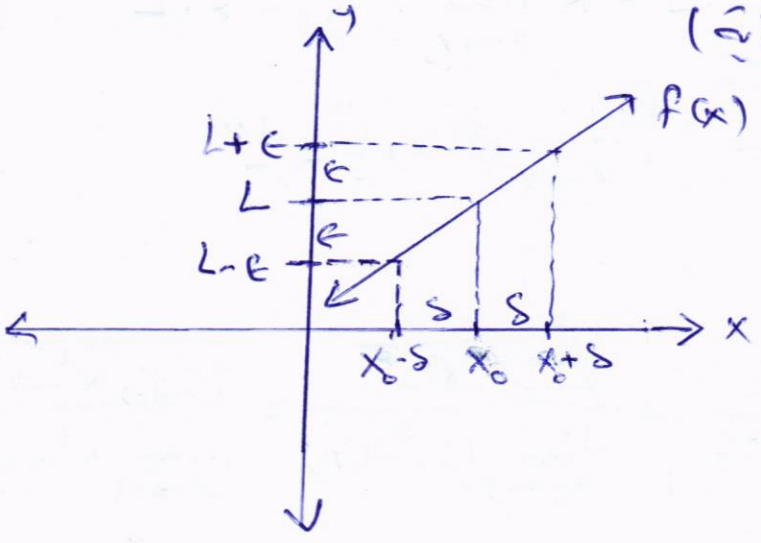
الغايات والاستمرارية :- Limits and Continuity

الغاية :- تعرف الغاية تعريفاً رياضياً بالشكل $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

حيث $f(x)$ دالة معرفة في جوار النقطة x_0 و x بشرط ان تكون معرفة عند x_0 وكذلك ان $f(x)$ يجب ان تقترب من L عندما تقترب x من x_0 من كل الاتجاهين

هذا يعني انه اذا كان ϵ عدد موجب (أيا من الصغر) فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $|f(x) - L| < \epsilon$ عندما $|x - x_0| < \delta$

(اي انه لكل $\epsilon > 0$ اذا اعطينا اي عدد وقابل مثل δ يقصد في قيمته على ϵ تكون قد اثبتنا وجود النهاية)



مثال :- برهن ان $\lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2$

$f(x) = 3x - 1, \; L = 2, \; x_0 = 1$

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |3x - 1 - 2| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |3x - 3| < \epsilon$$

$$\Rightarrow 3|x - 1| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$$

نختار $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

$$\therefore \lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2$$

خواص النهايات :

إذا كان كلاً من $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ ، $\lim_{x\to x_0} g(x)=M$ موجودة فإن

① $\lim_{x\to x_0}[f(x)\mp g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \mp \lim_{x\to x_0} g(x) = L \mp M$

② $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L\cdot M$

③ $\lim_{x\to x_0}[f(x)/g(x)] = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ ، $g(x_0)\neq 0$

④ $\lim_{x\to x_0}[k\,f(x)] = k\lim_{x\to x_0} f(x) = k\cdot L$ ، k ثابت

⑤ $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n = L^n$

أمثلة

Examples :-

① $$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-2}}{3x^3-17} = \frac{\lim_{x\to -3}\sqrt{x^2-2}}{\lim_{x\to -3}(3x^3-17)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to -3}x^2-2}}{3\lim_{x\to -3}x^3-\lim_{x\to -3}17}$$

$$= \frac{\sqrt{9-2}}{3(-27)-17} = \frac{\sqrt{7}}{-81-17} = \frac{\sqrt{7}}{-98}$$

② $$\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10} = (-2)^{10}$$

③ $$\lim_{x\to 2}(4x^2+5x+7) = \lim_{x\to 2}4x^2+\lim_{x\to 2}5x+\lim_{x\to 2}7$$

$$= 4\lim_{x\to 2}x^2+5\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}7 = 4(4)+5(2)+7 = 33$$

④ $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8$$

⑤ $f(x) = [x]$، عندما $x \to 3$، $x \to 3.5$

$\lim_{x \to 3^+} [x] = [3.1] = 3$ } النهاية من اليمين

$\lim_{x \to 3^-} [x] = [2.9] = 2$ } النهاية من اليسار

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

$$\lim_{x \to 3^+} [x] \neq \lim_{x \to 3^-} [x]$$

∴ لا توجد نهاية

$\lim_{x \to 3.5^+} [x] = [3.6] = 3$ } النهاية من اليمين

$\lim_{x \to 3.5^-} [x] = [3.4] = 3$ } النهاية من اليسار

النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

$$\lim_{x \to 3.5^+} [x] = \lim_{x \to 3.5^-} [x] = 3$$

النهاية موجودة وقيمتها تساوي 3

⑥ $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ ، $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ ، $\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

∴ لا توجد نهاية للدالة

⑦ $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ جد $\lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$

النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

∴ ليس للدالة نهاية

⑧ $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\neq 1\\ 5 & x=1\end{cases}$ ، $\lim_{x\to 1} f(x)$ أوجد

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$$

النهايات في اللانهاية :-

تعريف :- لتكن $F:D\to R$ دالة نسبية بحيث أن D تحوي على فترة مفتوحة (a,∞) وأن

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m}$$

حيث $a_0\neq 0$ ، $b_0\neq 0$ وأن m,n عددان صحيحان موجبان عندئذ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases}0 & n<m \quad \text{إذا كان}\\ \frac{a_0}{b_0} & n=m \quad \text{إذا كان}\\ \pm\infty \text{ (غير موجودة)} & n>m \quad \text{إذا كان}\end{cases}$$

مثال :- احسب كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^2+2}{7x^5+6x^3-3x+1}$ بالقسمة على أكبر أس لـ x

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^5}-5\frac{x^2}{x^5}+\frac{2}{x^5}}{\frac{7x^5}{x^5}+6\frac{x^3}{x^5}-\frac{3x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^5}}{7+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^5}}{\lim_{x\to\infty}7+\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^4}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}=\frac{0-0+0}{7+0-0+0}=\frac{0}{7}=0$$

② $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3x-2}{2x^2+4}=\frac{7}{2}$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}=\infty$

ملاحظات :-

١- اذا كانت درجة البسط اقل من درجة المقام فان الغاية تساوي صفر .

٢- اذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فان الغاية تساوي معامل اكبر قوة لـ x في البسط على معامل اكبر قوة لـ x في المقام .

٣- اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام فان الغاية تساوي ∞ (غير موجودة)

الكميات الغير المعينة :-

الكميات الغير المعينة هي الكميات الغير مسموح بها لانها لا تؤدي الى قيمة معينة وهي ($\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ و $\infty + \infty$ و $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$ وغيرها)

مثال :- جد $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+3x} - x)$

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+3x} - x) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+3x} - x) * \frac{(\sqrt{x^2+3x} + x)}{(\sqrt{x^2+3x} + x)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x+x\sqrt{x^2+3x} - x\sqrt{x^2+3x} - x^2}{\sqrt{x^2+3x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} + \frac{x}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1}$$

$$= \frac{3}{2}$$

واجب $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = 1 \cdot 0 = 0$$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$ H.w

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ H.w

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(8) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

let $\frac{\pi}{2} - x = \theta \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \theta$

As $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta \to 0$ $\left[\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b\right]$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{0 + \sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(9) $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$ H.w

(10) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$ H.w

الدوال المثلثية Trigenometric Function

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\csc\theta$
جا ، جتا ، ظا ، ظتا ، قا ، قتا

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\cos b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

مبرهنة :- اذا كان θ عدداً حقيقياً فان

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Examples :-

① $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2\times 1 = 2$$

② $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

③ $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$$

④ $$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

الاستمرارية: يقال للدالة f بأنها مستمرة عند النقطة c اذا تحققت الشروط التالية.

① $f(c)$ موجودة

② $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة

③ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

مثال: هل ان الدالة $f(x)=x^2+1$ مستمرة عند النقطة $x=2$.

$f(x) = x^2+1$

① $f(2) = 5$

② $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 5$

③ $\because f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow$ الدالة مستمرة

مثال: هل ان الدالة التالية مستمرة عند النقطة 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

① $f(1) = 2$

② $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1$

③ $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1) \Rightarrow$ الدالة غير مستمرة

مثال: ابحث استمرارية الدالة $f(x)=[x+2]$ عندما $x \to 0.5$.

① $f(0.5) = [0.5+2] = [2.5] = 2$

② $\lim_{x\to 0.5^+} [x+2] = [0.6+2] = [2.6] = 2$

$\lim_{x\to 0.5^-} [x+2] = [0.4+2] = [2.4] = 2$

∴ الدالة نهاية.

③ $f(0.5) = \lim_{x\to 0.5} [x+2] \Rightarrow$ الدالة مستمرة

مثال:- لتكن

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 8 & x=3\end{cases}$$

هل الدالة مستمرة عند $x=3$ ؟

① $f(3)=8$

② $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=6$

③ $\lim_{x\to 3} f(x)\neq f(3)$

∴ الدالة غير مستمرة.

مثال:- هل ان الدالة التالية مستمرة ام لا عند $x=2$

$$f(x)=\frac{4-x^2}{2-x}$$

H.W

مثال:- ابحث استمرارية الدالة $f(x)=[x+1]$ عندما $x=10$ ؟

H.W

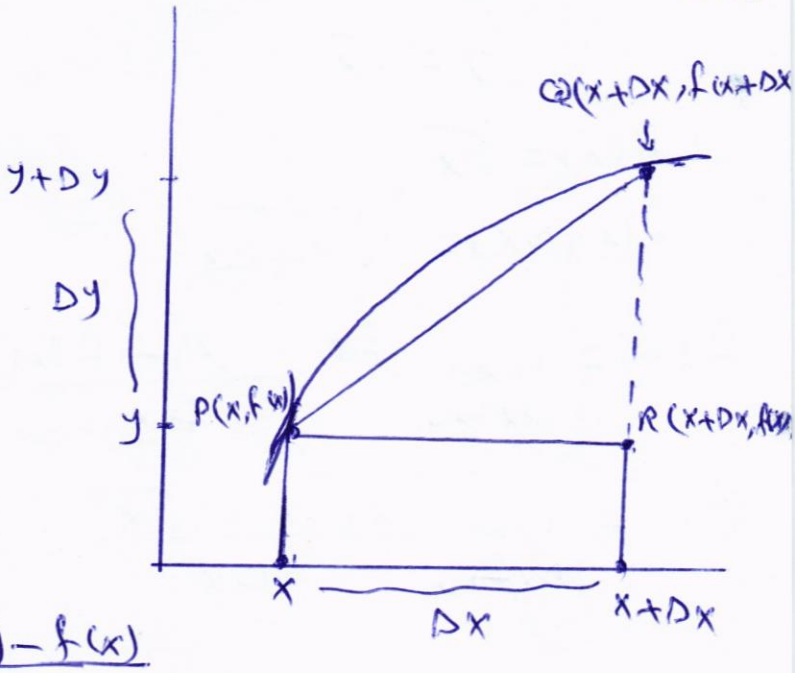
المشتقة :-

$y = f(x)$

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - y$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ميل القاطع

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ميل المماس

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال :- جد المشتقة للدالة $f(x) = 3x + 5$ باستخدام التعريف.

$f(x) = 3x + 5$

$f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x) + 5$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) + 5 - (3x+5)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - 3x - 5}{\Delta x}$$

$f'(x) = 3$

مثال :- جد مشتقة الدالة التالية ثم جد ميل المستقيم عند النقطة $P(4,2)$

$$y = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

عندما $P(4,2) \in$

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

الميل = المشتقة

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Rightarrow y_2 - 2 = \frac{1}{4}(x_2 - 4)$$

مثال :- جد معادلة المماس للدالة $f(x) = x^2 + 3$ عند النقطة $(1,4)$.

جد معادلة المستقيم والمماس للدالة

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 3$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 3 - (x^2+3)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - x^2 - 3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$f'(x) = 2x$, $(1, 4)$

$f'(1) = 2 = m$

معادلة المماس $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

$y_2 - 4 = 2(x_2 - 1)$

$$\boxed{y_2 = 2x_2 + 2}$$ معادلة المماس

ملاحظة :- ميل العمود هو المقلوب السالب لميل المماس ومعادلة ميل العمود هي

$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{m}(x_2 - x_1)$$

ميل المماس $= 2 \Rightarrow$ ميل العمود $m = -\frac{1}{2}$

$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{m}(x_2 - x_1)$$

$$y_2 - 4 = -\frac{1}{2}(x_2 - 1)$$

$$\boxed{2y_2 + x_2 = 9}$$ معادلة العمود

صيغ مشتقات الدوال الجبرية :-

① $\frac{d}{dx} k = 0$, k ثابت

② $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$, $n > 0$

③ $\frac{d}{dx} k f(x) = k \frac{d}{dx} f(x)$

④ $\frac{d}{dx} (f \mp g) = \frac{d}{dx} f \mp \frac{d}{dx} g$

⑤ $\frac{d}{dx} (f \cdot g) = f \frac{d}{dx} g + g \cdot \frac{d}{dx} f$

⑥ $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

⑦ $\frac{d}{dx} (u)^n = n u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$, u = اي دالة

أمثلة :- Examples:-

① $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4$

$y' = 0 + 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3$

$y' = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3$

② $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$

$y' = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} + 6 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2}$

$y' = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2}$

③ $y = \sqrt[3]{3x^2}$

$y = (3x^2)^{1/3}$

$y' = \frac{1}{3} (3x^2)^{-2/3} (6x)$

$y' = 2x (3x^2)^{-2/3}$

④ $y = \frac{3-2x}{3+2x}$

$y' = \frac{(3+2x)(-2)-(3-2x)\cdot(2)}{(3+2x)^2} = \frac{-6-4x-6+4x}{(3+2x)^2}$

$y' = \frac{-12}{(3+2x)^2}$

⑤ $y = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

$y' = (x^2+4)^2 \cdot 3(2x^3-1)^2 \cdot (6x^2) + (2x^3-1)^3 \cdot 2(x^2+4)\cdot(2x)$

$y' = 18x^2(x^2+4)^2(2x^3-1)^2 + 4x(2x^3-1)^3(x^2+4)$

⑥ $y = \frac{-1}{\sqrt{5x}}$

$y = \frac{-1}{(5x)^{1/2}} = -1\cdot(5x)^{-1/2}$

$y' = (-1)\cdot -\frac{1}{2}(5x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 5 = \frac{5}{2}(5x)^{-3/2}$

المشتقات ذوات الرتب العليا :-

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق فان f' تكون المشتقة الاولى لها و f'' المشتقة الثانية لها وهكذا ويرمز للاشتقاق بالرموز الاتية :-

- $f, f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$
- $y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$
- $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$
- $f, D_x f, D_x^2 f, D_x^3 f, \dots, D_x^n f$

مثال :- جد $\frac{d^5y}{dx^5}$ للدالة $y = 8x^3 - 15x^2 + 16$

$$\frac{dy}{dx} = 24x^2 - 30x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 48x - 30$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 48 \quad , \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 0 = \frac{d^5y}{dx^5}$$

مثال :- جد y''' للدالة $y = 3x^7$

$$y' = 21x^6$$
$$y'' = 126x^5$$
$$y''' = 630x^4$$

—

الاشتقاق الضمني :-

قد تصادفنا علاقات ومعادلات متضمنة متغيرين أو أكثر فنسمي هذه العلاقات بالعلاقات الضمنية ولإيجاد المشتقة للدالة الضمنية نشتق باعتبار المتغير x متغير اعتيادي ، والمتغير y يكون الاشتقاق له مرفقه بـ y' ثم نجمع حدود y' في طرف والحدود الأخرى في الجهة الأخرى ثم نستخرج y' كعامل مشترك ونقسمها على معامل y'

مثال :- جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $x^2 + y^2 = 10$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

مثال:- جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة الضمنية التالية

$$x^3+4y^3-xy^2+7x=10$$

$$3x^2+12y^2y'-[x\cdot 2yy'+y^2\cdot 1]+7=0$$

$$3x^2+12y^2y'-2xyy'-y^2+7=0$$

$$12y^2y'-2xyy'=y^2-3x^2-7$$

$$y'(12y^2-2xy)=y^2-3x^2-7$$

$$\boxed{y'=\frac{y^2-3x^2-7}{12y^2-2xy}}$$

مثال:- جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة

$$x^3+xy^2-x^2y+y^3=0$$

$$3x^2+2xyy'+y^2-x^2y'-2xy+3y^2y'=0$$

$$2xyy'-x^2y'+3y^2y'=2xy-3x^2-y^2$$

$$y'(2xy-x^2+3y^2)=2xy-3x^2-y^2$$

$$\boxed{y'=\frac{2xy-3x^2-y^2}{2xy-x^2+3y}}$$

مثال:- جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة

1- $2y+\sqrt{xy}=3x^2$

H.W

مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسلة)

مبرهنة: لتكن $y=f(u)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى u ولتكن $u=g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فان الدالة المركبة $y=(f\circ g)(x)$ قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x وان

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

تسمى قاعدة السلسلة.

مثال: اذا كانت $y=u^2+5u-1$, $u=x+3$ جد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$y=u^2+5u-1 \quad , \quad u=x+3$$

$$\frac{dy}{du}=2u+5 \quad , \quad \frac{du}{dx}=1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(2u+5)\cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx}=2u+5=2(x+3)+5$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x+11.$$

مثال: اذا كانت $x=2t+3$, $y=t^2-1$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$y = t^2 - 1$, $x = 2t + 3$

$\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = 2t \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = t$, $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{2}}$

. $\frac{dy}{dx}$ ← $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$ عبارة عن

H.W

عكس المشتقة :-

يرمز لعكس المشتقة بالرمز $\int$ او $D_x^{-1}F$ ويسمى الرمز $\int$ بالتكامل.

خواص التكاملات :- (الصيغ الاساسية للتكامل)

① $\int dx = x + c$ ، c هو ثابت التكامل

② $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$ ، $m \neq -1$

③ $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$

④ $\int [f(x) \mp g(x)]\,dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$

⑤ اذا كانت u دالة قابلة للتكامل فان

$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c$ ، $m \neq -1$

⑥ $\int [f(x)]^m f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{m+1}}{m+1} + c$ ، $m \neq -1$

مثال (1) :- جد ناتج التكامل التالي.

$$\int (5x^6 - 2x^4 - 6)\,dx = \int 5x^6 dx - \int 2x^4 dx - \int 6\,dx$$
$$= \frac{5}{7}x^7 - 2\frac{x^5}{5} - 6x + c$$

مثال (2) :- جد ناتج التكامل الاتي

$$\int (x^2+2x-5)^3 (x+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (x^2+2x-5)^3\, 2(x+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x-5)^4}{4} + c$$

مثال (3) :- جد ناتج التكامل التالي.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

مثال (٤) :-

$$\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (x^{1/2} - x^{3/2})dx$$

$$= \int x^{1/2}dx - \int x^{3/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + c$$

مثال (٥) :- جد ناتج التكامل التالي :

$$\int (3x^2+4)^2 dx = \int (3x^2+4)(3x^2+4)dx$$

$$= \int (9x^4 + 12x^2 + 12x^2 + 16)dx$$

$$= \int 9x^4 dx + \int 24x^2 dx + \int 16\,dx$$

$$= \frac{9}{5}x^5 + \frac{24}{3}x^3 + 16x + c = \frac{9}{5}x^5 + 8x^3 + 16x + c$$

مثال (٦) :- جد ناتج التكامل التالي :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx = \int (x^3+2)^{-1/2} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/2} 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(x^3+2)^{1/2}}{1/2} + c = \frac{2}{3}(x^3+2)^{1/2} + c$$

مثال (٧) :- جد ناتج التكامل التالي :

$$\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}}dx$$

$$\int (x^2+6x)^{-1/3}(x+3)dx = \frac{1}{2}\int (x^2+6x)^{-1/3} 2(x+3)dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+6x)^{2/3}}{2/3} + c$$

$$= \frac{3}{4}(x^2+6x)^{2/3} + c$$

مثال (٨) :- جد ناتج التكامل التالي :-

$$\int \frac{(x^3+5x^2-4)}{x^2}\,dx$$

$$= \int (x^3+5x^2-4)\,x^{-2}\,dx = \int (x+5-4x^{-2})\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + c$$

مثال (٩) :- جد ناتج التكامل التالي :-

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}\cdot x\,dx$$

$$= \int (1-x^2)^{1/3}\cdot x\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/3}(-2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{4/3}}{4/3} + c$$

$$= -\frac{3}{8}(1-x^2)^{4/3} + c$$

مثال (١٠) :- جد ناتج التكامل التالي :-

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int (1+x)^2 \cdot x^{-1/2}\,dx$$

$$= \int (1+2x+x^2)\cdot x^{-1/2}\,dx$$

$$= \int x^{-1/2}\,dx + 2\int x^{1/2}\,dx + \int x^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{2x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/2}}{5/2} + c$$

$$= 2x^{1/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + c$$

التكامل المحدود :-

اذا كانت $f(x)$, $g(x)$ والتي مستمرين على الفترة $[a,b]$ فان الخواص الاتية تتحقق :-

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, $a<c<b$

④ $\int_a^b [f(x) \mp g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b g(x)\,dx$

⑤ $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ اذا كانت $f(x) \geq 0$ فان

⑥ $\int_a^b f(x)\,dx < 0$ اذا كانت $f(x) < 0$ فان

⑦ $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

⑧ $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

⑨ $\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$ [المبرهنة الاساسية في التكامل]

مثال (١) :- جد ناتج التكامل التالي

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{(3)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

مثال (٢) :- جد ناتج التكامل التالي :-

$$\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 (1+2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x\,dx = \frac{3}{4}\,\frac{(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}}{1/2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{6}{4}\left[(3)^{\frac{1}{2}} - (1)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{3}{2}\left[\sqrt{3} - 1\right]$$

مثال (٣) :- جد ناتج التكامل التالي :-

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} \left(x^{-2} - x^{-3}\right) dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2}\Big]_{-3}^{-1}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\Big]_{-3}^{-1}$$

$$= \left(\frac{-1}{-1} + \frac{1}{2(-1)^2}\right) - \left(\frac{-1}{-3} + \frac{1}{2(-3)^2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{7}{18}$$

$$= \frac{10}{9}$$

مثال (4) :- اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x<0 \\ 4-2x & x \geq 0 \end{cases}$$

جد ناتج التكامل التالي

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (4-x^2)\,dx + \int_{0}^{2} (4-2x)\,dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[4x - x^2\right]_{0}^{2}$$

$$= 0 - \left(-4 + \frac{1}{3}\right) + (4-0)$$

$$= \frac{23}{3}$$

مثال (5) :- جد ناتج التكامل التالي.

$$\int_{1}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx$$

$$= \int_{1}^{3} (x^3+3x)^{-1/2}(x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{3} (x^3+3x)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3+3x)^{1/2}}{1/2}\right]_{1}^{3} = \frac{2}{3}\left[(x^3+3x)^{1/2}\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(36)^{1/2} - (4)^{1/2}\right] = \frac{2}{3}[6-2]$$

$$= \frac{2}{3}(4) = \frac{8}{3}$$

تطبيقات على التكامل المحدد :-

① ايجاد المساحة بين منحنى الدالة واحد المحاور (X)

لتكن $y=f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فالمساحة المحدودة بمنحنى الدالة والمحور X هي

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

فاذا كانت $f(x)$ اكبر او تساوي الصفر فان المساحة $\int f(x)dx \geq$ الى الصفر وهذا يعني ان المساحة تقع فوق المحور X.

اما اذا كانت $f(x)$ اقل او تساوي الى الصفر فان المساحة $\int f(x)dx \leq$ الى الصفر وهذا يعني ان المساحة تقع تحت المحور X.

وقد يكون منحنى الدالة ضمن الفترة $[a,b]$ جزءاً منه فوق المحور X وجزء اخر تحت المحور X فتكون المساحة

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

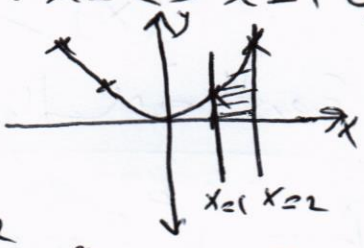
② المساحة بين المنحنى والمحور X (بوجود فترة معطاة).

من الضروري ايجاد نقاط التقاطع بين المنحنى والمحور X وذلك بجعل $f(x)=0$ فاذا كانت نقطة التقاطع تنتمي الى الفترة نجزء التكامل اما اذا كانت النقطة لا تنتمي الى الفترة المعطاة فنلتزم بالفترة المعطاة.

مثال: جد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=x^2$ ومحور السينات (محور x) والمستقيمين $x=1$ و $x=2$.

$f(x)=0 \Rightarrow y=f(x) \Rightarrow y=0$

$x^2=0 \Rightarrow x=0 \notin [1,2]$



x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=\int_1^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=2x-4$ ومحور x في الفترة $[0,3]$

$f(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \in [0,3]$

∴ نجزء التكامل

$$A=\int_0^2 |f(x)|\,dx+\int_2^3 |f(x)|\,dx$$

$$=\int_0^2 |2x-4|\,dx+\int_2^3 |2x-4|\,dx$$

$$=\left|\left[x^2-4x\right]_0^2\right|+\left|\left[x^2-4x\right]_2^3\right|$$

$$=|(4-8)-(0)|+|(9-12)-(4-8)|$$

$$=|-4|+|1|$$

$$=4+1$$

$$=5$$

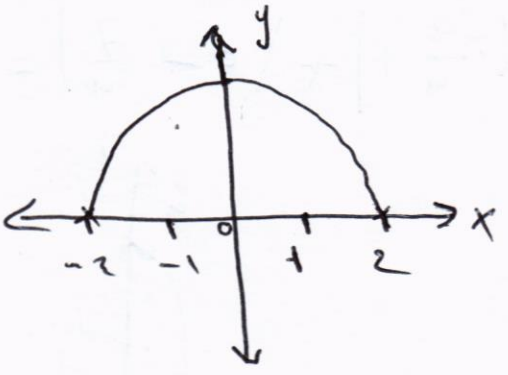
ب- المساحة بين المنحنى والمحور X بدون فترة:

عندما لا يعطى في السؤال فترة قد تقاطع مع المحور X وذلك بجعل $f(x)=0$ فتكون هذه النقاط هي فترة التكامل.

اما في حالة ان يكون عددها اكثر من نقطتين فنأخذ اي فترة التكامل.

مثال:- جد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=4-x^2$ والمحور X.

$4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$



x	$y=4-x^2$
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0

$\therefore A=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

$A=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx$

$A=4x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}$

$A=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}$

مثال:- جد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y=x^3-3x^2-x+3$ والمحور X حيث $x=2$ والمستقيم $[-1,2]$.

$x^3-3x^2-x+3=0$

$(x^3-3x^2)-(x-3)=0 \Rightarrow x^2(x-3)-(x-3)=0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2-1)=0$

$(x-3)(x-1)(x+1)=0$

$\therefore x=3 \notin [-1,2]$

and $+1,-1 \in [-1,2]$

HW

بما ان 1 ينتمي الى الفترة $[-1,2]$

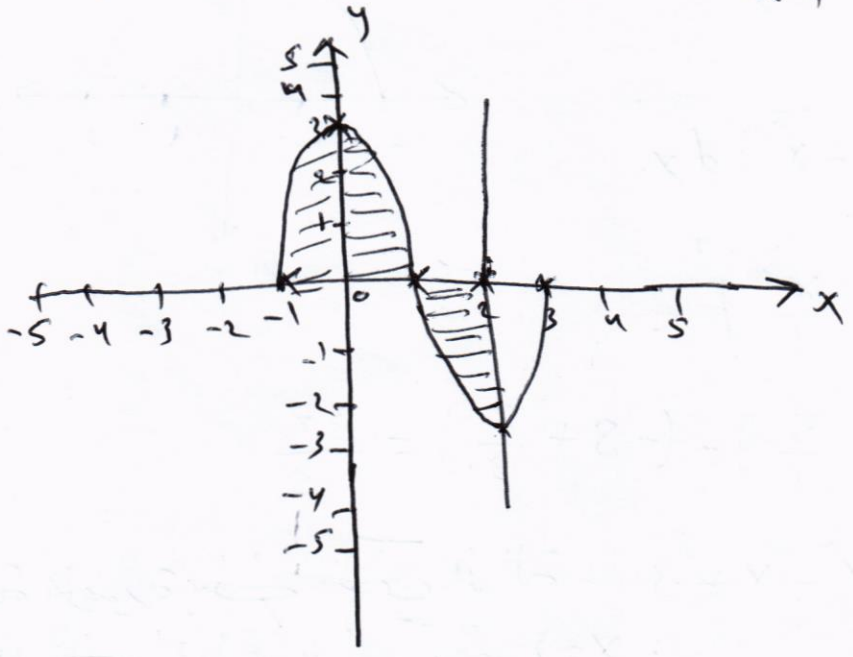
$\therefore$ فترة التكامل

$$A = \int_{-1}^{1} |(x^3 - 3x^2 - x + 3)| dx + \int_{1}^{2} |(x^3 - 3x^2 - x + 3)| dx$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{1}^{2} \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right] - \left[\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3 \right] \right| + \left| \left[\frac{16}{4} - 8 - \frac{4}{2} + 6 \right] - \left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right] \right|$$

$$= \left| \frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4} \right) \right| + \left| 0 - \frac{7}{4} \right| = \left| \frac{16}{4} \right| + \left| \frac{7}{4} \right| = \frac{23}{4}$$



x	y
-3	-48
-2	-15
-1	0
0	3
1	0
2	-3
3	0

---

③ ايجاد المساحة بين منحنى الدالة والمحور (y).

نتبع نفس الطريقة لايجاد المساحة مع المحور x فقط الاختلاف في رسم المنحنى والقيمة اي ان المساحة بين منحنى الدالة والمحور y تعرف بالشكل التالي

$$A = \int_{c}^{d} x \, dy$$

فاذا كان التكامل ≥ 0 فيعني ان التكامل هو يمين المحور y.

اما اذا كان التكامل ≤ 0 فيعني ان التكامل يسار المحور y.

مثال :- جد المساحة المحصورة للقطع المكافئ $X = 8 + 2y - y^2$ والمحور Y والمستقيمات $y = 3$ ، $y = -1$.

$$8 + 2y - y^2 = 0$$
$$(2 + y)(4 - y) = 0$$
$$\Rightarrow y = 4 \quad , \quad y = -2$$
$$4, -2 \notin [-1, 3]$$

∴ لإيجاد التكامل

$$A = \int_c^d x\,dy = \int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\,dy$$

$$A = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} = \left[24 + 9 - 9\right] - \left[-8 + 1 + \frac{1}{3}\right]$$

$$A = \frac{92}{3}$$

مثال :- جد المساحة بين منحني الدالة $X = 2y - y^2$ والمحور Y .

$$2y - y^2 = 0$$
$$y(2 - y) = 0$$
$$\therefore y = 0, \; y = 2$$

$$\therefore A = \int_0^2 (2y - y^2)\,dy$$

$$A = \left[y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$A = \left[4 - \frac{8}{3}\right] - [0]$$

$$A = \frac{4}{3}$$

③ إيجاد المساحة بين المنحنيين :-

(a) لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين مستمرتين في الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت $g(x) \le f(x)$ لكل قيم x في الفترة المعطاة فإن المساحة المحصورة بينهما تعرف بـ

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

(b) لتكن $f(y)$ ، $g(y)$ دالتين مستمرتين في الفترة المغلقة $[c,d]$ وكانت $g(y) \le f(y)$ لكل قيم y في الفترة المعطاة فإن المساحة المحصورة بينهما تعرف بـ

$$A = \int_c^d (x_1 - x_2)\,dy = \int_c^d (f(y) - g(y))\,dy$$

طريقة الحل :-

١- رسم الدالتين

٢- إيجاد نقاط التقاطع بين المنحنيين وذلك بحل $f(x) = g(x)$ فإذا كانت نقطة التقاطع تنتمي للفترة المعطاة كحد التكامل لما إذا كانت نقطة التقاطع لا تنتمي إلى الفترة فحدود التكامل تقريبا نقاط التقاطع.

مثال :- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$y = 6 - x^2$ ، $y = x^2 - 2$

x	$y = x^2 - 2$
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2

x	$y = 6 - x^2$
-2	2
-1	5
0	6
1	5
2	2

$$6 - x^2 = x^2 - 2$$

$$x^2 - 2 + x^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} [(6 - x^2) - (x^2 - 2)]\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} (6 - x^2 - x^2 + 2)\,dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx$$

$$A = 8x - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2} = \left[16 - \frac{16}{3}\right] - \left[-16 + \frac{16}{3}\right]$$

$$A = \frac{64}{3}$$

مثال :- جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ ، $y = 2x$

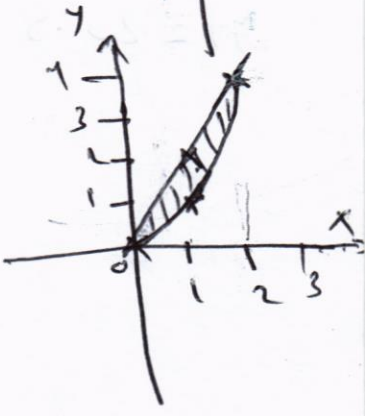
$$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0,\ x = 2$$

x	$y = 2x$
2	4
1	2
0	0

x	$y = x^2$
2	4
1	1
0	0



$$\therefore A = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx$$

$$A = x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \left[4 - \frac{8}{3}\right] - [0]$$

$$A = \frac{4}{3}$$

مثال :- جد المساحة المحصورة بين المنحنيين

$$x = 4 - y^2$$

$$x = -(y + 2)$$

$$4 - y^2 = -(y + 2)$$

$$4 - y^2 = -y - 2 \Rightarrow 4 - y^2 + y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y - 3)(y + 2) = 0$$

$$\therefore y = 3,\ y = -2$$

$$A = \int_c^d (x_1 - x_2)\,dy = \int_{-2}^{3} [(4-y^2)-(-y-2)]\,dy$$

$$A = \int_{-2}^{3} (4-y^2+y+2)\,dy = \int_{-2}^{3} (-y^2+y+6)\,dy$$

$$A = \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 6y\right]_{-2}^{3}$$

$$A = \left[-\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18\right] - \left[\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 12\right]$$

$$A = [13.5] - [-7.3]$$

$$A = 20.8$$

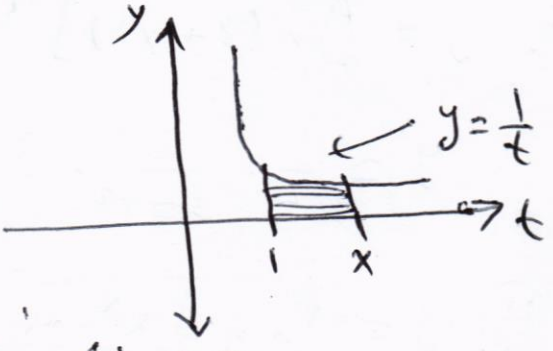
الدوال المتسامية :- (اللاجبرية)

الدالة المتسامية :- كل دالة غير جبرية تسمى دالة متسامية وتضم مجاميع الدوال المثلثية والدوال اللوغاريتمية والدوال الاسية والدوال المثلثية العكسية والدوال الزائدية ودوال أخرى.

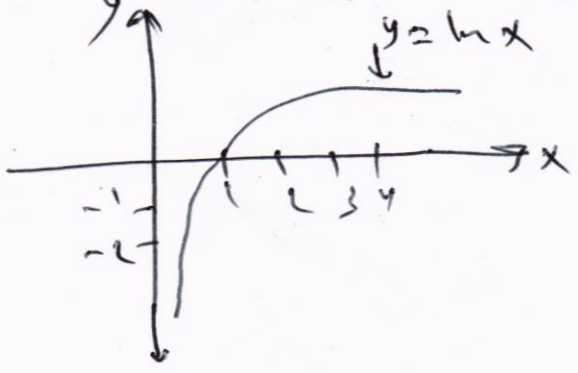
١- دالة اللوغاريتم الطبيعي :-

يعرف اللوغاريتم الطبيعي لـ x والذي يرمز له بالرمز $(\ln x)$ والقيم الموجبة لـ x بالتكامل المحدد الآتي :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \,, \quad \forall\, x > 1 \qquad \text{---} (*)$$



يمثل هذا التكامل المساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور واستناداً الى التعريف في (*) فان $y = \ln x$ هي دالة متعايدة متصاعدة مجالها R^+ ومداها R وان مخططها يكون بالشكل التالي



خواص دالة اللوغاريتم الطبيعي :-

1- $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$

2- $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$

3- $\ln 1 = 0$

4- $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

5- $\ln x^n = n \ln x$

6- $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$ حيث ان u هي دالة في x

7- $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

مثال :- جد مشتقة الدوال التالية

① $y = \ln(x+1)$

$y' = \frac{1}{x+1} \cdot 1 = \frac{1}{x+1}$

② $y = \ln(x^2+2)$

$y' = \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+2}$

③ $y = \sqrt{\ln(3+x^2)}$

$y = [\ln(3+x^2)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(3+x^2)$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+x^2} \cdot 2x = \frac{x}{3+x^2}$

④ $y = \ln \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \ln(x^2-4)^{\frac{1}{2}} - \ln(x-2)^{\frac{2}{3}}$