

Chapter 1 - الفصل الأول

Sequence

المتواليات
تعريف المتواليه $(\mathbb{Z})^+$

2- هي دالة $\mathbb{Z}^+$ من مجموعة العدده المصنوعه
أو العدده المركبه وفق نظام أو ترتيب معين وسنقر هذا
الترتيب حسب ما نراه وعنده يعرف لهذه الداله "F"
فتكون متبعه F في n $\rightarrow F(n)$ n اعداد صحه
والمتواليه هي

$$\{n, F(n): n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

يمكن ان نقول المتاليه a_n هو

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

 a_n هو a_n المتاليه في الموضع (n)

$$Ex: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

* ويمكن ان نغير عن المتواليه بفرس من فر المتواليه حيث

$$a_n = \{n\}_{n=1}^{\infty}$$

مثال: اكتب فر من المتواليه

$$2, 7, 12, 17, \dots$$

Sol:

$$a_n = \{5n - 3\}_{n=1}^{\infty}$$

التحقق

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 5 \times 1 - 3 = 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 5 \times 2 - 3 = 7$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 5 \times 3 - 3 = 12$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = 5 \times 4 - 3 = 17$$

(2)

Ex: (2)

اكتب من المتواليه

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

$$\text{Sol: } a_n = \left\{ \frac{1}{2n-1} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

التحقق

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2 \times 1 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2 \times 2 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2 \times 3 - 1} = \frac{1}{5}$$

Ex (3)

اكتب من المتواليه

$$2, 5, 10, 17, 26, \dots$$

$$\text{Sol: } a_n = \left\{ n^2 + 1 \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

التحقق

$$n=1 \Rightarrow a_1 = \{1^2 + 1\} = 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 4 + 1 = 5$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 9 + 1 = 10$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = (5)^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

Ex: (4)

اكتب من المتواليه

$$0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, -\frac{4}{25}, \dots$$

$$\text{Sol: } a_n = \left\{ \frac{1-n}{n^2} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

النقطة $n=1 \Rightarrow a_1 = \left\{ \frac{1-1}{1^2} \right\} = 0$

صفر = صفر

$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$

$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$

$n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{1-4}{4^2} = -\frac{3}{16}$

Ex 5:

اكتب من المتواليات

$-\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}$
 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Sol: $a_n = \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n+2} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$

$n=1 \Rightarrow a_1 = (-1)^1 \frac{1+1}{1+2} = -\frac{2}{3}$ النقطة

$n=2 \Rightarrow a_2 = (-1)^2 \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$

$n=3 \Rightarrow a_3 = (-1)^3 \frac{3+1}{3+2} = -\frac{4}{5}$

H.w

اكتب من المتواليات

2, -4, 6, -8, 10 (1)

2, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{9}$ (2)

(4)

④ اوجد حدود المتوالية إذا كان

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = -1$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Sol:

اعوض في عن المعاد

$$n=1$$

$$a_{1+2} = a_3 = \frac{a_{1+1}}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{2}$$

$$n=2$$

$$\Rightarrow a_{2+2} = a_4 = \frac{a_{2+1}}{a_2} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{-1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$$

$$n=3$$

$$\Rightarrow a_{3+2} = a_5 = \frac{a_{3+1}}{a_3} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = -1$$

$$n=4$$

$$\Rightarrow a_{4+2} = a_6 = \frac{a_{4+1}}{a_4} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

حدود المتوالية هي

$$2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -2$$

اوجد حدود المتوالية إذا كان

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$$

(H.O)

①

حلل استلوه الواجب للمنهج الدراسي
① اكتب من المتواليه

2, -4, 6, -8, 10, ---

من المتواليه

Sol: $a_n = \left\{ (-1)^{n+1} \cdot 2n \right\}_{n=1}^{n=\infty}$

التحقق :

$n=1 \Rightarrow a_1 = (-1)^{1+1} \cdot 2 \times 1 = 2$

$n=2 \Rightarrow a_2 = (-1)^{2+1} \cdot 2 \times 2 = -4$

$n=3 \Rightarrow a_3 = (-1)^{3+1} \cdot 2 \times 3 = 6$

$n=4 \Rightarrow a_4 = (-1)^{4+1} \cdot 2 \times 4 = -8$

$n=5 \Rightarrow a_5 = (-1)^{5+1} \cdot 2 \times 5 = 10$

اذن الرمز يحقق حدود المتواليه

② اكتب من المتواليه

2, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{9}$, ---

Sol: $a_n = \left\{ \frac{n+1}{2n-1} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$ من المتواليه

التحقق

$n=1 \Rightarrow a_1 = \left\{ \frac{1+1}{2 \times 1 - 1} \right\} = 2$

$n=4 \Rightarrow a_4 = \left\{ \frac{4+1}{2 \times 4 - 1} \right\} = \frac{5}{7}$

$n=2 \Rightarrow a_2 = \left\{ \frac{2+1}{2 \times 2 - 1} \right\} = \frac{3}{3}$

$n=5 \Rightarrow a_5 = \left\{ \frac{5+1}{2 \times 5 - 1} \right\} = \frac{6}{9}$

$n=3 \Rightarrow a_3 = \left\{ \frac{3+1}{2 \times 3 - 1} \right\} = \frac{4}{5}$

(2)

(3) اوجد حدود المتواليه اذا كان

$$a_1 = 1$$

ورمز المتواليه

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Sol: } n=1 \Rightarrow a_{1+1} = a_2 = a_1 + \frac{1}{2^1} \Rightarrow$$

$$\therefore a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$n=2 \Rightarrow a_{2+1} = a_3 = a_2 + \frac{1}{2^2} \Rightarrow a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_3 = \frac{6+1}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

$$n=3 \Rightarrow a_{3+1} = a_4 = a_3 + \frac{1}{2^3} \Rightarrow a_4 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\therefore a_4 = \frac{14+1}{8} = \boxed{\frac{15}{8}}$$

$$n=4 \Rightarrow a_{4+1} = a_5 = a_4 + \frac{1}{2^4} \Rightarrow a_5 = \frac{15}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\therefore a_5 = \frac{30+1}{16} = \boxed{\frac{31}{16}}$$

$\therefore$ حدود المتواليه هي

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots$$

①

القانون للمتواليف

يقال العدد (L) هو غايه المتواليف التي حدوده $a_1, a_2, a_3, \dots$ واذا كانت (L) عدد صحيح موجب في N حيث ان N هو اعداد طبيعيه ستمثل صفر والعدد الموجب الى N حيث N عدد موجب موجب في N فان

$$|a_n - L| < \epsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

وان $|a_n - L|$ يصغر كلما زادت قيمه n .
وهذا يعني ان ازيد ارقامه n فكل قيمه a_n تتراكم حول عدد ثابت (L) .
وهذا يعني ان المتواليف مقاربه اذا كانت قيمه L مقبولة.
واذا كان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq L$$

فالمتواليف متباينه

حيث ان a_n اذا كانت u_n متواليف وكان K عدد ثابت

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} K a_n = K \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \neq L$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L, \neq L$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{u_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

②

Ex ① : $\left\{ \sqrt[n]{3^{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ أوجد عليه المتوالية
ثم بين تقاربها أو تباعدها

Sol:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{n+1})^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \cdot 3^{1/n} \right) = 3 + \frac{1}{\infty} = 3 = L \text{ متقارب} \end{aligned}$$

Ex ② : $\left\{ \frac{n^2 - 2n + 1}{n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Sol: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)$ بالقسمة على أعلى
كل شيء على n^2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} &= \frac{\left(1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty} \right)}{\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} \right)} \\ &= \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0} = \frac{\infty}{0} \end{aligned}$$

$$= \frac{\infty}{0} \neq L$$

المتوالية متباعدة

$$\boxed{\infty = \frac{\text{عدد}}{0} \text{ وكذلك } 0 = \frac{\text{عدد}}{\infty}}$$

Ex ③ : أوجد عليه المتوالية ثم بين تقاربها أو تباعدها

$$a_n = \frac{2n-1}{n} \quad \left\{ \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\text{Sol: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = \frac{2n}{n} = 2$$

طريقة ثانية:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n}{n} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1} = \frac{2 - 0}{1} = 2$$

Conv.

Ex ④ $\left\{ \frac{\ln(n)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

مقاييه: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

طريقة أخرى: عند إيجاد النهاية للتواليف، إذا كانت كسرية (أي صيغة مقيدة/محدودة) / مقيدة/محدودة نلاحظ ما يلي: إذا كان في المقام أو البسط ∞ أو 0 أو مقام فارغ، المقام يكون عدد {والمثل المقام ∞ }

Ex: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ مقاييه = $\frac{1}{2} \Rightarrow$ لأن المقام ∞ ما في المقام

إذا كانت المقام ∞ أو المقام أكبر من المقام ∞ المقام فتابع النهاية يكون ∞

Ex: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3n^2+9}{n+4} \right\}_{n=1}^{\infty}$ الجواب غير موجود لأن المقام أكبر من المقام

أو ⑤: أكل المقام على أعلى أس فيكون نفس النتيجة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{3n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}} \right)$$

$$= \frac{3 + \frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{3}{0} = \infty \text{ (div)}$$

أو ⑥: استخدام طريقة أوسيتال لأن الدالة كسرية

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2}{n + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{1} \quad \text{استخدام اوسيتال}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{0} = \infty \quad \text{اشق حركه ثانية (div)}$$

+ استخدام اوسيتال يكون بأن نشق الـ n في اوجده ونشتق المقام لو جده بالـ n

(3) اذا كانت ∞ او 0 في اقل من ∞ او 0 المقام يكون جوابه ∞ (صفر)

$$\text{Ex: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)}{2n^2}$$

الحول ① الطريقة المباشرة يكون صفر، لذلك نشتق الـ n في اقل من ∞ او 0 المقام
 ② أرى استخدام طريقة المتكافؤ على n

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{2n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{3n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 (2n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2n} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{\frac{3}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4n} \quad \text{استخدام اوسيتال}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{4} = 0 \quad \text{اشق حركه ثانية فتبع (Conv.)}$$

ملخصه :- هناك عدة طرق لحل الدوال غير المعروفة
إذا كانت دالتين $\frac{P(x)}{Q(x)}$ متشابهتين في x وكثير القيم

فانها متماثلتين لاشتقاقات لكل منهما في قيم x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

* أي ان الـ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ والـ $\frac{P'(x)}{Q'(x)}$ متماثلين
والمقام يغنيها والـ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ فتنشأ تنقري

أوجد الغالب بين تقاريري أو تباعدها

Ex : $n e^{-n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-n} = \infty \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Conv.

ستجد اوسيتال في الحالات التالية

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$	$\infty + \infty$, $\infty - \infty$	$\infty \cdot 0$, $0 \cdot \infty$, 1^∞
ممكن غير معروف	ممكن غير معروف	ممكن غير معروف

ملخص حالات مهمة :-

- ① $\frac{\infty}{\infty} = 0$
- ② $e^\infty = \infty$
- ③ $e^{-\infty} = 0$
- ④ $\ln 1 = 0$
- ⑤ $\ln \infty = \infty$
- ⑥ $\frac{\text{مفرد}}{\infty} = 0$
- ⑦ $\frac{\infty}{\text{مفرد}} = \infty$
- ⑧ $\infty \times \text{عدد} = \infty$
- ⑨ $\infty + \text{عدد} = \infty$
- ⑩ $(\text{عدد})^\infty = \infty$

Ex:

$$\left(\frac{2n-3}{3n+7} \right)^4$$

جوابه التالي لم يتغير
فوتابعها

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{3n+7} \right)^4$$

طريقة مباشرة بها اننا نأخذ
مباشره من المقام فالتالي

$$= \left(\frac{2}{3} \right)^4 = \frac{16}{81}$$

Con.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n} - \frac{3}{n} \right)^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \frac{3}{n}}{3 + \frac{7}{n}} \right)^4 = \left(\frac{2}{3} \right)^4 = \frac{16}{81}$$

Conv.

81

Ex: $\sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ اوجد التالي للتالي

Sol: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

المخرج والعشمة كلها المرافق

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sqrt{n+1} - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{-1}{\infty + \infty} = 0$$

Conv.

7

H.c

أرجو الفانيه للوالديات تم بين تقاريج
أو جافرها

$$a_n = \left\{ \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-1} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

$$2) a_n = \left\{ \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

$$3) a_n = \left\{ n - \sqrt{n^2 - \pi n} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

①

حل أسئلة الواجبات لموضوع الغاية المتوالية

$$a_n = \left\{ \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-1} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

①

Sol:

$$a_n = \left\{ \frac{n(n+2)(n^2-1) - n^3(n+1)}{(n+1)(n^2-1)} \right\}_{n=1}^{n=\infty}$$

$$a_n = \left\{ \frac{(n^2+2n)(n^2-1) - n^4 - n^3}{(n+1)(n^2-1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a_n = \left\{ \frac{n^4 - n^2 + 2n^3 - 2n - n^4 - n^3}{(n+1)(n^2-1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$= \left\{ \frac{n^3 - n^2 - 2n}{(n+1)(n^2-1)} \right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ كـ عـ رـ عـ نـ}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{\frac{n^3}{n^3} - \frac{n^2}{n^3} - \frac{2n}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} - \frac{n}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} - \frac{1}{n^3}} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2})}{(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3})}_{n=1}^{\infty}$$

$$= \frac{(1 - \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty^2})}{(1 - \frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^3})}_{n=1}^{\infty} = \frac{1 - 0 - 0}{1 - 0 + 0 - 0} = L = 1$$

∴ المتوالية متقاربة
Conv.

(2)

$$a_n = \left\{ \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

(5)

$$\text{Sol: } = \frac{\infty}{\infty} = \text{مكافئ}$$

في السؤال نلاحظ ان البسط اكبر من المقام الذي هو $(\frac{1}{2})$. فبالهذه الحالة الجواب لا يمكن ان يكون ∞ .

يمكن حل السؤال بطريقة اخرى

① بالحدس والفتوة على اقل من

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{1}{n} - \frac{3\sqrt{n}}{n} \right)} \right\}$$

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{3}{\sqrt{n}}} \right\} = \left\{ \frac{2 + \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{3}{\sqrt{\infty}}} \right\}$$

$$a_n = \frac{2+0}{0-0} = \frac{2}{0} = \infty \neq L$$

$$\infty = \frac{\infty}{0}$$

$\therefore \text{div}$

طريقة ثانية: بفتح طريقة اوبينال

$$a_n = \left\{ \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2+0}{0-3 \cdot \frac{1}{2}(n)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{n}} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{-3} \right\} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{n}}{-3} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{\infty}}{-3}$$

$$\infty = \infty \times \infty =$$

$$\infty = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \frac{\infty}{-3} = \infty$$

div.

$$a_n = \left\{ n - \sqrt{n^2 - 11n} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (3)$$

بکے مجموعہ = $\infty - \infty$

Sol

الجزء والمستوى من الفرق

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n - \sqrt{n^2 - 11n} \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 - 11n}}{n + \sqrt{n^2 - 11n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n\sqrt{n^2 - 11n} - n\sqrt{n^2 - 11n} - (n^2 - 11n)}{n + \sqrt{n^2 - 11n}}$$

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cancel{- n^2} + 11n}{n + \sqrt{n^2 - 11n}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ n=1 \end{array} \right.$$

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n}{n + \sqrt{n^2 - 11n}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ n=1 \end{array} \right. = \frac{\infty}{\infty} \text{ بکے مجموعہ}$$

لذا استعمال ل'Hôpital

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{1 + \frac{1}{2}(n^2 - 11n)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2n - 11} \quad \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ n=1 \end{array} \right.$$

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{1 + \frac{2n-11}{2\sqrt{n^2-11n}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ n=1 \end{array} \right. = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11}{2\sqrt{n^2-11n} + 2n - 11}$$

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{22\sqrt{n^2-11n}}{2\sqrt{n^2-11n} + 2n - 11} = \frac{\infty}{\infty} \text{ بکے مجموعہ}$$

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{22 \cdot \frac{1}{2}(n^2-11n)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2n-11}{2 \cdot \frac{1}{2}(n^2-11n)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2n-11 + 2} = \frac{11}{2} \therefore \text{Conv.}$$

المسلسلات اللانهائية Infinite Series

هي مجموعة حدود أو أعداد متوالية لانهائية ويمكن القول
أو تمثيلها بـ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

كما يمكن أن تكون أو ابتداء من سلسلة جديدة ويصغف المبرمج

$$S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad \text{و} \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$
 S_n : سمين بالمجموع الجزئي Partial Sum للمسلسلة
الموقع n وسماوي مجموع n في الحدود

مثال: $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$

$$S_1 = \frac{1}{2} \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

* تعريف: لنكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

فإذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ S قبل عدد أو غير

فيقال للمسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

وإذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \neq S$ فيقال للمسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة

(٢)

* ميراث: شرط ضروري لكي تكون المتسلسلة متقاربة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

البرهان: لكي تكون المتسلسلة متقاربة $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

يمكن ان نستخرج اى حد من المتسلسلة وذلك بـ

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad \text{لـ} \quad S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = S_2 + a_3 \Rightarrow a_3 = S_3 - S_2$$

$$a_3 = S_3 - S_2$$

اي ان

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S - S = 0$$

شرط ضروري لكي تكون

المتسلسلة العددية متقاربة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (1)$$

(2) عند احتيا المتسلسلة العددية كونها متقاربة أم

متقاربة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{متقاربة} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \quad \text{متقاربة}$$

ملاحظة: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ هو شرط غير كافي في اجل تقارب

المتسلسلة العددية إذ لـ لتقارب المتسلسلة عددية إذا كانت

حداتها العددية تقترب في الصفر

(3)

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ مثال

اختبر المتسلسلة العددية مقارنة مع متسلسلة

Sol: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) = \frac{1}{2^{\infty-0}} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

هذا شرط غير كافى تماماً الى طريقة المجموع لكي تختبر
متسلسلةها او تقاربها

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{①}$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \quad \text{②}$$

المجموع المعاد لـ $S_n - \frac{1}{2} S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$

$$\frac{1}{2} S_n = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

ملاحظة: وفقاً الى الاول
في المعادله الاولى ①
والى الى المعادله الثانيه ②

$$\therefore S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{\infty}} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\infty} \right) = 2$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

Conv. المتسلسلة مقارنة

Ex ② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1}$

Sol:

Lim an is L

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n})} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\infty}}$$

$$\lim = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ series div.}$$

Ex ③: جبر المجموع للحدود المتنازلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

$$\text{Sol: } S_1 = \frac{3}{10}, S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100}, S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$$

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n} \quad (1)$$

$$\frac{1}{10} S_n = \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots + \frac{3}{10^{n+1}} \quad (2)$$

$$S_n - \frac{1}{10} S_n = \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}} \right)$$

بقى الحد الأول في
المعادلة رقم ①
والحد الأخير في المعادلة
رقم ②

$$\frac{9S_n}{10} = \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}} \right)$$

$$\frac{9S_n}{10} = \frac{3}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

⑤

$$S_n = \frac{3}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^\infty} \right)$$

$$\infty = 10^\infty$$

$$S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{3}$$

Compl. de la série arithmétique

Ex ④ 2

⑥

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{2n+1} \right]$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\therefore S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

∴ المتسلسلة متقاربة لأن مجموعها هو $\frac{1}{2}$

Ex ⑤ من فضلكم إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة أم متباعدة أم متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$$

طريقة: المقام في المتسلسلة المعطاة يسوي صفر في عوامله n و $n+1$ وكذا
على n علينا + تقسيمها إلى كسور أبسطية

$$\text{Sol: } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{(n+1)} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

(7)

~~المعادلة~~

$$\therefore \frac{1}{n(n+1)} = \frac{An + A + Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B \quad \text{①} \quad n=0 \text{ معطيات}$$

$$A = \boxed{1} \quad \text{②}$$

معطيات الزاوية = 1

المعروف في المعادلة ① عن سية A

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \Rightarrow B = \boxed{-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right)$$

$$S_n = 5 \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = 5 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 5 \left(1 - \frac{1}{\infty+1} \right) = 1 - 0 = \boxed{5}$$

المطلوب هو 5

⑧

H.W

اختبر المتسلسلة الزائدية متقاربة
أو متباعدة باستخدام اختبار

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3}$$

$$3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$4 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$⑤ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

المسلسلات الهندسية

Geometric Series

المسلسلة الهندسية - أي المسلسلة الجبرية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad (1)$$

أو الصيغة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (2)$$

أي أن المسلسلة يجب أن تكون ذات قيمة r و $r \neq 0$ أو $r < 1$
 $r = \frac{ar}{a} = r$

كيفية إيجاد المجموع الجزئي الأول لهذه المسلسلة
 نأخذ المعادلة الثانية ونضربها بـ r

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (2)$$

نضربها بـ r

$$+ r S_n = + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n \quad (3)$$

نطرح المعادلة (3) من المعادلة (2)

$$S_n - r S_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$\therefore S = \frac{a(1-r^{\infty})}{1-r} = \frac{a}{1-r} \quad \begin{matrix} r \sim \infty \\ r < 1 \end{matrix}$$

مثال ① اوجد مجموع المتتاليه الهندسيه ~~والحد هي متناهي~~
 ايم متناهي

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$a=1, r=\frac{1}{2} < 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Conv.

Ex ② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2}{6^{n-1}}$

Sol 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{6^{n-1}} \right]$

أخذ الداله الاولى $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ $a=1, r=\frac{1}{2} < 1$

حدود الداله = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$S_1 = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

أخذ الداله الثانيه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{6^{n-1}}$ $a=2, r=\frac{1}{6} < 1$

$$S_2 = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{6}} = \frac{12}{5}$$

$$S_1 - S_2 = 2 - \frac{12}{5} = \frac{10 - 12}{5} = \frac{-2}{5} \quad \text{Conv.}$$

$$\text{Ex (3)}: \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{5^{n+2}}$$

Sol: لن نزيد المقام حتى الصيغة

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1+2}}{5^{n+2+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+4}} \quad \text{الآن}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^4} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad a = \frac{3}{5^4}, \quad r = \frac{3}{5}$$

حدود المتسلسلة: $\frac{3}{5^4} + \frac{3^2}{5^5} + \frac{3^3}{5^6} + \dots$

$$r = \frac{3^2}{5^5} = \frac{3^2}{5^5} \cdot \frac{5^4}{3^4} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} < 1 \quad \therefore S_n = \frac{a}{1-r}$$

$$S_n = \frac{\frac{3}{5^4}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{3}{250}$$

$$\text{المجموع} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{5^{1-n}} \cdot 25$$

أو يمكن إيجاد
المتسلسلة المقلوبة

(3)

Ex: $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$ ~~أوجد مجموع السلسلة~~

Sol: $r = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{9}{1} = \frac{1}{3}$

$r = \frac{\frac{1}{81}}{\frac{1}{27}} = \frac{1}{81} \cdot \frac{27}{1} = \frac{1}{3}$

لذلك السلسلة متناهية

$a = \frac{1}{9}, r = \frac{1}{3} < 1$

$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$ ~~مقاربته~~ Conv.

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

يمكن ان نقول السلسلة هي

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ ~~المصفوفة~~

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$a = \frac{4}{9}, r = -\frac{2}{3}$

$\therefore S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{4}{9}}{1-(-\frac{2}{3})}$

$S = \frac{\frac{4}{9}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{15}$

$= \frac{\frac{4}{9}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{15}$

Hint $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-3^n}{9^n}$

أوجد مجموع السلسلة

اختبار التقارب Test of Convergent

لأجراء اختبار التقارب يجب أن تكون المتسلسلة موجبة وغير صفرية
وأيضا سابقاً أن $a_n \neq 0$ من أجل أن المتسلسلة متباينة

ولذلك إذا كان الاختبار أمراً إذا كان $a_n = 0$ من أجل $n \rightarrow \infty$

هو شرط غير كافٍ كي تكون المتسلسلة متقاربة مثال
على ذلك

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

r غير ثابت

وعلى الرغم من أن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ولكن المتسلسلة غير متقاربة

لذلك يجب اللجوء إلى اختبارات أخرى كي نتأكد من تقارب
وفي هذه الاختبارات ① اختبار النسبة Ratio test
② اختبار التكامل Integral test

① اختبار النسبة Ratio test

لنأخذ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ متسلسلة موجبة غير صفرية
ولنفصل النسبة بين أي حدين يكون

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_n}{a_{n-1}}, \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

أي إذا كان هناك معامل ذو المتسلسلة هو r وإذا كان
التقارب إلى النهاية محدوداً (p) عند النهاية n
منتهية

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

① فإن كانت $p < 1$ متسلسلة متقاربة

② وإذا كانت $p > 1$ متباعدة

③ وإذا كانت $p = 1$ نقفل الاختبار ونلجأ إلى
اختبارات أخرى.

مثال: استخدام اختبار النسبة فيما إذا كانت
المتسلسلة متقاربة أو متباعدة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\{(n+1)! = (n+1)n!\} \text{ معلوم } \text{دقة}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)n} \cdot \frac{n!}{1} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{\infty+1} = 0 < 1 \text{ متقاربة}$$

استخدمنا أقل من واحد في اختبار النسبة
لذلك $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

مثال 2

$$\text{Sol: } a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \right| = 1$$

لذلك النسبة الحسابية هي 1
 أي أن المقام ينمو بنفس
 معدل البسط
 أو أن المقام ينمو أعلى أو أقل من البسط

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2 \left(\frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right|$$

$$\rho = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} \right| = 1$$

في هذه الحالة نقول اختبار النسبة لا يثبت التقارب
 اختبار آخر

نلاحظ أن اختبار التكامل هو خيار آخر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 3^n}$$

مثال:

$$\text{Sol: } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2(n+1)+1)!}{(n+1)!^2 3^{n+1}} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+1)! 3^{n+1}} \cdot \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(n+1)n!(n+1)n!} \cdot \frac{n!n!3^n}{3^n \cdot 3 \cdot (2n+1)!} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n^2 + 4n + 6n + 6}{n^2 + n + n + 1} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left| \frac{4n^2 + 10n + 6}{n^2 + 2n + 1} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left| \frac{n^2 \left(\frac{4n^2}{n^2} + \frac{10}{n} + \frac{6}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)} \right|$$

$$\rho = \frac{1}{3} \left| \frac{4 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} \right| = \frac{4}{3} > 1 \quad \text{div}$$

$$\text{Ex: } \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{3}{n} \right)^n$$

$$a_n = n! \left(\frac{3}{n} \right)^n$$

$$a_{n+1} = (n+1)! \left(\frac{3}{n+1} \right)^{n+1}$$

نسبة a_{n+1} إلى a_n

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! \left(\frac{3}{n+1} \right)^{n+1}}{n! \left(\frac{3}{n} \right)^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! 3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! 3^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cancel{n!} 3 \cdot 3^n}{(n+1)^n (n+1)} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!} 3^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left| \frac{n^n}{(n+1)^n} \right| = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{e} = \frac{3}{2.7} < 1$$

H.O.T

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

div

أستقيم اختيار السند بين خيارين إذا كانت H - h
 بالأساليب التالية متقاربة، ومما عده

2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 3^n}$$

3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2} \cdot n^2}{4^n}$$

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

اختبار التكامل Integral test

إذا فرضنا a_n مستمرة $f(x)$ متنازلة $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ حيث a_n هو الحد ذو الرقم n للمتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

فإن المتسلسلة والتكامل كلاهما متقاربان $n=1$ أو متباعدتان إذا

أولاً / Conv.

$$\text{if } \int_1^{\infty} f(x) dx = \text{finite} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ثانياً / إذا كان التكامل غير محدد فإن المتسلسلة متباعدة

ثانياً / div.

$$\text{if } \int_1^{\infty} f(x) dx = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ملاحظة: - الرتبة يجب أن تكون متسلسلة موجبة متناقصة

مثال: اختبار التكامل بينياً إذا كانت المتسلسلة متباعدة أو متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Soln: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \Rightarrow [\ln(x)]_1^{\infty}$

$$= [\ln \infty - \ln(1)] = \infty - 0 = \infty$$

المتسلسلة متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

مسألة (2)

Sol: $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t \ln t} dt$

$$= \left[\ln \ln x \right]_1^x = \ln \ln x - \ln \ln 1$$

$$= \ln \ln x - 0 = \ln \ln x$$

متباينة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)}$$

مسألة (3)

Sol: $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_1^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(\infty+1) - \ln(1+1) \right] = \frac{1}{2} \times \infty$$

المسألة متباينة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+2)^2}$$

مسألة (4)

Sol: $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2+2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx$

توضيح: $(x^2+2)^{-2} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{x^2+2}{-1} \right]^{-2+1} \right\}_1^{\infty} = -\frac{1}{2} \left\{ \left[x^2+2 \right]^{-1} \right\}_1^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2+2} \right]_1^{\infty} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\infty^2+2} - \frac{1}{1^2+2} \right] = -\frac{1}{2} \left[0 - \frac{1}{3} \right]$$

H.W

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$

في قسمة اجزاء الكسور
من قسمة وبقية الكسور

الدرجة

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2+4}$

الفصل الثاني

Power Series (متسلسلة أسية)

إذا كانت a_n متسلسلة توانيت a_n ثابت حقيقي (أعداد حقيقية) فإن القسمة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

هذه هي متسلسلة القوى (x) متغير حقيقي.

ملاحظة: نرى هذه المتسلسلة في المتسلسلة العنصرية عندنا نفرض على (x) بعدد قسمة مبرودها أعداداً. فها هي قيم (x) التي تتقارب هذه المتسلسلة. أي في هذه الفترة تتقارب وفي هذه الفترة تتباعد. كثرة المتسلسلة. وسنقوم اختياراً لأنه أو اختيار الحد لزيادة تقارب أو زيادة هذه المتسلسلة لتوضيح ذلك.

مثال ① اوجد مجموعة التقارب لمتسلسلة القوى

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$\text{Sol: } a_n = n! x^n$$

$$a_{n+1} = (n+1)! x^{n+1}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^n x}{n! x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n! (n+1) x^n x}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1) x|$$

$$\rho = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

علاوة على ذلك إذا كانت Hole الفاتحة (أي $\neq 0$) معناها أن المتتالية متباعدة. لكنني ختالي نقطة واحدة فقط تجعل المتتالية Hole صفر وعند هذه النقطة فقط المتتالية متقاربة. معناها أن المتتالية تقارب فقط عند $X=0$ وتتباعد لجميع قيم $X \neq 0$.

$$\text{Ex (2)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Sol: $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n!(n+1)} \cdot x^n$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} - x^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{(n+1)} \right|$$

$$P = |X| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

في هذه الحالة ان
نظام ايزوتروبي

$$\therefore \rho = |x| \cdot \frac{1}{x} = 1$$

معلومه: إذا كان جواب الـ ratio test
خارج مقده المقارب (مهمه) test

$$-\infty < X < \infty$$

معطى: عند أي قيمة لـ X عند n تقارب ∞
 فارت المتسلسلة متقاربة ونقطة التقارب $(-\infty, \infty)$

$$\text{Ex ③: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(2n+1)2^n}$$

Sol 2

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$a_{n+1} = \frac{X^{n+1}}{2^{n+1}[(2n+1)+1]}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X^{n+1}}{[(2n+1)+1]2^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1) \cdot 2^n}{X^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X^n \cdot X}{(2n+1+1)2^n \cdot 2} \cdot \frac{(2n+1)2^n}{X^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X(2n+1)}{[(2n+1)+1]2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X(2n+1)}{[4n+2]+2} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(2 + \frac{1}{n})X}{n(4 + \frac{2}{n})} \right| = \left| \frac{(2 + \frac{1}{\infty})X}{(4 + \frac{2}{\infty})} \right|$$

$$= \frac{2}{4} \lim |X| = \frac{X}{2}$$

حتى تكون المتسلسلة متقاربة

$$-2 < X < 2$$

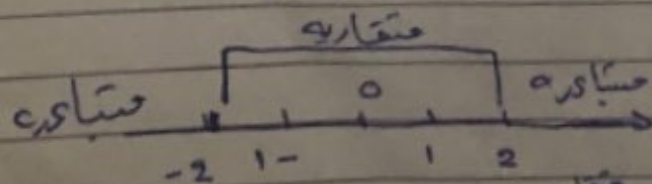
يمكن أن نقول

$$X=1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{2} < 1 \text{ متقاربة}$$

$$X=0 \Rightarrow \rho = \frac{0}{2} < 1 \text{ متقاربة}$$

$$X > 2 \Rightarrow \rho > 1 \text{ متباعدة}$$

$$X < -2 \Rightarrow \rho > 1 \text{ متباعدة}$$



H. c.

والجبات المتشابهة ~ الزيد

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n! (2x-1)^n$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} n! (x-2)^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n)!}$$

①

حلولة واجبات المتسلسلة الدسمة (How)

① $\sum_{n=1}^{\infty} n! (2x-1)^n$

أول دمجوى التقارب لمتسلسلة القوة
يستخدم التقارب ratio test

$a_{n+1} = (n+1)! (2x-1)^{n+1}$

Sol: $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! (2x-1)^{n+1}}{n! (2x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! (2x-1)^{n+1}}{n! (2x-1)^n} \right|$

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} |2x-1| (n+1) = |2x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)$

$= \infty \cdot |2x-1| = \infty$, $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

ملاحظة :- اذا كانت قيمة الـ ratio تساوى 0 معناها ان المتسلسلة متباينة . لكن هنا في نقطة واحدة فقط وقيمة فقط قبل المتسلسلة تساوى صفر وعند هذه النقطة فقط المتسلسلة متقاربة . معناها ان المتسلسلة تقاربه فقط عند $x = \frac{1}{2}$ وبنا يدعى مجموع متسلسلة x لا يساوى $\frac{1}{2}$.

② $\sum_{n=0}^{\infty} n! (x-2)^n$

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! (x-2)^{n+1}}{n! (x-2)^n} \right|$

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! (x-2)^n (x-2)}{n! (x-2)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! (x-2)}{n!} \right|$

$\rho = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)$

$$\rho = |X - 2| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \quad (2)$$

مثل المثال الأول $\rho = \infty$
 : هناك نقطة واحدة تكون فيها المتسلسلة متقاربة وهي
 $X = 2$
 $X - 2 = 0 \Rightarrow$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! X^n}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)! X^{n+1}}{(2(n+1))!}$$

Sol:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! X^{n+1}}{2(n+1)!} \cdot \frac{2n!}{n! X^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)n! X^n \cdot X}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{n! X^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)n! X \cdot X}{(2n+2)(2n+1)n! X^n} \cdot \frac{2n!}{n! X^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)X}{(2n+2) \cdot 2(n+1)} \right| = \left| \frac{X}{2} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)}$$

بالنسبة للقارب بما أن الحد في البسط أقل من الحد في المقام : القارب صفر

$$\rho = \left| \frac{X}{2} \right| \cdot \text{صفر} = 0 < 1$$

* ملاحظة إذا كان جواب القارب ρ صفر فانه قريب من القارب $(-\infty, \infty)$

$$-\infty < X < \infty$$

يعني عندما نعوض عن X بـ (∞) أو $(-\infty)$ سوف نحصل على صفر.

متسلسلة تايلر وماكلورين

Taylor and Maclorin Series

إذا كان لدينا متسلسلة القوى بـ $(x-b)$ أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1 (x-b)^1 + a_2 (x-b)^2 + a_3 (x-b)^3 + a_4 (x-b)^4 + \dots + a_n (x-b)^n$$

الآن نفرض $f(x) =$

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-b) + a_2 (x-b)^2 + a_3 (x-b)^3 + a_4 (x-b)^4 + \dots + a_n (x-b)^n \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 0 + a_1 + 2a_2 (x-b) + 3a_3 (x-b)^2 + 4a_4 (x-b)^3 + \dots + n a_n (x-b)^{n-1} \quad (2)$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = 0 + 0 + 2a_2 + 3 \times 2 a_3 (x-b) + n(n-1) a_n (x-b)^{n-2} + 4 \times 3 a_4 (x-b)^2 \quad (3)$$

$$f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 3 \times 2 a_3 + 4 \times 3 \times 2 a_4 (x-b) + n(n-1)(n-2) a_n (x-b)^{n-3} \quad (4)$$

$$f^{(4)}(x) = 0 + 0 + 0 + 4 \times 3 \times 2 a_4 \quad (5)$$

$$f^{(n)}(x) = n! a_n \quad (6)$$

الآن نفرض $x=b$

$$f(b) = a_0 \quad (1) \Rightarrow a_0 = f(b)$$

$$f'(b) = a_1 \quad (2) \Rightarrow a_1 = \frac{f'(b)}{1!}$$

$$f''(b) = 2a_2 \quad (3) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(b)}{2!}$$

$$f'''(b) = 2 \times 3 a_3 \quad (4) \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(b)}{3!}$$

$$f'''(b) = 4 \times 3 \times 2 \times a_4 \quad (5) \Rightarrow a_4 = \frac{f'''(b)}{4!}$$

$$f^{(n)}(b) = n! a_n \quad (2) \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}$$

والآن نعوذ في المعادلات 1 - 2 فنحصل على

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(b) + \frac{f'(b)}{1!} (x-b)^1 + \frac{f''(b)}{2!} (x-b)^2 + \\ &+ \frac{f'''(b)}{3!} (x-b)^3 + \frac{f^{(4)}(b)}{4!} (x-b)^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^n \end{aligned} \right.$$

متسلسلة تايلر

ولمجرد $b=0$ كان متسلسلة ماكلورين نعوذ عن $b=0$

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 \\ &+ \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned} \right.$$

متسلسلة ماكلورين

لذا نرى ان متسلسلة ماكلورين تتشابه مع متسلسلة تايلر عندما $b=0$

اوجد متسلسلة تايلر للدالة العينية

Ex ① $f(x) = e^x$ (5 حدود) $b = 2$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(2) = e^2$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(2) = e^2$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(2) = e^2$$

$$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(2) = e^2$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(4)}(2) = e^2$$

$$\therefore e^x = e^2 + e^2 \frac{(x-2)}{1!} + \frac{e^2}{2!} (x-2)^2 + \frac{e^2}{3!} (x-2)^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$$

Ex ② $f(x) = e^x$ (5 حدود) $b = 0$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$$

$$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ex: ③

أوجد متسلسلة تايلور

$f(x) = e^{-x/2}$ (لـ $x=0$)

لدينا في المثال السابق

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

نعوض عن x بـ $-x/2$

$$\therefore e^{-x/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{(-x/2)^2}{2!} - \frac{(-x/2)^3}{3!} + \dots$$

$$\therefore f(x) = e^{-x/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{(-x/2)^2}{2!} - \frac{(-x/2)^3}{3!} + \dots$$

$$f(x) = e^{-x/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!} + \dots$$

Ex ④

أوجد متسلسلة تايلور

$f(x) = \sin x$ (لـ $x=0$)

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) = f(\sin x) &= 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Ex ⑤:

أوجد متسلسلة تايلور

$f(x) = x \sin(\pi x)$

في المثال السابق لدينا (ماكلوري)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

ثم نعوض به $x \rightarrow (\pi x)$

$$\sin(\pi x) = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!}$$

ثم امزج x به

$$f(x) = x \sin(\pi x) = \pi x^2 - \frac{\pi^3 x^4}{3!} + \frac{\pi^5 x^6}{5!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\pi)^{2n-1} x^{2n}}{(2n-1)!}$$

Ex: 11.4

اوحد مستطيل ماكلوري للدالة

① $f(x) = e^{-5x}$

($a=0$, $b=0$)

② $f(x) = 5 \sin(-x)$

③ $f(x) = x \cos \pi x$

Ex ⑥

اوحد مستطيل ماكلوري للدالة

$f(x) = \cos x$

$b = \frac{\pi}{2}$

($a=0$, $b=\pi/2$)

Sol:

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0$

$f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(\pi/2) = -\sin \pi/2 = -1$

$f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''(\pi/2) = -\cos \pi/2 = 0$

$f'''(x) = \sin(x) \Rightarrow f'''(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$

$f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0$

$$\therefore f(x) = G(x) = 0 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})}{1!} + 0 + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{3!} + 0$$

$$f(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

Ex: ⑦ $f(x) = \sqrt{x}$ اوجد متسلسلة تاير للـ $\sqrt{x}$ عند $b=2$ (في $a=2$)

Sol: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(b) = \sqrt{2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}(x)^{-3/2} = -\frac{1}{2(x)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{2(2)^{3/2}} = -\frac{1}{2 \cdot 2(2)^{1/2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{2}(x)^{-3/2-1} = \frac{3}{4}(x)^{-5/2} = \frac{3}{4(x)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow f''(2) = \frac{3}{4(2)^{5/2}} = \frac{3}{4 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3}{16\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{-5}{2}(x)^{-5/2-1} = -\frac{15}{8}(x)^{-7/2} = -\frac{15}{8(x)^{7/2}}$$

$$\Rightarrow f'''(2) = -\frac{15}{8(2)^{7/2}} = -\frac{15}{8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{15}{64\sqrt{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{8} \cdot \frac{-7}{2}(x)^{-7/2-1} = \frac{105}{16(x)^{9/2}} \Rightarrow$$

$$f^{(4)}(2) = \frac{105}{16(2)^{9/2}} = \frac{105}{16 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{105}{256\sqrt{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}(x-2) + \frac{3}{16\sqrt{2} \cdot 2!}(x-2)^2 - \frac{15}{64 \cdot 3! \sqrt{2}}(x-2)^3 + \frac{105}{256 \sqrt{2}}(x-2)^4 - \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{3}{32}(x-2)^2 - \frac{15}{128}(x-2)^3 + \frac{105}{6144}(x-2)^4 \right]$$

اوجه متعلقہ تا پیر
تساوی

Ex: ⑧ $f(x) = \ln x$

$b = 1$

Sol: $f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$

$f'''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$

$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -\frac{6}{1^4} = -6$

$$f(x) = \ln x = 0 + \frac{(x-1)}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4$$

متعلقہ
اوجہ تا کلوری
تساوی

Ex: $f(x) = \ln(x+1)$

Ex: $f(x) = \sqrt{x}$

and $b = 4$

اوجہ متعلقہ تا پیر

Ex: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

اوجہ متعلقہ تا کلوری

$b = 0$

تسلسلات ذات الحدود Binomial Series

الحالة العامة للتسلسل

$$f(x) = (1+x)^m$$

نارمق التسلسل العام

نارمق التسلسل العام $f(x) = (1+x)^m$ حيث $x < 1$ و m عدد حقيقي
متساوية ما يكون

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$f(x) = (1+x)^m \Rightarrow f(0) = (1+0)^m = 1$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \Rightarrow f'(0) = m(1+0)^{m-1} = m$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \Rightarrow f''(0) = m(m-1)(1+0)^{m-2} = m(m-1)$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \Rightarrow f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

نارمق التسلسل العام

$$f(x) = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}x^4 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n$$

وتكون متساوية $|x| < 1$

مثال / اكتب متسلسلة تايلور ذات الحدين للبرالة

$$f(x) = (1+x)^4 \quad \text{and } x < 1$$

Sol:

$$m = 4$$

$$x = x$$

$$f(x) = 1 + \frac{4}{1!}x + \frac{4(4-1)}{2!}x^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}x^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}x^4 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)}{5!}x^5$$

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 0$$

مثال / اكتب متسلسلة تايلور ذات الحدين للبرالة

$$f(x) = \frac{3}{(1+x)^4}$$

Sol: $m = -4$ $x = x$

نعوض في القانون

$$f(x) = 1 - \frac{4}{1!}x + \frac{4(4-1)}{2!}x^2 - \frac{4(4-1)(4-2)}{3!}x^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{4!}x^4$$

$$\therefore f(x) = 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + \dots$$

H.W

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x^4}$$

مثال

$$m = \frac{1}{3}, \quad x = x^4$$

مثال : باستخدام نظرية ذي الحدين اوجد القيمة التقريبية

$$f(x) = \sqrt{2.25}$$

Sol: $f(x) = (2 + 0.25)^{\frac{1}{2}}$ نقل 2 ونقسم على 2

$$f(x) = \left[2 \left(1 + \frac{0.25}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \quad m = \frac{1}{2}, \quad X = \frac{1}{8}$$

نحوص في القانون

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{\left(\frac{1}{8} \right)^2}{2!} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \frac{\left(\frac{1}{8} \right)^3}{3!}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{512} + \frac{1}{21928}$$

ملاحظة: نلاحظ ان الحد الثالث وما بعده انما يساهم في الخطأ تكون صغيره فتغفلها لمقره فمثلا الحد الثالث والاولين

$$f(x) = (1 + 0.0625) = 1.0625$$

$$f(x) = \sqrt{2} \times 1.0625 = 1.414 \times 1.0625 = 1.5$$

مثال 1/ اوجد قيمة الجذر الذي باستخدام نظرية ذات الحدين

(A) $\alpha = \left[(1 + x)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$

Sol: $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{2}} \quad m = \frac{1}{2}, \quad X =$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{X^2}{2!}$$

حل أسئلة الواجبات
للمسئرين ذات الدرس

$$* f(x) = \sqrt[3]{1+x^4}$$

$$\text{Sol: } f(x) = 1 + \frac{1}{3} x^4 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} (x^4)^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} (x^4)^3 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!} (x^4)^4$$

$$* f(x) = \sqrt[3]{9}$$

$$\text{Sol: } 9 = 8 + 1 \rightarrow f(x) = (8+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = \left[8 \left(1 + \frac{1}{8} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$m = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{8} \quad \text{بملاحظة: مع } x \text{ دائماً أقل من الواحد}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \right) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} \left(\frac{1}{8} \right)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \right) - \frac{2/9}{2!} \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{10/27}{3!} \left(\frac{1}{8} \right)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{5}{27 \cdot 3} \left(\frac{1}{8} \right)^3$$

$$= 1 + \frac{1}{24}$$

$$\therefore \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8} (1 + 0.04) = 2(1.04) = 2.08$$

$$* f(x) = \sqrt{4.8}$$

$$f(x) = (4 + 0.8)^{1/2} = \sqrt{4} \left(\frac{4}{4} + \frac{0.8}{4} \right)^{1/2}$$

$$= 2 \left(1 + \frac{0.8}{4} \right)^{1/2} = 2(1 + 0.2)^{1/2}$$

$$m = \frac{1}{2}, \quad x = 0.2$$

$$f(x) = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3$$

$$* f(x) = \sqrt{9-x}$$

$$\text{Sol: } f(x) = \left[9 \left(\frac{9}{9} - \frac{x}{9} \right) \right]^{1/2} = 3 \left(1 - \frac{x}{9} \right)^{1/2}$$

$$m = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{x}{9}$$

$$\therefore f(x) = 3 - \frac{x}{9} - \frac{x^2}{216} - \frac{x^3}{3888}$$

The Vectors

المتجهات

الكميات الفيزيائية التي تكون

١- الكميات العددية: وتفرم بذكر لقيمة ولوحدة فقط
مثل: المسافة، الشغل، الطاقة، الكثافة.

٢- الكميات الاتجاهية: هذه الكميات لا تفرم الا بذكر لإتجاه مع القيمة ولوحدة.

مثل: لقوة، لزاوية، السرعة.

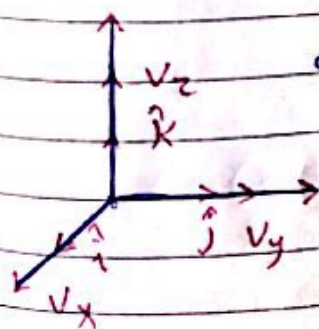
المتجه: هو الجزء المستقيم بدأ بنقطة الأصل وطوله معلوم واتجاه معين ويرمز له $\vec{A}$, $\hat{A}$

مثل: متجه السرعة $\vec{V} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

($v_x \hat{i}, v_y \hat{j}, v_z \hat{k}$) هي قيم مركبات السرعة

واتجاهها ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$)

إذا ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) هي وحدة، فقيمات



متجهات الوحدة، لتأدية

$$\hat{A} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{J} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{K} = (0, 0, 1)$$

$$\hat{V} = \hat{V}_x (1, 0, 0) + \hat{V}_y (0, 1, 0) + \hat{V}_z (0, 0, 1)$$

* ضرب المتجهات

1. الضرب العددي: ويرمز له $(\cdot)$
إذا كانت المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يكون الضرب العددي لها

$$A \cdot B = AB \cos \theta$$

وتكون نتيجة الضرب قيمة عددية وليست اتجاهية

إذا الزاوية بين المتجهين $\theta = 0 \rightarrow \cos \theta = 1$

$$\vec{A} \parallel \vec{B}$$

فاذا الضرب العددي له نتيجة

$$\theta = 90^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

أي تشبه الضرب = صفر هذا يعني ان المتجهين

متعامدين

$$A \perp B$$

ولابد ان قيمة الزاوية

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

* كيفية إيجاد الضرب العددي للمتجهين

$$\vec{A} = \hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z \quad \text{نفرض ان}$$

$$\vec{B} = \hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k} B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

وبما ان الضرب يساوي صفر لانه

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

ex: $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 6 + (-1) + (-6) = -1$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{-1}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{-1}{14}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{14} \right) = 1.11$$



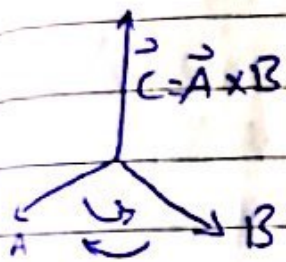
H.W: أوجد الزاوية بين المتجهين

$$\vec{A} = \hat{i} - \sqrt{3}\hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + \sqrt{3}\hat{k}$$

2. الضرب الاتجاهي: ويرمز له (X) ونتيجة الضرب قيمة عددية واتجاهية

وهذا النوع من الضرب نستخدم فيه قاعدة اليد اليمنى لبيان الاتجاه، للضرب



حيث تكون $\vec{C}$ عمودي على $\vec{A}$ و $\vec{B}$ حيث لـ $\vec{A} \times \vec{B}$ اتجاه الضرب والدوران، كما أن اتجاه نتيجة الضرب

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} = \vec{C} \quad \text{على عقارب الساعة}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{C} \quad \text{مضاد عقارب الساعة}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \vec{n}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta (-\vec{n})$$

$n=1$ دائماً

$$\sin \theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$n = \frac{ \vec{A} \times \vec{B} }{ \vec{A} \vec{B} \sin \theta}$	$\frac{ \vec{A} \times \vec{B} }{ \vec{A} \vec{B} } \times \frac{ \vec{A} \times \vec{B} }{ \vec{A} \vec{B} }$	قانون وحدة الموجة
--	--	----------------------------------

* كيفية إجراء هذا النوع من ضرب

نستخدم الوحدات

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$$

$$\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) - \hat{j}(A_x B_z - A_z B_x) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

ex: $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(3(-1) - 1 \times 2) - \hat{j}(2(-1) - 1 \times 0) + \hat{k}(2 \times 2 - 3 \times 0)$$

$$= -5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

ex:- $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(2 \times 0 - (-1 \times 1)) - \hat{j}(1 \times 0 - (-1 \times 2)) + \hat{k}(1 \times 1 - 2 \times 2)$$

$$= \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

* ضرب وحدات المتجه $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ بالنسبة للضرب الاتجاهي

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{i} \hat{i} \sin 0 = 0$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = \hat{j} \hat{j} \sin 0 = 0$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = \hat{k} \hat{k} \sin 0 = 0$$

$$\text{علاقات لسانة} \{ \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \}$$

$$\text{علاقات لسانة} \{ \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \}$$

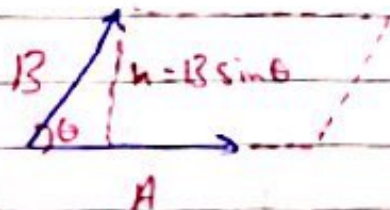
ملحظة / لإيجاد زاوية بين متجهين نستخدم الضرب العددي (.)

لإيجاد مساحة نستخدم الضرب الاتجاهي (x)

لإيجاد مساحة متوازي الاضلاع

بإستخدام الضرب الاتجاهي

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta$$



ومساحة هذا الشكل هي قاعدة x ارتفاع

$$\sin \theta = \frac{h}{B}$$

$$A = \text{Base} \times \text{high}$$

$$\text{المساحة} = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta = Ah$$

(القيمة العددية)

أي أن مقدار الضرب الاتجاهي = مساحة متوازي الاضلاع
المتكون من المتجهين.

ex:- أوجد مساحة المثلث الرباعي الذي اضلاعه
 $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$
 (حسب في / ث / ك)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k} (1 \times 2 - (2 \times -2))$$

$$= \hat{i} (2 \times 2 - (-1 \times 2)) - \hat{j} (1 \times 2 - (-1 \times -2)) + \hat{k} (1 \times 2 - (2 \times -2))$$

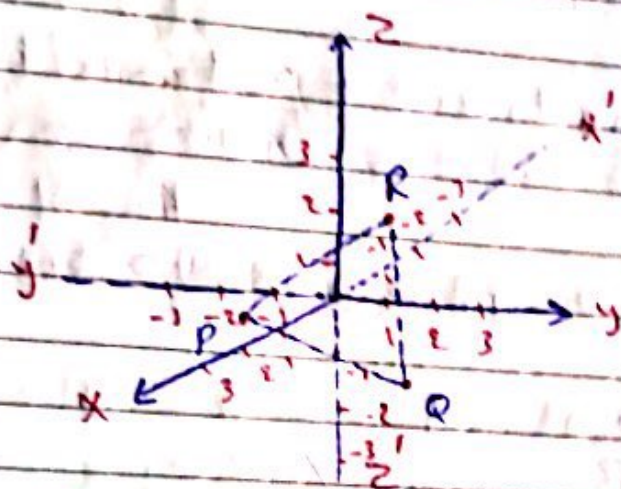
$$= 6\hat{i} + 0 + 6\hat{k} = 6\hat{i} + 6\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{72} = 8.485 \text{ units}$$

مساحة الشكل الرباعي

8.1

سؤال 1: حساب مساحة المثلث الممتثل لنقاط $P(1, -1, 0)$ ، $Q(2, 1, 1)$ ، و $R(-1, 1, 2)$ بالنقاط



ملاحظة / لإيجاد المساحة بين نقطتين في الفضاء

$$P_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$P_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{P_1P_2} = \hat{i}(x_2 - x_1) + \hat{j}(y_2 - y_1) + \hat{k}(z_2 - z_1)$$

قانون هيرش

$$\vec{PQ} = \hat{i}(2-1) + \hat{j}(1-(-1)) + \hat{k}(-1-0)$$

$$= \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{PR} = \hat{i}(-1-1) + \hat{j}(1-1) + \hat{k}(2-(-1))$$

$$= -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{QR} = \hat{i}(-1-2) + \hat{j}(1-1) + \hat{k}(2-(-1))$$

$$= -3\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = -2 + 4 - 2 = 0$$

∴ هما متعامدان
فأحدهما القاعدة، والآخر عمود على القاعدة.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6\hat{i} + 6\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(36) + (36)} = \sqrt{72} = 8.4$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$$= \frac{1}{2} \times 8.4 = 4.2$$

H.W

بين فيما إذا كانت المتجهات
الآتية متوازية أم متعامدة؟

$$\textcircled{1} \quad \begin{aligned} a &= 6\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} \\ b &= 2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{aligned} \vec{u} &= -2\hat{i} - \hat{j} \\ \vec{v} &= \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{1}{4}\hat{k} \end{aligned}$$

2018/8/22

أوجد متجه المماس للمكانة

1. $\vec{r} = 5\vec{i} + 4t\vec{j}$ ، لا بد من إيجاد المشتقة

$$\vec{r} = -2\vec{i} + t\vec{j} \quad \text{مماسية}$$

في المماسية متعامدة يجب ان يكون

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-5 \times 2) + 4t = 0$$

$$= -10 + 4t = 0$$

$$4t = 10 \Rightarrow t = 10/4 = 2.5$$

د. 11 / إذا كانت المتجهات $\vec{A} = -2\vec{i} + t\vec{j}$ ، $\vec{B} = 2\vec{i} + t\vec{j}$ ، أوجد الزاوية.

مثال / أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + k$

$$\vec{b} = 2\vec{i} - 5k$$

$$\vec{p} \cdot \vec{b} = |\vec{p}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{b}}{|\vec{p}| |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{14} \sqrt{5}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{12}{13.49} \right) \Rightarrow \theta = 85.75^\circ$$

84

مثال/ أوجد متجه الوحدة، الذي يكون بنفس الاتجاه مع
المتجه A

$$\vec{A} = 6i + 3j + k$$

الحل/ إذا كان لدينا متجه ثابت $\vec{u}$

$$u = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{6i + 3j + k}{\sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (1)^2}}$$

$$u = \frac{6i}{\sqrt{46}} + \frac{3j}{\sqrt{46}} + \frac{k}{\sqrt{46}}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{46}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{46}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{46}}\right)^2} = 1$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{36}{46} + \frac{9}{46} + \frac{1}{46}} = \sqrt{\frac{46}{46}} = \sqrt{1} = 1$$

Partial derivative

* مشتقات الجزئية * مشتقات

علما سابقاً ان الدالة هي تقابل مجموعة من اعداد
المتغيرات، لذلك نجد في كل عدد في المتغيرات تقابل عدد

في الدالة: $y = x^2 - 1$

x	
1	0
2	3
3	8
4	16

$y = x^2 - 1$

و درسنا سابقاً المشتقة الدالة و التي رمزنا لها

بـ $\frac{dy}{dx}$ مثال في المشتقة الدالة

$f(x, y, z)$

أما في الاشتقاق الجزئي برمز لها $\frac{d}{dx}$ أو $\frac{d}{dy}$

تماماً فبالا، لتغير الآخر يبقى ثابتاً بالرمز x

$$z = 2x^2 + 2y^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 4x + 0$$

$$\frac{dz}{dy} = 0 + 4y$$

وهكذا فإن المشتقة الجزئية تكتب بـ $\frac{d}{dx}$ أو $\frac{d}{dy}$

أو $\frac{dz}{dx}$ وهكذا فإن المشتقة الجزئية تكتب أيضاً

$$f'(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y = \frac{df}{dy}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

بشرط أن النهاية موجودة

المشتقة الجزئية $\frac{df}{dx}$ للحالة

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 1 + \ln(x^2 + y^2)$$

$$\frac{df}{dx} = 2x - 3y + 0 + \frac{1}{(x^2 + y^2)} \cdot 2x + 0$$

$$= 2x - 3y + \frac{2x}{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{df}{dy} = 0 - 3x + 0 + \frac{1}{(x^2 + y^2)} \cdot 0 + 2y$$

$$= -3x + \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$f(x, y) = y \sin(xy)$ المشتقة الجزئية $\frac{df}{dx}$

$$f(x) = \frac{d}{dx} (y \sin xy) = y \cos xy \cdot y + 0$$

$$= y^2 \cos xy$$

$$f_y = \frac{d}{dy} (y \sin xy) = y \cos xy \cdot x^2 + \sin xy$$

$$= xy \cos xy + \sin xy$$

$P(x,y) = \frac{2y}{y + \cos x}$ أوجد $\frac{dP}{dx}$ و $\frac{dP}{dy}$ للدالة

$\frac{d}{dx} = \frac{(y + \cos x) \cdot 0 - 2y (0 - \sin x)}{(y + \cos x)^2}$

$= \frac{+2y \sin x}{(y + \cos x)^2}$

بالنسبة لـ x ← $y = 0$
 بالنسبة لـ y ← $x = 0$

$\frac{d}{dy} = \frac{(y + \cos x) \cdot 2 - 2y (1 + 0)}{(y + \cos x)^2}$

$= \frac{2y + 2 \cos x - 2y}{(y + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x}{(y + \cos x)^2}$

المشتقة الجزئية للأثر من متغيرين ينطبق عليه

ما شهدناه من اشتقاق بمتغيرين

$$P(x, y, z) = x (\sin(y + 3z))$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = x \cdot 0 + \sin(y + 3z) \cdot 1$$

$$= \sin(y + 3z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = x \cos(y + 3z) \cdot 1 + \sin(y + 3z) \cdot 0$$

$$= x \cos(y + 3z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = x \cos(y + 3z) \cdot 3 + \sin(y + 3z) \cdot 0$$

$$= 3x \cos(y + 3z)$$

المتغير الثالث، المشتقة الجزئية لـ z من المتغير z من z هي

الثاني من اشتقاق $P(x, y, z)$ بالنسبة لـ y

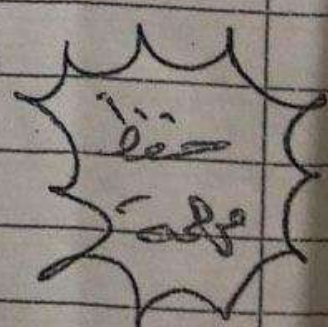
متغير مستقل من z وهذا يعرف بالمشتقة الجزئية

الثاني أو ذات الرتبة الثانية وتكتب:-

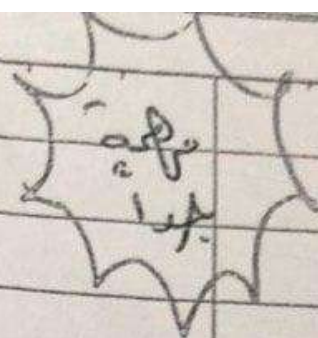
$$P_{xx} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$P(x, y, z)$$

$$P_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$



$$P_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$



$$P_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$P_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$P_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

مثال / أوجد المشتقات الجزئية الثانية

1) $P_{xx}, P_{yy}, \text{ ~~P_{zz}}~~, P_{xy} = P_{yx}, P_x, P_y$

$$P(x, y) = x \cos y + y e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dy} (x \cos y + y e^x) = -x \sin y + e^x$$

$$P_x = \frac{\partial f}{\partial x} = x \cdot 0 + \cos y \cdot 1 + y e^x = 0$$

$$= \cos y + y e^x$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot -\sin y + \cos y \cdot 1 + y \cdot 0^x + e^x \cdot 1$$

$$\cancel{\sin y + e^x} = \boxed{-x \sin y + e^x}$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$= 0 + y e^x + 1 \cdot e^x = \boxed{y e^x + e^x}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \cos y + \sin y \cdot 0 + 0$$

$$\boxed{= -x \cos y}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-x \sin y + e^x)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = -x \cdot 0 + (-\sin y \cdot 1 + e^x \cdot 1)$$

$$\boxed{= -\sin y + e^x}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\cos y + y e^x)$$

$$= -\sin y + y \cdot 0 + e^x \cdot 1$$

$$\boxed{= -\sin y + e^x}$$

$$f_{xx}, f_{xx}, f_y, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$$

$$f(x) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 3$$

$$f_x = 2x - 3y \rightarrow \text{derivadas}$$

$$f_y = -3x + 4y \rightarrow \text{derivadas}$$

$$f_{xx} = 2 \rightarrow \text{derivadas}$$

$$f_{yy} = 4 \rightarrow \text{derivadas}$$

$$f_{xy} = \frac{d}{dy} (2x - 3y) = -3$$

$$f_{yx} = \frac{d}{dx} (-3x + 4y) = -3$$

قاعدة السلسلة الجزئية باستخدام قاعدة السلسلة

chain Rule

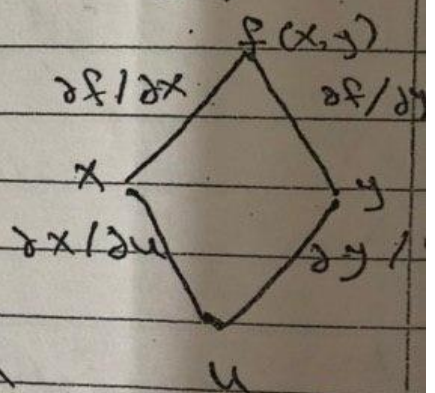
قاعدة السلسلة / وهي طريقة لإيجاد مشتقة جزئية إذا كانت الدالة تعتمد على متغيرات وهذه المتغيرات تعتمد على متغيرات أخرى مثل:

$$f(x, y), \quad y = (u, v), \quad x = (u, v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}$$

فنعقد طريقة الدالة والتي يمكن إجراؤها كالتالي:

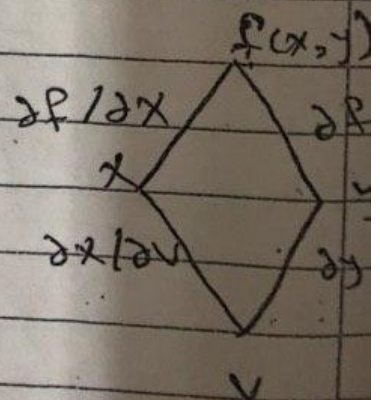
أولاً: $\frac{\partial f}{\partial u}$



$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

ثانياً: $\frac{\partial f}{\partial v}$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$



$$f(u, w) = u^3 + 2uw + w^2 \quad / \text{Ans}$$

$$u = \frac{x}{y} \quad ; \quad y = xy$$

Sol:-

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3u^2 + 2w + 0 = 3u^2 + 2w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot 1 - x \cdot 0}{y^2} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 0 + 2u + 2w = 2u + 2w$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} (3u^2 + 2w) + y (2u + 2w)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 3u^2 + 2w$$

والباقية اذا كان متغيرا اكثر

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y \cdot 0 - x \cdot 1}{y^2} = -\frac{x}{y}$$

نستخدم بارشيد
اذا كان متغيرا احدهم
المشتقة (d)

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 2u + 2w$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} (3u^2 + 2w) + x(2u + 2w)$$

$$\text{H.w/ } P(x, y) = 3x^2y + 3y^2x^2$$

$$x = uw^2 + u, \quad y = u^2 + w^2$$

$$\text{find } \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial w}$$

طريقة التفاضل إذا كانت الحالة $t = g(s)$ و $y = f(t)$
 $u = g(x)$ و $s = g(u)$.

$$y \rightarrow t \rightarrow s \rightarrow u \rightarrow x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y = t^4 - 2t^2 + 1$$

$$t = 2x^2 + x + 1$$

$$\frac{dt}{dx} = 4x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (4t^3 - 4t)(4x + 1)$$

$$= 4(2x^2 + x + 1)^3 - 4(2x^2 + x + 1)(4x + 1)$$

$$y = t^2 + 1, \quad t = 3s^3 + 1$$

$$s = 2 - x$$

$$y \rightarrow t \rightarrow s \rightarrow x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$$

$$= 2t \cdot 9s^2 \cdot -1$$

$$= 2(3s^3 + 1) \cdot -9s^2$$

$$= -54s^5 - 18s^2$$

إذا كانت لدينا $P(x, y, z)$ و $K(r, s)$ و $y = h(r, s)$
 $x = g(r, s)$ وكانت

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x = ue^v \sin u$$

$$y = ue^v \cos u$$

$$z = ue^v$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2x + 0 + 0$$

② $\frac{\partial x}{\partial u} = u e^v \cos u + (1 - \sin u) (u \cdot 0 + e^v \cdot 1)$
 $= u e^v \cos u + \sin u (u \cdot 0 + e^v \cdot 1)$
 $= u e^v \cos u + e^v \sin u$

③ $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2y + 0 + 0$

④ $\frac{\partial y}{\partial u} = -u e^v \sin u + \cos u [u \cdot 0 + e^v \cdot 1]$
 $= -u e^v \sin u + e^v \cos u$

⑤ $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2z + 0 + 0$

⑥ $\frac{\partial z}{\partial u} = u \cdot 0 + e^v \cdot 1 = e^v$

$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} [u e^v \cos u + e^v \sin u]$

$+ \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} [-u e^v \sin u + e^v \cos u]$

$+ \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} [e^v]$

$$y = 3z^3 + 2$$

$$x = z^2 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dz} = 9z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2z}$$

$$\frac{dy}{dx} = 9z^2 \cdot \frac{1}{2z} = \frac{9z}{2}$$

$$\frac{dx}{dz} = 2z$$

الانحدار gradient

يعرف الانحدار بأنه إذا كانت مركبة متجه في اتجاه تساوي

مشتقة ذلك الاتجاه سمي المتجه بالانحدار

$$F \cos \theta = \frac{\partial E_p}{\partial s}$$

$$\therefore F = - \text{grad } E_p$$

$$\text{grad } F = \vec{\nabla} F$$

انحدار

إذا كانت الاستار موجبة : المقترايد

إذا كانت الاستار سالبة : المقد متافقه

$\vec{\nabla}$ del وهي كمية اتجاهية

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

حفظ

خصائص الاعداد :

الكمية الاوتية :

ا عند توش (del) على دالة Q (دالة غير اتجاهية)

في هذه الحالة نقرأ الاعداد Q

$$\vec{\nabla} Q = \text{grad } Q$$

$$\vec{\nabla} Q = \hat{i} \frac{\partial Q}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial Q}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial Q}{\partial z}$$

عنه

مثال / أوجد اتجاه الدالة

$$Q = 2x^2 + xy + z^2$$

$$\vec{\nabla} Q = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (2x^2 + xy + z^2)$$

$$\vec{\nabla} Q = \hat{i}(4x + y) + \hat{j}(x) + \hat{k}(0 + 0 + 2z)$$

$$= \hat{i}(4x + y) + x\hat{j} + 2z\hat{k}$$

نتيجة كمية اتجاهية

فدات نقطة

الكمية المتجهة

2 عندما تؤثر ذلك كمية اتجاهية يكون لتأثير ذلك نوعين:

① عندما تؤثر ذلك الضرب لتقوى (.) على دالة منه

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{div } \vec{V}$$

مثال /

مثال

$$\vec{V} = \hat{i}V_x + \hat{j}V_y + \hat{k}V_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (iV_x + jV_y + kV_z)$$

النتيجة هي

$$= \frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dV_z}{dz}$$

|||

(x)
عندما تؤثر del بكونوس على دالة متجهة

(التفاف أو دوران)
 $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{curl } \vec{V}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{curl } \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

والنتيجة تكون كمية اتجاهية

~~~~~

الكمية القياسية:

إذا أثرت  $\vec{\nabla}$  على  $\vec{\nabla}$  ضرب متجهي  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

كمية اتجاهية



$$\text{grad } Q = \vec{\nabla} Q \quad \text{الخطا}$$

$$\text{div } \vec{P} = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\text{curl } \vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad \text{اللفاف}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{اللابلاسيان}$$

مثال / اوجد الخطا، الدالة

$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + z \ln x$$

$$\text{grad } P = \vec{\nabla} P = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (x^2 + y^2 + 2z^2 + z \ln x)$$

$$f(x, y, z) = 2x$$

$$= i \left( 2x + \frac{z}{x} \right) + j(2y) + k(4z + \ln x)$$

$$P(x, y, z) = x e^{yz} + y \ln x + z e^x$$



## المشتقة الاتجاهية الجزئية

يمكن تعريفها بأنها معدل التغير لدالة عددية بالنسبة للموقع (الازاحة)

افرضنا  $f$  (أي دالة عددية) و  $ds$  هي الانزاحة

بأن معدل تغير  $f$  بالنسبة ل  $s$  يكون  $\frac{df}{ds}$

وهذه مشتقة اتجاهية وهناك في الافتراضات

$$\frac{\Delta T}{\Delta s} \text{ و } \frac{\Delta Q}{\Delta s}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{dT}{ds} = \nabla T \cdot \hat{u} \leftarrow \text{معدل التغير}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{u} \leftarrow \text{معدل التغير}$$

$$\Delta f = \text{grad } f$$

$$\hat{u} = \frac{A}{|A|}$$



مثال: اوجد اتجاه التدرج الاتجاهي للدالة

$$f(x, y, z) = 3e^x \cos(yz)$$

$$\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}, \text{ اتجاه (1, 1, -2) في الدلالة}$$

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{u}$$

$$\nabla f = \left( \hat{i} \frac{d}{dx} + \hat{j} \frac{d}{dy} + \hat{k} \frac{d}{dz} \right) 3e^x \cos(yz)$$

$$= \hat{i} (3e^x \cos(yz)) + \hat{j} (-3e^x \sin yz \cdot z)$$

$$+ \hat{k} (-3e^x \sin yz \cdot y)$$

$$= \hat{i} (3e^x \cos yz) - \hat{j} (3ze^x \sin yz)$$

$$- \hat{k} (3ye^x \sin yz)$$

$$\hat{u} = \frac{A}{|A|}$$

$$|A| = \sqrt{4 + 1 + (-2)^2} = \sqrt{9} = \underline{3}$$

$$\hat{u} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{df}{ds} &= \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} \\
 &= \hat{i}(2e^x \cos yz) - \hat{j}(3ze^x \sin yz) - \hat{k}(3ye^x \sin yz) \\
 &\quad \cdot \left( \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k} \right) \\
 &= 2e^x \cos yz - ze^x \sin yz + 2ye^x \sin yz \\
 &= 2e^1 \cos 1 - e^1 \sin 1 + 2 \times 1 \times e^1 \sin 1 \\
 &= 2 \times 2.7 \times 0.99 - 2.7 \times 0.01 + 2 \times 2.7 \\
 &= 5.346 - 0.027 + 0.054 \\
 &= 5.427
 \end{aligned}$$

المسافة بين النقطتين =  $\int ds$

$$\phi = \ln(2x^2 + 3y^2 + 6z^3)$$

$$\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k} \quad \text{نقطتين } P = (-1, -1, 1) \text{ و } Q = (1, 1, 1)$$

Sol:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi}{ds} &= \vec{\nabla} \phi \cdot \hat{u} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \ln(2x^2 + 3y^2 + 6z^3) \\
 &= \frac{4x}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3} + \frac{6y}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3} + \frac{18z^2}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{4x}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{6y}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{18z^2}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{18z^2}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3}$$



$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{18 \cdot z^2}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3}$$

تسوية

$$\nabla \phi = \frac{1}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3} \times (4xi + 6yj + 18z^2 \hat{k})$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\hat{u} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}}{7}$$

$$\hat{u} = \frac{2\hat{i}}{7} + \frac{3\hat{j}}{7} + \frac{6\hat{k}}{7}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \left[ \frac{1}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3} \cdot (4x\hat{i} + 6y\hat{j} + 18z^2\hat{k}) \right] \cdot \left( \frac{2\hat{i}}{7} + \frac{3\hat{j}}{7} + \frac{6\hat{k}}{7} \right)$$

$$= \frac{1}{2x^2 + 3y^2 + 6z^3} \left( \frac{8}{7}x + \frac{18}{7}y + \frac{108}{7}z^2 \right)$$

(-1, -1, 1) نقطة في

$$= \frac{1}{11} \left( \frac{8}{7}(-8) + \frac{18}{7}(-18) + \frac{108}{7}(1) \right) = \frac{1}{11} \cdot \frac{82}{7} = \frac{82}{77}$$



## المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي علاقة تبادلية بين متغير مستقل  $(x)$  ومتغير تابع  $y$  وليكن  $(y)$  وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية  $y', y'', y''', \dots$  أي أنها على الصيغة العامة

وهذه المعادلة تسمى المعادلة التفاضلية العادية

أما إذا كانت المتغيرات المستقلة أكثر من واحد مثل وكانت  $(x, y, z)$  قابل للاشتقاق بالنسبة ل  $(x, y, z)$  فإن المعادلة في هذه الحالة تسمى معادلة تفاضلية

وتكون على شكل

$$(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots) = 0$$

ومن أمثلة على المعادلات التفاضلية

$$y' + xy = x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = x$$



## رتبة المعادلة، لتفاضلية : Order

هي رتبة المعادلة معامل تفاضلي (اعلى مشتقة موجودة)  
في المعادلة، لتفاضلية

$$f(x, y) \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$y' = f(x, y) \quad \text{مشتقة من الدرجة الأولى}$$

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{التفاضلية}$$

## درجة المعادلة، لتفاضلية Degree

هي القوة المرفوعة اليها أعلى مشتقة تفاضلية  
في المعادلة بعد وضع المعادلة بالصورة الصحيحة،  
والقياسية بالنسبة للمشتقات للتفاضلية

(اما المشتقات فمن المعكنة ان تقدر في قوة كسرية)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \quad \text{مثال}$$

رتبة ثانية، درجة ثانية

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} + x^4 \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$$

رتبة ثالثة، درجة ثالثة



$$\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{dy}{dx^2}$$

مربع الطرفين

$$\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = \left( \frac{dy}{dx^2} \right)^2$$

رتبة ثابت ودرجة ثابت

المعادلة لمعادلة من الرتبة الأولى، درجة 1

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\text{أو } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

وكل هذه المعادلات هي من الدرجة الأولى

فصل المتغيرات separation variable

هذه الطريقة تستخدم إذا أمكن وضع المعادلة على الشكل

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

حيث  $f(x)$  هي دالة فقط في  $x$  و  $g(y)$  هي دالة فقط في  $y$ .



بعد إجراء التكامل على المعادلة فنحصل على  
هذه المعادلة

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = f_0 = C$$

حيث  $C$  ثابت اختياري  
وسنستخدمها بالكل العام

$$e^x \cos y dx + (1 + e^x) \sin y dy = 0 \quad / \text{نكامل}$$

$$\frac{e^x \cos y}{\cos y (1 + e^x)} dx + \frac{(1 + e^x) \sin y}{\cos y (1 + e^x)} dy = 0$$

$$\frac{e^x}{(1 + e^x)} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

$$\int \frac{e^x}{(1 + e^x)} dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

$$\ln(1 + e^x) - \ln(\cos y) = \ln C$$

$$\ln(1 + e^x) = \ln \cos y + \ln C$$

$$\ln(1 + e^x) = \ln C \cos y$$



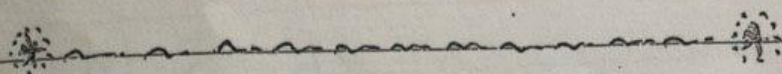
note  
( $\ln$  يلف  $e$  ك)

نأخذ  $e$  اللوغاريتم

$$1 + e^x = c \cos y$$

إذا كانت عندنا نقطة  $(0, 0)$

$$1 + e^0 = c \cos 0, \quad c = 2$$



$$4xy^2 dx + (x^2 + 1) dy = 0 \quad / d^2$$

$y^2(x^2 + 1)$  نقسم على

$$\frac{4xy^2 dx}{y^2(x^2 + 1)} + \frac{(x^2 + 1) dy}{y(x^2 + 1)} = 0$$

$$\frac{4x dx}{(x^2 + 1)} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \frac{4x}{(x^2 + 1)} dx + \int \frac{dy}{y} = \int 0$$

$$\frac{4}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)} dx + \int \frac{1}{y} dy = \int 0$$

$y^{-2+1} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$$2 \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{y} = 0 + C$$



لذا ذلك لتفاضلية المقايضة

الآن، المعادلة التفاضلية

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

مقايضة إذا كان كل من  $M, N$  دالة مقايضة  
من نفس الدرجة، علماً أن  $P(x, y)$  دالة مقايضة  
من الدرجة  $n$  إذا كان

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y)$$

القانون

$n$  = درجة المقايضة

حيث  $t \in \mathbb{R}$

ومثال ذلك /  $P(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$

$$P(tx, ty) = (tx)^2 + 3(tx)(ty) - (ty)^2$$

$$= t^2(x^2 + 3xy - y^2)$$

$$= t^2 P(x, y)$$

ليست متشابهة

$$t^2 x^2 + 3t^2 xy - t^2 y^2$$



$$(y^2 + x^2) dx + xy dy = 0 \quad \text{متجانسة}$$

$$M(x, y) = y^2 + x^2$$

$$M(tx, ty) = (ty)^2 + (tx)^2 \\ = t^2 (x^2 + y^2)$$

$t^n M(x, y)$  من الدرجة الثانية

$$N(tx, ty) = xy$$

At

$$N(tx, ty) = (tx)(ty) = t^2 (xy)$$

$t^n N(x, y)$  من الدرجة الثانية

هنا الدالة المتجانسة كل حاليين

$$① \quad \text{نفرض أن} \quad v = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = vx$$

$$② \quad \text{نوجد} \quad dy = v dx + x dv$$

ثم نعوض في المعادلة الأصلية ونوجد كل



المسألة: حل المعادلة التفاضلية  $2x^2 dy - y(2x+y)dx = 0$

$$2x^2 dy - y(2x+y)dx = 0$$

Sol:

$$M(tx, ty) = 2x^2 = 2(tx)^2 = t^2 2x^2 = t^n M(x, y)$$

$$N(x, y) = -y(2x+y)$$

$$N(tx, ty) = -ty(2tx+ty) = -t^2 y(2x+y) = t^n N(x, y)$$

∴ المعادلة متجانسة من الدرجة الأولى.

$$y = vx, \quad v = \frac{y}{x} \quad dy = v dx + x dv$$

$$2x^2 (v dx + x dv) - vx(2x + vx) dx = 0$$

$$= \cancel{2x^2 v dx} + 2x^3 dv - \cancel{2x^2 v dx} - v^2 x^2 dx = 0$$

$$= (-v^2 x^2 dx + 2x^3 dv) = 0$$

القسمة على  $x^3$

$$= \frac{-v^2 x^2}{v^2 x^3} dx + \frac{2x^3 dv}{v^2 x^3} = 0$$

$$= \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{2dv}{v^2} = c$$



$$-\ln x + 2 \int v^{-2} dv = c$$

$$-\ln x + 2 \frac{v^{-2+1}}{-1} = c \Rightarrow -\ln x - 2 \frac{1}{v} = \ln c$$

$$-2 \frac{x}{y} = \ln x + c$$

$$e^{-2 \frac{x}{y}} = e^{\ln x + c}$$

$e^{\ln x + c} = e^{\ln x} \cdot e^c$

$$e^{-2 \frac{x}{y}} = x e^c$$

فإنه،  $dx$

مثال/ أثبت أن المعادلة التالية متجانسة ثم اوجد حلها؟

$$x(1 + e^{y/x}) dy + (x - y) e^{y/x} dx$$

Sol:

$$M(x, y) = x(1 + e^{y/x})$$

$$M(tx, ty) = tx(1 + e^{ty/tx}) = tx(1 + e^{y/x})$$

$$N(x, y) = (x - y) e^{y/x}$$

$$N(tx, ty) = (tx - ty) e^{ty/tx} = t(x - y) e^{y/x}$$

المعادلة متجانسة من الدرجة 1، اوجد حلها:

$$y = vx, \quad v = \frac{y}{x}, \quad dy = v dx + x dv$$



$$X(1 + e^{\frac{v}{x}})(v dx + x dv) + (x - vx)e^{\frac{v}{x}}$$

$$X(1 - v)e^v dx + X[(v dx + x dv) + v e^v dx]$$

$$X e^v - x v e^v + x v dx + x^2 dv + v x e^v + x^2 e^v dv$$

$$X(e^v + v) dx + X^2(1 + e^v) dv = 0$$

$$1/X^2(v + e^v) \quad \text{de variabel}$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1 + e^v}{e^v + v} dv = \int 0$$

$$\ln|x| + \ln|e^v + v| = \ln c$$

$$\ln|x| + \ln\left/e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right| = \ln c$$

$$\int w, dk, \uparrow$$



## « معادلات تفاضلية تامة »

\* المعادلة التفاضلية بالصيغة  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  تكون تامة إذا كانت المشتقة الجزئية لـ  $M$  بالنسبة لـ  $y$  متساوية

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

\* لكل مثل هذه المعادلة هناك  $M(x,y)dx$  متكامل و  $N(x,y)dy$  متكامل، ثم نأخذ مجموعهم، فنحصل على المعادلة.

مثال/ أثبت أن المعادلة التفاضلية تامة ثم أوجد حلها

$$(2xe^y + e^x)dx + (x^2 + 1)e^y dy = 0$$

$$M(x,y) = 2xe^y + e^x, \quad N(x,y) = (x^2 + 1)e^y$$

$$\frac{dM}{dy} = 2xe^y + 0$$

$$\frac{dN}{dy} = x^2 e^y + e^y$$

$$\frac{dN}{dx} = x^2 + 0 + e^y \cdot 2x + 0$$

$$= 2xe^y$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

∴ المعادلة تفاضلية تامة.



$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= \int M(x,y) dx = \int (2xe^y + e^x) dx \\
 &= e^y \int 2x dx + \int e^x dx \\
 &= \frac{2x^2}{2} e^y + e^x = x^2 e^y + e^x
 \end{aligned}$$

$$g(x,y) = \int N(x,y) dy = \int (x^2 + 1) e^y dy$$

$$= \int x^2 e^y dy + \int e^y dy$$

$$g(x,y) = x^2 e^y + e^y$$

$$f(x,y) + g(x,y) = c$$

$$x^2 e^y + e^x + e^y = c$$

ملاحظة / تذكر، إذا  $M$  تفصل  $f$

تذكر، إذا  $N$  تفصل  $g$



$$(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0 \quad / d$$

Sol:

$$M(x,y) = 3e^{3x}y - 2x \quad N = e^{3x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3xe^{3x}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$f(x,y) = \int M(x,y) dx$$

$$= \int (3e^{3x}y - 2x) dx = y \int 3e^{3x} dx - 2 \int x dx$$

$$= ye^{3x} - \frac{2x^2}{2} = ye^{3x} - x^2$$

$$g(x,y) = \int N(x,y) dy = \int e^{3x} dy$$

$$= e^{3x} \int dy = ye^{3x}$$

$$ye^{3x} - x^2 = C$$



$$(\cos x + x \cos y - y) dy = y \sin x \sin y dx$$

Sol:-

$$\underbrace{(\cos x + x \cos y - y) dy}_{M dy} = \underbrace{y \sin x dx + \sin y dx}_{N dx} = 0$$

$$M(x, y) = -y \sin x + \sin y = \sin y - y \sin x$$

$$\frac{dM}{dy} = \cos y - \sin x$$

$$N(x, y) = \cos x - x \cos y - y$$

$$\frac{dN}{dx} = -\sin x + \cos y = 0$$

إذن الدالة  $\therefore \frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy} \therefore$

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx$$

نلاحظ ان الدالة لا تتغير / note

$$= \int (\sin y - y \sin x) dx$$

$$= \sin y \int dx - y \int \sin x dx \leftarrow \text{جربنا ان نكامل}$$

$$= x \sin y + y \cos x$$

$$g(x, y) = \int N(x, y) dy$$

$$= \int (\cos x + x \cos y - y) dy$$



$$= \cos x \int dy + x \int \cos y dy - \int y dy$$

$$= y \cos x + x \sin y - \frac{y^2}{2}$$

$$F(x, y) + g(x, y) = C$$

$$x \sin y + y \cos x - \frac{y^2}{2} = C \quad \text{إلى, إلى}$$

for



« المعادلة التفاضلية الخطية »

هذا النوع من المعادلات يكتب بالصيغة التالية :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x) \quad \text{--- (1)}$$

لزيادة حل لكل هذه المعادلة نتبع مايلي :

أخذ كل لاجب المعادلة ، ليصير صفرًا  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$

نقسم على  $\frac{dx}{y}$

ملاحظة / الاستيفاء غير مطلوب

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{y} + p(x)y \cdot \frac{dx}{y} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x) dx = 0$$

$$\ln y + \int p(x) dx = \ln C$$

$$\int p(x) dx = \ln C - \ln y$$

$$\int p(x) dx = \ln \frac{C}{y}$$



$$\frac{\int p(x)y dx}{e} = \ln \frac{C}{y}$$

$$\therefore C = y e^{\int p(x) dx} \quad \leftarrow \text{نضرب المعادلة}$$

$$d(C) = d\left(y e^{\int p(x) dx}\right)$$

$$0 = e^{\int p(x) dx} dy + y \times e^{\int p(x) dx} \times p(x) dx$$

$$0 = e^{\int p(x) dx} (dy + y p(x) dx)$$

$$e^{\int p(x) dx} \text{ نكامل } \leftarrow \text{نضرب المعادلة}$$

كل هذه المعادلة!

أولاً / نضرب المعادلة لتكامل  $e^{\int p(x) dx}$  ثم نقرب عامل التكامل في المعادلة (1) ثم نقول المعادلة (1) معادلة ثانية

$$\frac{\int p(x) dx}{y e} = e^{\int p(x) dx} Q(x) dx$$

معادلة  $p(x)/Q(x)$  دالة لـ  $x$  فقط  
 $Q(x)$

حالة



المعادلة التفاضلية، كـم، نـسـج

لـ / يجعل المعادلة، التفاضلية، كـم، نـسـج بالشكل

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$$

هنا / نوجد عامل التكامل  $e^{\int p(x) dx}$

الثاني / نضرب عامل التكامل في المعادلة، التفاضلية، فنقول كـم معادلة تامة

ثالثاً / نكامل، الطرفين لايجاد الحل

مثال ١ :  $x^2 dy - \sin 3x dx + 2xy dx = 0$

مثال ٢ : معادلة التفاضلية التامة :

$$x^2 dy - \sin 3x dx + 2xy dx = 0$$

نضرب المعادلة \*  $\frac{1}{x^2 dx}$

$$\frac{x^2 dy}{x^2 dx} - \frac{\sin 3x dx}{x^2 dx} + \frac{2xy dx}{x^2 dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\sin 3x}{x^2} + \frac{2y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{\sin 3x}{x^2}$$



$$P(x) = \frac{2}{x}, \quad Q(x) = \frac{\sin 3x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} I.F. &= e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \int \frac{dx}{x}} = e^{2 \ln x} \\ &= e^{\ln x^2} = x^2 \end{aligned}$$

del  $\frac{1}{x^2}$  dele  $\rightarrow$  I.F.  $y = \int \text{I.F. } Q(x) dx + C$

$$x^2 y = \int \cancel{x^2} \cdot \frac{\sin 3x}{\cancel{x^2}} dx + C$$

$$x^2 y = \int \sin 3x dx + C$$

$$x^2 y = \frac{1}{3} \int 3 \sin 3x dx + C$$

$$x^2 y = -\frac{1}{3} (\cos 3x) + C$$

$$\therefore y = \frac{C}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2} \quad \text{plw}$$