The Systems of Young and Fano : نظاما يونك و فانو

نظام يــونك : هو نظام بديهي يشمل على نفس بديهيات المستوى التآلفي ويشمل بالاضافة الى ذلك البديهية التالية :

بديهية (5) (اذا كان ℓ مستقيما في نظام يونك فأنه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على ℓ).

اذن نستنتج من اعلاه ان بديهيات نظام يونك هي :

١- أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط .
٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .
٣- يوجد في الاقل نقطة واحدة مثل A ويوجد في الاقل خط واحد مثل ℓ بحيث ان $A \notin \ell$
٤- اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط مثل m يمر من A ويوازي ℓ
٥- كل مستقيم في نظام يونك يحتوي على ثلاث نقاط على الاكثر .

بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على [كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط].

ملاحظة :- هذه البديهية بديهيه (5)مع البديهية (2) تجعل هذا النظام هندسة منتهية .

مبرهنة (10): يحتوي النظام على تسع نقاط فقط .

البرهان :

المطلوب اثباته : ان نظام يونك يحتوي بالضبط على ٩ نقاط

من البديهيه (3) في نظام يونك[**يوجد في الاقل نقطه مثل A_1 و مستقيم واحد في الاقل مثل ℓ**

بحيث ان $A_1 \notin \ell$]

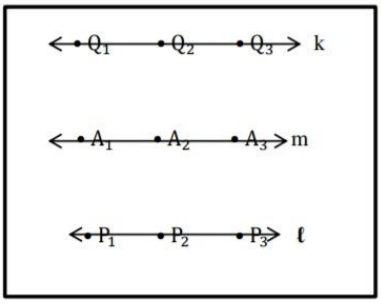
ومن البديهيه بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على [**كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط**]⇐ نستنتج ان المستقيم ℓ يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط ولتكن

من مبرهنه (8) [**اذا كان ℓ مستقيماً في مستوي التآلفي المنتهي يحتوي بالضبط على n من النقاط فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ]**

اذن نستنتج من مبرهنه (8) انه يوجد 2=1-3=1-n من المستقيمات الموازيه ℓ ولتكن m , k

ومن مبرهنه (6)[**في المستوى التآلفي المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان]**

⇐اذن نستنتج من مبرهنه (6) ان هذه المستقيمات متوازيه فيما بينها



ومن البديهيه بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على

[كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط]

⇐ نستنتج ان المستقيمان m ,k يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط

ولتكن A_3 ، A_2 ، A_1 على المستقيم m

و Q_3 ، Q_2 ، Q_1 على المستقيم k

⇐ اذن توجد في الاقل تسع نقاط في نظام يونك .

الان سنبرهن بانه توجد على الاكثر تسع نقاط في نظام يونك ؟

لو فرضنا وجود نقطه اخرى ولتكن P لا تقع على اي خط من تلك الخطوط

اذن حسب بديهيه (4) نستنج يوجد مستقيم اخر مثل n يمر من P

⇐ اذن اصبح هنالك ثلاث مستقيمات توازي ℓ وهذا يناقض مبرهنه (8)

⇐ اذن يوجد بالضبط تسع نقاط فقط في نظام يونك

وهو المطلوب .

مبرهنة (11): يحتوي النظام على اثنى عشر مستقيم فقط .

البرهان : من البديهيه (3) في نظام يونك[**يوجد في الاقل نقطه مثل A_1 و مستقيم واحد في الاقل مثل ℓ**

بحيث ان $A_1 \notin \ell$]

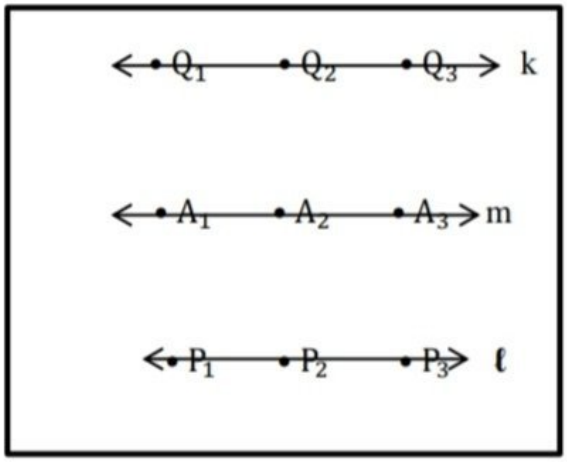
ومن البديهيه بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على [**كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط**]⇐ نستنتج ان المستقيم ℓ يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط ولتكن

من مبرهنه (8) [**أذا كان ℓ مستقيماً في مستوي التألفي المنتهي يحتوي بالضبط على n من النقاط فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازيه للمستقيم ℓ]**

اذن نستنتج من مبرهنه (8) انه يوجد n-1=3-1=2 من المستقيمات الموازيه ℓ ولتكن m , k

ومن مبرهنه (6)[**في المستوى التألفي المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان]**

⇐اذن نستنتج من مبرهنه (6) ان هذه المستقيمات متوازيه فيما بينها



ومن البديهيه بديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على

[كل مستقيم في نظام يونك يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط]

⇐ نستنتج ان المستقيمان k, m يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط

ولتكن A_1 ، A_2 ، A_3 على المستقيم m

و Q_1 ، Q_2 ، Q_3 على المستقيم k

ومن بديهيه(1)[اي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط]

⇐ وبما ان P_1 و Q_1 نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان P_1 و Q_2 نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان P_1 و Q_3 نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان P_2 و Q_1 نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان P_2 و Q_2 نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان P_2 و Q_3 نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان P_3 و Q_1 نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان P_3 و Q_2 نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ وبما ان P_3 و Q_3نقطتين مختلفتين اذن حسب بديهيه (١) يحتويهما مستقيم واحد فقط

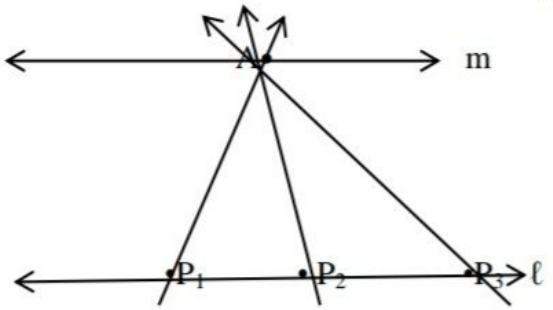
اذن نستنتج من اعلاه يوجد بالضبط اثنى عشر مستقيم فقط في نظام يونك .

وهو المطلوب

مبرهنة (12): اي نقطة يمر بها اربعة مستقيمات فقط

البرهان :

من بديهيه(3) **[توجد نقطه في الاقل مثل Aويوجد مستقيم في الاقل مثل ℓ**



بحيث ان A ∉ ℓ]

ومن بديهيه (٢+٥)**[كل مستقيم يحتوي بالضبط ثلاث نقاط]**

⇐ نستنتج ان المستقيم ℓ يحتوي على ثلاث نقاط بالضبط ولتكن

P_1, P_2, P_3

ومن بديهيه (1)[**اي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط]**

P_1 و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

و P_2 و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

و P_3 و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

⇐ نستنتج توجد ثلاث مستقيمات تمر من النقطه A وهي P_1A, P_2A, P_3A

ومن(بديهيه ٤)نستنتج انه يوجد مستقيم واحد فقط مثل m يمر من A ويوازي ℓ

اذن نستنتج انه توجد اربعة مستقيمات فقط تمر من النقطه A.

وهو المطلوب

نظام فـــانـــو :

هو نظام بديهي يشمل جميع بديهيات المستوي الاسقاطي بالاضافه الى البديهية (5) التي تم ذكرها في نظام يونك

اذن نستنتج ان بديهيات نظام فانو هي :

١- أي نقطتين مختلفتين في فانو نظامحتويهما مستقيم واحد فقط .
٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل .
٣- يوجد في الاقل نقطة واحدة مثل A ويوجد في الاقل خط واحد مثل ℓ بحيث ان A ∉ ℓ
٤- أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاقل
٥- كل مستقيم في نظام فانو يحتوي على ثلاث نقاط على الاكثر

من البديهيه (5)+ البديهية (2) نحصل على [كل مستقيم في نظام فانو يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط].

ملاحظه :

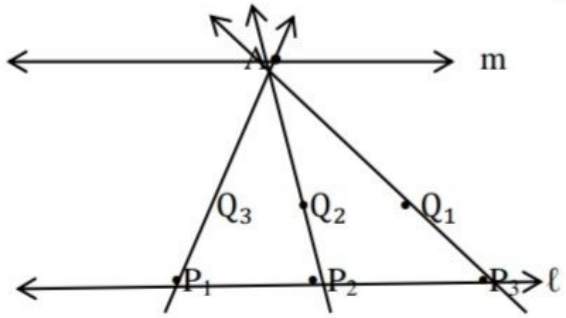
ان نظام فانو منتهي ايضا حيث ان المستقيم فيه يحتوي على ثلاثة نقاط فقط وعدد النقاط والخطوط فيه منتهي.

مبرهنة (13): يحتوي نظام فانو على سبعة نقاط فقط

البرهان:

من بديهيه(3) **[توجد نقطه في الاقل مثل Aويوجد مستقيم في الاقل مثل ℓ**

بحيث ان A ∉ ℓ]



ومن بديهيه (٢+٥)**[كل مستقيم يحتوي بالضبط ثلاث نقاط]**

⇐ نستنتج ان المستقيم ℓ يحتوي على ثلاث نقاط بالضبط ولتكن

P_1, P_2, P_3

ومن بديهيه (1)[**اي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط]**

P_1 و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

و P_2 و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

و P_3 و A نقطتين مختلفتين اذن يحتويهما مستقيم واحد فقط

ومن بديهيه (٢+٥)**[كل مستقيم يحتوي بالضبط ثلاث نقاط]**

⇐ كل مستقيم من هذه المستقيمات تحوي نقطه ثالثه ولتكن Q_1 ، Q_2 ، Q_3

⇐ نظام فانو يحتوي سبع نقاط فقط .

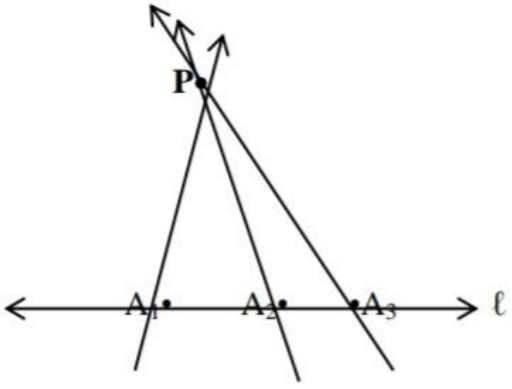
وهو المطلوب

مبرهنة (14): يحتوي نظام فانو على سبعة مستقيمات فقط .

مبرهنة (15): أي نقطة في نظام فانو يمر بها بالضبط ثلاث مستقيمات .

البرهـان : ليكن P نقطه في نظام فانو

المطلوب اثباته:- يوجد في ثلاث مستقيمات فقط يمرون في النقطه P



من البديهية (3) **[توجد في الاقل نقطة واحدة**

ويوجد في الاقل خط واحد بحيث ان النقطه لا تنتمي الى المستقيم]

⇐ يوجد مستقيم مثل ℓ ونقطه مثل Pبحيث ان $P \notin \ell$

كذلك من البديهية (2 +5)

⇐ توجد ثلاثة نقاط بالضبط على المستقيم ℓ ولتكن A_1, A_2, A_3

من البديهية (1)[**أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط]**

⇐ توجد ثلاث مستقيمات فقط وهي PA_1, PA_2, PA_3 التي تمر من P وتكون مختلفة

اذن النقطه P يمر بها ثلاث مستقيمات فقط .

الفصل الاول

الأنظمة البديهية

مكونات النظام البديهي (تعاريف ، مجموعة بديهيات ومبرهنات)

التعاريف : أي تعريف لاي مصطلح في الرياضيات يجب ان يعبر عنه ببساطة ، ان يكون غير دوري ويصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها .

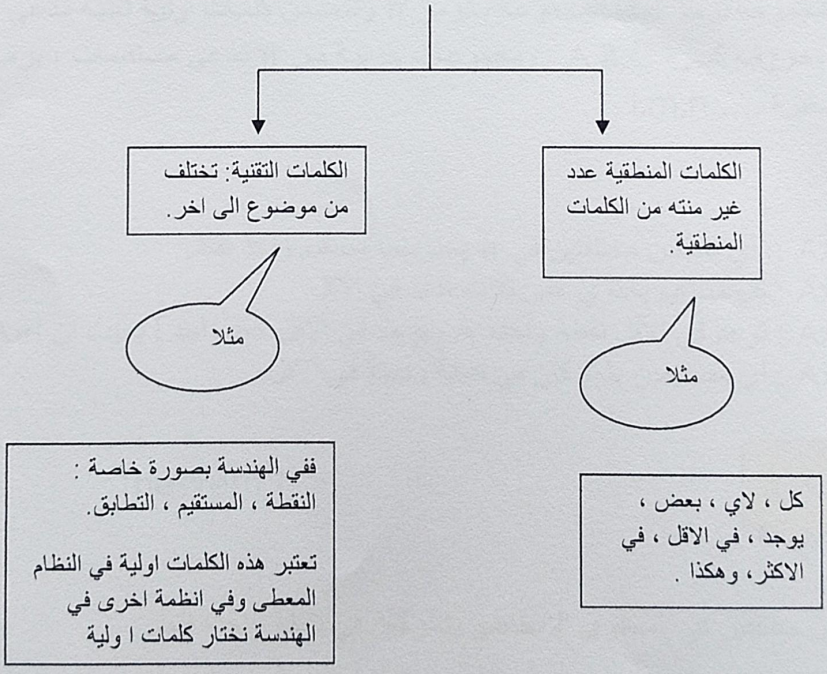
فالبساطة : تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات ابسط منها ، أي بكلمات معروفة.

الدورية : عند تعريف كلمة ما فاننا سنمر بسلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة .

الوصف الوحيد : ان التعريف الدقيق لكلمة ما يجب ان يصف هذه الكلمة بطريقة بحيث لاينطبق هذا الوصف على كلمة اخرى .

لحل هذه المشكلة : نختار بعض الكلمات بدون تعريف لتكون كلمات اولية او كلمات غير معرفة وبدلالتها تعرف بقية الكلمات او المصطلحات في النظام .

الكلمات الاولية



البديهيات Axioms

البديهية : "هي بعض العبارات البسيطة التي تتعلق بالكلمات الاولية كاساس ومنها نستنتج العبارات الاخرى في النظام .هذه العبارات الاساسية التي نتقبلها بدون برهان تدعى بديهيات والتي هي حجر الاساس للبناء" .

- لقد عرف هلبرت البديهية في نظامه البدهي للهندسة الاقليدية مايلي: " اذا اخذنا بعض الكلمات لتكون اولية ، فان البديهيات هي مجرد فرضيات حول تلك الكلمات الاولية ".
  الكلمات الاولية مجرد متغيرات ⟵ البديهيات جمل مفتوحة وبالتالي لايمكن ان يقال انها اما صائبة او خاطئة ، وعليه فان البديهية" هي عبارة اما صائبة او خاطئة تقبل بدون برهان".

المبرهنة Theorem

هي النتيجة التي نحصل عليها من بديهيات النظام او من عبارات في هذا النظام .

امثلة عن انظمة بدهية منتهية (تحتوي عدد منته من العناصر)

تعتمد على النقطة والمستقيم ككلمات اولية.

اولا: المستوى الاسقاطي : Projective Plane

يتكون من مجموعة نرمز لهذه المجموعة بالرمز π وتتضمن كلمات اولية تقنية تدعى نقاط ،يرمز لها بحروف كبيرة A,B,C ومجموعات جزئية من π تدعى مستقيمات ، يرمز لها بحروف صغيرة .... l,m,n .

البديهيات :

- Ax1 : أي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما مستقيم واحد فقط.
- Ax2 : كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
- Ax3 : توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد l بحيث ان $A \notin l$.
- Ax4 : أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.

مبرهنة رقم (١): Theorem 1:

أي مستقيمين مختلفين في المستوى الاسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط.

البرهان:

ليكن l,m مستقيمين مختلفين في π .

l,m مختلفين يعني ان l ≠ m .

من Ax4 توجد نقطة A بحيث ان A تنتمي الى l و Aتنتمي الى m.

نفرض انه توجد نقطة اخرى B تختلف عن A بحيث ان B تنتمي الى l و B تنتمي الى m .

فانه من Ax1 ، l=m. وهذا تناقض مع الفرض (l≠m) .

وبهذا فان l,m يشتركان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة رقم (٢):

Theorem 2:

أي نقطة في المستوى الاسقاطي هي عنصر لثلاثة خطوط في الاقل.

البرهان:

لتكن P أي نقطة في π

من Ax3 ، يوجد مستقيم l ، بحيث ان P ∉ l .

من Ax2 ، توجد ثلاث نقاط في الاقل على المستقيم l ولتكن A1,A2,A3 .

من Ax1 ، توجد الخطوط PA1,PA2,PA3 التي تمر من P وتكون مختلفة (السبب؟).

ملاحظة : نقصد بقولنا ان النقطة هي عنصر من مستقيم ما ، بانها(تقع على المستقيم ، يمر بها المستقيم)

مستويات اسقاطية منتهية:

المستوى الاسقاطي المنته :هو مجموعة منتهية تحقق البديهيات اعلاه.

مبرهنة رقم (٣):

Theorem 3:

اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مستقيم لمستوي اسقاطي منته . فان المستوي يحتوي بالضبط على $n^2 - n + 1$ من النقاط.

البرهان:

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط، ولتكن P1,P2,.....Pn .

من Ax3 ، توجد نقطة P لاتقع على l .

ومن Ax1 ، توجد n من الخطوط المختلفة PP1,PP2,PP3,.....PPn . ومن Ax2 ، توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط، ولتكن Q1,Q2,.....,Qn على التوالي.

ناخذ النقطة Q1 ونصلها بالنقاط P1,P2,..... Pn .

فنحصل على n من الخطوط Q1P1,Q1P2,.....,Q1Pn هذه الخطوط تقطع PP2 في n من النقاط المختلفة.(كيف)؟

لذلك PP2 يحتوي على n-1 من النقاط عدا P . ان هذا يصح لكل من المستقيمات PP1,PP2,.....PPn . وبهذا ، n من الخطوط ، وكل خط منها يحتوي على n-1 من النقاط، ومع النقطة P ، يحتوي المستوي على n^2-n+1 =1+(n-1)n من النقاط في الاقل.

لكي نبرهن ان المستوي يحتوي على n^2-n+1 من النقاط على الاكثر ، نفرض وجود نقطة اخرى Q ، لاتقع على أي خط من تلك الخطوط. الخط QP يختلف عن الخطوط المذكورة. من Th 1 QP يقطع l في نقطة Pn+1 التي تختلف عن النقاط P1,P2,.....Pn. وبهذا يحتوي l على n+1 من النقاط وهذا يخالف الفرض.

نستنتج من المبرهنة اعلاه النتيجة التالية:

نتيجة: اذا كان في المستوي الاسقاطي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط ، فان أي مستقيم اخر يحتوي بالضبط على n من النقاط.

تمرين : في المستوي الاسقاطي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ، برهن كل مما يلي :

١) أي مستقيم في النظام يحتوي بالضبط على n من النقاط .

٢) أي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات.

٣) يوجد بالضبط n^2-n+1 من المستقيمات في النظام.

ثانيا: المستوى التالفي : Affine Plane

يتضمن المستوى التالفي من مجموعة α من كلمات اولية تقنية تدعى نقاط ، ومجموعات جزئية من α تدعى مستقيمات ،والتي هي ايضا تقنية.

ملاحظة: سنرمز للنقاط والمستقيمات في α نفس الرموز المستخدمة في النظام الاسقاطي.

- Ax1: أي نقطتين مختلفتين A,B في α يحتويهما مستقيم واحد فقط.
- Ax2 :كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
- Ax3 :يوجد في الاقل نقطة واحدة A ومستقيم واحد l بحيث ان $A \notin l$.
- Ax4 :اذا كان l مستقيما و A نقطة بحيث ان $A \notin l$ ،فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $l \cap m = \phi$.

تعريف رقم (١):

يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان ، اذا كان $l \cap m = \phi$.

اذن يمكن ان نعيد نص بديهية رقم ٤ بالشكل التالي:"اذا كان l مستقيما و A نقطة بحيث ان $A \notin l$، فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يمر من A ويوازي l ".

مبرهنة رقم (٤): Theorem 4:

أي مستقيمين مختلفين في مستوى تالفي يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر .

البرهان :

نفرض ان العبارة خطا. فيوجد مستقيمان مختلفان l,m يشتركان في نقطتين في الاقل ، ولتكن Q&P . ولكن هذا يناقض Ax1 ، حيث ان Q&P تقعان على المستقيمين l,m ، وان Ax1 تنص على انه لكل نقطتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما .

لذلك، فان فرضيتنا تؤدي الى تناقض . وبهذا فان أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر. أي ان ، أي مستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة رقم (٥): Theorem 5:

اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين ،فانه يجب ان يقطع الاخر.

البرهان:

ليكن l,k مستقيمين متوازيين، وان m مستقيم اخر يقطع k في نقطة P. يجب ان نبرهن ان m يقطع l في نقطة ما. نفرض ان العبارة خطأ، أي ان m يوازي l، فانه من Pسيكون هنالك المستقيمان k,m يوازيان l ، وهذا يخالفAx4. لذلك فان الفرض يجب ان يكون خاطئا. وهكذا ، اذا قطع خط احد مستقيمين متوازيين، فانه يجب ان يقطع الاخر.

مبرهنة رقم (٦):

Theorem 6:

المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان.

البرهان:

ليكن kوا مستقيمين متوازيين ، و m,امستقمين متوازيين . يجب ان نبرهن ان kوm متوازيان.

نفرض ان العبارة خطأ. فاذا كان k لايوازي m ، فانه يقطع m. ومن Th 5، فان k يجب ان يقطع ا، وهذا يناقض الفرض بان k يوازي ا .وهذا يؤدي الى تناقض مع فرضيتنا.

تمارين وسوة

(١-١)

س١/ في المستوى التآلفي اذا وجد مستقيم كتوي بالضبط على n من النقاط فبرهن الاتي:

ب) اي نقطة تمر بها بالضبط $n+1$ من المستقيمات

البرهان:

لتكن P نقطة، l مستقيم بحيث $P \notin l$ حسب (ب٣)

$\therefore$ المستقيم كتوي على n من النقاط ولتكن $P_1, P_2, \dots P_n$

و $PP_1, PP_2, \dots PP_n$ مستقيمات.

$\therefore$ اصبح لدينا n من المستقيمات المارة بالنقطة P.

ليكن m مستقيم يوازي l ويمر بالنقطة P حسب (ب٤)

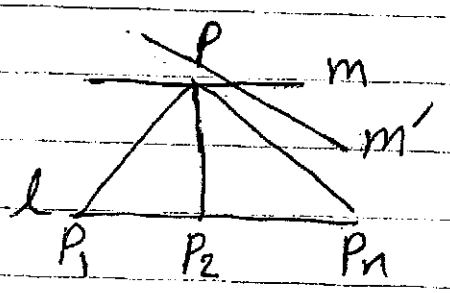
نفرض يوجد مستقيم اخر يمر بالنقطة P ولتكن m'

اذا m' يوازي l فانه يجب ان ينطبق على m

واذا كان m' لا يوازي l فانه سوف يقطعه في نقطة ولتكن P_{n+1} وهذا تناقض لان المستقيم l كتوي بالضبط على n من النقاط.

$\therefore$ P يمر بها $n+1$ من المستقيمات بالضبط.

و.ط.م.



ب) يوجد بالضبط n^2 من النقاط في النظام

البرهان: لتكن P نقطة في المستوى التآلفي
∴ يوجد $n+1$ من المستقيمات المارة بالنقطة P
حسب [اي نقطة تمر بها بالضبط $n+1$ من المستقيمات]
وكل مستقيم يوجد به $n-1$ من النقاط يمر بالنقطة P

∴ عدد النقاط في المستوى
$(n+1)(n-1)+1 = n^2-1+1 = n^2$

ج) يوجد بالضبط $n(n+1)$ من المستقيمات في النظام

البرهان:- لتكن P نقطة في مستوى التآلفي
∴ يوجد $(n+1)$ من المستقيمات تمر بـ P حسب [اي نقطة تمر بها بالضبط $n+1$ من المستقيمات]
نفرض l مستقيم يمر بالنقطة P
∴ يوجد بالضبط $(n-1)$ من المستقيمات الموازية للمستقيم l حسب [مبرهنة ~~[illegible]~~ اذا وجد مستقيم يحوي بالضبط على n من النقاط فانه يوجد n من المستقيمات الموازية له]
∴ عدد المستقيمات الموجودة في النظام بالضبط $n(n+1)$

لكل مستقيم يمر بالنقطة P يوجد n من المستقيمات الموازية من ضمنها ذلك المستقيم

ليكن m مستقيم اخر
∴ من النقطة P يوجد مستقيم يوازي m
∴ يجب ان ينطبق على احد المستقيمات المتوازية

∴ يوجد بالضبط $n(n+1)$ من المستقيمات

و. هـ. م

سـ٢ : في المستوي الاسقاطي اذا وجد مستقيم كتوي بالضبط على n من النقاط فبرهن الاتي :-

أ) اي مستقيم في النظام كتوي بالضبط على n من النقاط

البرهان :- نتيجة مبرهنة ٣سـ٣

اذا كان في المستوي الاسقاطي مستقيم كتوي بالضبط على n من النقاط فان اي مستقيم اخر كتوي على n من النقاط

ب) اي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات

البرهان : لتكن P نقطة ، l مستقيم ، $P \notin l$ حسب (ب ٣)

عدد نقاط l هو n من النقاط ولتكن $P_1, P_2, \dots P_n$

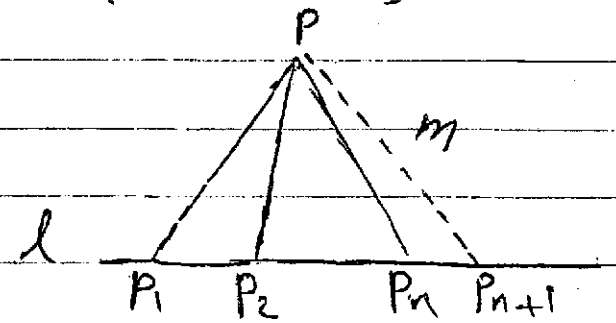
ولتكن $PP_1, PP_2 \dots PP_n$ هي مستقيمات المارة بالنقطة P حسب (ب ١)

فيصبح لدينا n من المستقيمات المنتهية بالنقطة P

m تقطع l بنقطة P_{n+1}

∴ l كتوي على $n+1$ من النقاط وهذا تناقض

∴ يوجد بالضبط n من المستقيمات المارة بالنقطة P



د) يوجد بالضبط n^2-n+1 من المستقيمات في النظام

البرهان :-

لتكن P نقطة، l مستقيم بحيث $P \notin l$ حسب (ب ٣)

∴ يوجد n من المستقيمات المارة بالنقطة P حسب (شرط ب)

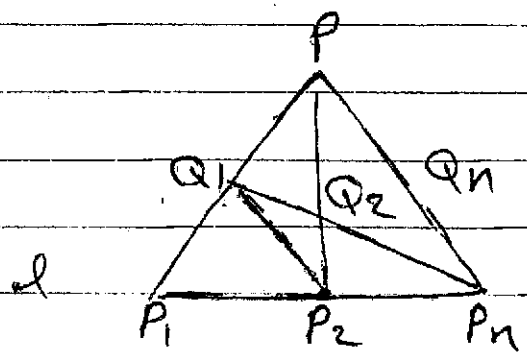
[أي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات.]

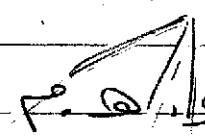
توجد Q_1 على المستقيم PP_1 حسب (ب ٢)

من النقطة Q_1 يوجد $(n-1)$ من المستقيمات عدا المستقيم (P_1Q_1)

∴ عدد المستقيمات $n(n-1)+1$

$= n^2-n+1$





الفصل الثاني: خواص النظام البديهي

للنظام البدهي ثلاث خواص :

أولا: الاتساق .

ثانيا: الاستقلالية.

ثالثا: التمامية.

قبل تعريف الاتساق ، سنتطرق لذكر نص قانوني المنطق التاليين

قانون التناقض : لاتوجد عبارة يمكن أن تكون صائبة وخاطئة معا.

قانون الوسط الاستثنائي: أية عبارة اما تكون صائبة او خاطئة .

اولا: الاتساق Consistency " يكون النظام البدهي متسقا اذا وفقط اذا لاتوجد في النظام أي بديهيتين ، او أي بديهية ومبرهنة ، أو اي مبرهنتين صائبة وخاطئة معا او بالشكل p ,~p".

نستنتج من ذلك ان الاتساق صفة أساسية لأي نظام بدهي .

- ***تفسير نظام بديهي*** هو إعطاء معاني للكلمات الأولية التقنية مثل (النقطة، المستقيم ،....) بطريقة بحيث تصبح البديهيات إما صائبة أو خاطئة.

  مثال: النقاط ⟵ أشخاص

  الخطوط ⟵ (مجموعة من الأشخاص كجمعيات ، لجان ، نوادي ، ...،الخ).

- ***النموذج (model):*** هو التفسير الذي يجعل كل بديهية في مجموعة من البديهيات صائبة .

  مثال: (٥ نقاط ، ومستقيمان)

  A B C

  A D E

طريقة اختبار الاتساق:

إيجاد نموذج واقعي (من عالمنا الحقيقي)يعطي معاني للكلمات الأولية في النظام المكونة ((للبديهيات)) ، بحيث تكون مجموعة البديهيات متسقة (أي تصبح البديهيات صائبة).

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات ، فان جميع البديهيات في النظام تكون عبارات صحيحة. وبما ان المبرهنات تستنتج من البديهيات ، فان المبرهنات تصبح عبارات صحيحة .

نماذج عن الاتساق

فيما يلي نموذج يبين ان المستوى التالفي متسق:

نموذج (١) : حيث يحقق بديهيات المستوى التالفي

نفرض ان كلية التربية قد كرمت الثلاثة الأوائل في كل من المراحل : الثانية، الثالثة والرابعة ، وتقرر إيفادهم الى تسع دول لغرض الاطلاع . وقسمت اللجان الى مجموعات مكونة من ثلاثة اعضاء ، بحيث ان طالبا واحدا من كل مرحلة في لجنة . وان كل لجنة من اللجان الثلاثة تقضي أسبوعا واحدا في دولة ، ثم يعاد تشكيل اللجان وبطريقة انه لايشترك طالبان في لجنتين معا. ثم تقضي اللجان الجديدة أسبوعا واحدا في ثلاث دول أخرى (أي ان كل لجنة في دولة واحدة).

ومن اجل التوضيح

طلبة المرحلة الثانية: A,B,C

طلبة المرحلة الثالثة:D,E,F

طلبة المرحلة الرابعة:G,H,I

مصر : A ,D, G

الاردن: B ,E, H

اليمن: C ,F ,I

السودان: A ,E, I

الجزائر: B ,F,G

تونس: C ,D,H

المغرب: A ,F, H

ايطاليا: B ,D,I

فرنسا: C ,E, G

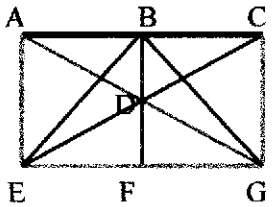
في هذا النموذج تفسر النقاط بالطلاب والمستقيمات باللجان.

نموذج يبين ان المستوى الاسقاطي هو نظام متسق:

نموذج (٢):(٧ نقاط ، ٧ مستقيمات)، حيث ان بديهيات المستوى الاسقاطي متحققة .
نفرض ان الهيئة التدريسية في قسم الرياضيات في كلية التربية تتكون من سبعة اعضاء . وان القسم قد قرر تاليف لجان لوضع مناهج في مواضيع معينة في الرياضيات . لقد اتفق على ان تتألف كل لجنة من ثلاثة اعضاء ، بحيث لايشترك اثنان في لجنتين معا وبالشكل التالي:

اللجان	الأعضاء
الهندسة	A,B,C
التفاضل	B,D,F
التبولوجي	C,D,E
التحليل الرياضي	D,A,G
الجبر الخطي	E,A,F
المعادلات التفاضلية	F,G,C
اسس الرياضيات	G,E,B

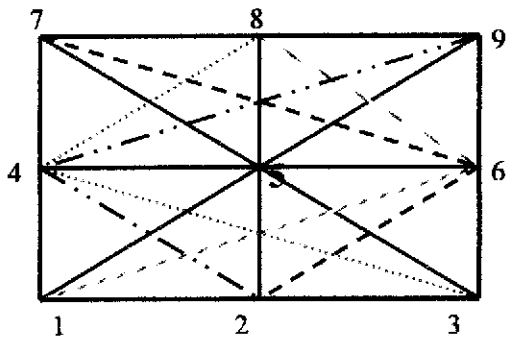
في هذا النظام تفسر النقاط بالاعضاء والمستقيمات باللجان



نموذج يبين ان نظام يونك متسق

نموذج (٣): حيث ان جميع بديهيات النظام متحققة ، كما موضح ادناه
٩ نقاط ، ١٢ مستقيم

7	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
8	5	4	5	6	6	5	4	4	5	6	2
9	6	8	7	9	7	8	9	7	9	8	3

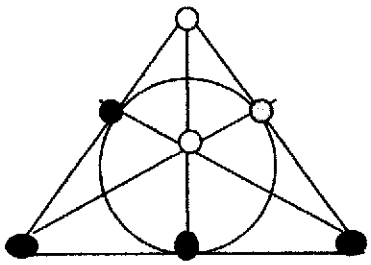


نموذج يبين ان نظام فانو متحقق

نموذج (٤):حيث نلاحظ ان بديهيات نظام فانو متحققة في الشكل ادناه

يقوم صاحب محل صياغة بصنع حلية مكونة من سبع خرزات مختلفة الالوان ، وقد ربطها بسبعة اسلاك بحيث انه توجد ثلاث خرزات في كل سلك وثلاثة اسلاك في كل خرزة ، الالوان : الاصفر ، الاحمر، البرتقالي، الابيض، البنفسجي، السماوي والاخضر.

ان الحلية بدت كما في الشكل التالي: (تفسر النقطة على انها خرزة، والمستقيم بسلك).



1	1	1	2	3	3	6
2	5	4	5	5	6	4
3	6	7	7	4	7	2

ثانيا: الاستقلالية:(Independence)

ليكن النظام البديهي X نظام متسق ، فان النظام البديهي X يكون مستقلا(Ind) اذا كان كل بديهية مستقلة بذاتها، أي لايمكن استخراجها من البديهيات الاخرى في النظام .

كيفية اثبات استقلالية بديهية في نظام معين.

يجب تصميم نموذج (model) يحقق كل البديهيات في النظام ماعدا هذه البديهية(Ax:u)وفي الوقت نفسه فان النموذج يحقق نفي هذه البديهية (~Ax:u).

ولذلك لكي نبرهن استقلالية نظام ما ، يجب تصميم عدد من النماذج للصفات نفسها مساوي لعدد بديهيات النظام .

نوضح ذلك بالمثال الاتي (الذي يعتبر كطريقة لاختبار الاستقلالية) :

١) اذا كانت مجموعة البديهيات ادناه

S1={A1,A2,.....,Ai,....,An}

مجموعة متسقة، العبارة المراد اختبار استقلاليتها(والتي هي Ai) تبدل بنفيها مكونة مجموعة جديدة من بديهيات النظام + العبارة المنفية ، كما موضح ادناه.

٢) المجموعة {S2={A1,A2,....,~Ai,..... ,An مجموعة متسقة ، فان Ai تكون مستقلة.

البرهان:

لو افترضنا ان البديهية Ai غير مستقلة وانها تنتج من البديهيات . A1,A2,...,Ak,.., An ولكن

{S2={A1,A2,.....,Ak ,~Ai ,An متسق ، وهذا تناقض ؟

اذن Ai مستقلة.

مثال : اثبت ان النظام التالفي هو نظام مستقل (كل بديهية في المستوي التالفي مستقلة) .

الحل : في البداية نتاكد من اتساق النظام ،من المعروف ان المستوى التالفي متسق

١) استقلالية Ax1 (أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط).

ناخذ ~Ax1 + مع البديهيات الاخرى تحقق الاتساق.

Ax2 (كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل). متحققة

Ax3 (يوجد في الاقل نقطة واحدة A ومستقيم واحد l بحيث ان A لاتنتمي الى l). متحققة

Ax4 (A لاتنتمي الى l ، فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان l تتقاطع مع m تكون مجموعة خالية) . متحققة

النموذج يجب ان يحقق نفي بديهية واحد + باقي البديهيات الاخرى:

I={1,2,3}

m={4,5,6}

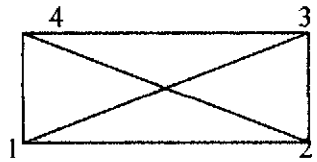
1 4

2 5

3 6

٢) استقلالية Ax2 (كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل)

النموذج (٤ نقاط ، ٦ مستقيمات)



Ax1 متحققة

Ax2~ +البديهيات الاخرى تحقق الاتساق.

= Ax3

= Ax4

٣) استقلالية البديهية Ax3 (يوجد في الاقل نقطة واحدة A ومستقيم واحد l بحيث ان A لاتنتمي الى l).

النموذج (٣ نقاط ، خط واحد)

Ax1 متحققة

= Ax2

Ax3~ + البديهيات الاخرى تحقق الاتساق.

= Ax4

٤) استقلالية Ax4 (A لاتنتمي الى l ، فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان l تتقاطع مع m تكون مجموعة خالية) .

نأخذ أي نموذج لاتساق المستوى الاسقاطي ومن ضمنها نظام فانو، ففي تلك النماذج (اي مستقيمين يتقاطعان، لذلك لاتوجد خطوط متوازية).

~Ax4 + البديهيات الاخرى تحقق الاتساق.

Ax1 متحققة

= Ax2

= Ax3

مثال :فيما يلي اختار نماذج مبينا استقلال كل بديهية في المستوي الاسقاطي.

أ) $l = \{1,2,3,4\}$

ب) $n = \{1,3,4\}, m = \{1,2,3\}, k = \{1,2,4\}, s = \{2,3,4\}$

ج) $l = \{1,2,3\}, m = \{4,5,6\}$

د)

2	1	1	1
3	3	2	

يجب أن نلاحظ قبل الحل إن النظام وبديهياته متسق.

الحل: ب) تحقق ~Ax1 + (Ax2,A3,Ax4) (تحقق الاتساق أيضا)

د) تحقق ~Ax2 + (Ax1,Ax3,Ax4) (تحقق الاتساق أيضا)

ج) تحقق ~Ax4 +(Ax1,Ax2,Ax3) (تحقق الاتساق أيضا)

أ) تحقق ~Ax3 +(Ax1,Ax2,Ax4) (تحقق الاتساق أيضا)

ملاحظة: الاستقلالية خاصية غير أساسية ، حيث إذا وجدت إحدى البديهيات غير مستقلة،(أي إنها مبرهنة) ، توضع في مجموعة المبرهنات.

س// لاحظ النظام البديهي التالي:

البديهيات:

١) أي مستقيمين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

٢) كل نقطة يمر بها مستقيمان فقط.

٣) توجد بالضبط أربعة مستقيمات في هذا النظام.

أولا: بين إن النظام متسق.

ثانيا: حاول إيجاد نماذج لاستقلال كل بديهية في هذا النظام.

ثالثا": الكمال أو التمام (completeness)

يقال عن النظام البديهي S انه غير تام إذا أمكن إضافة بديهية مستقلة أخرى للنظام مع إبقاء النظام متسق.

تعريف :

يكون النظام البديهي تاما إذا استحالة إضافة بديهية مستقلة للنظام.

التشاكل: isomorphism

ليكن f تطبيق $f : A \to B$ يقال عن f تشاكل اذا حقق الشروط التالية

١) f is $1-1$

٢) f is onto

٣) f يحفظ العلاقة اي $(x \in l \to f(x) \in f(l))$

تعريف : يقال عن نموذجين لنظام بديهي انهما متشاكلين تقابليا (isomorphic) بالنسبة لذلك النظام اذا وجد على الاقل تقابل احادي واحد بين عناصر النظام بحيث يحفظ العلاقات.

مثال:

ليكن M1, M2 نموذجين لنظام معين يحتويان على عدد متساو من العناصر . ان كل عنصر في M1 يقابل عنصرا معينا في M2 وبالعكس ، في هذه الحالة ، يقال انه يوجد تناظر متابين (تقابل – احادي) بين M1,M2 يقال عن التقابل الاحادي بين عناصر M1,M2 انه يحفظ العلاقات (preserve relations) اذا كانت كل عبارة صحيحة حول عناصر M1 هي ايضا صحيحة حول العناصر المقابلة لها في M2 .

تعريف:

عندما يكون أي نموذجين في النظام البديهي متشاكلين تقابليا ، فان النظام يقال انه فصيلي (categorical).

طريقة اختبار التمامية: (مبرهنة)

لكي نثبت ان النظام البديهي تاما ، يجب ان نبرهن ان النظام فصيلي (بتعبير اخر عندما يكون أي نموذجين في النظام متشاكلين تقابليا ، فان النظام يكون تاما).

البرهان :

نفرض ان انظام البديهي S={A1,A2,.....,An-1} المتسق

هو نظام فصيلي ، لكنه غير تام (أي يمكن اضافة بديهية مستقلة للنظام ولتكن An)، فان :

١) المجموعة S1={A1,A2,.....,An} تكون متسقة.

٢) المجموعة S2={A1,A2,.....,~An} تكون متسقة لذلك، فانه يوجد نموذجان للمجموعتين ١) و٢) .

بما ان النظام فصيلي

اذن يوجد تشاكل تقابلي بين هذين النموذجين .

ميزة التشاكل انه يحفظ العلاقات

اذن كل عبارة في نموذج مع العبارة المناظرة لها في النموذج الاخر ، اما كل منهما صائبة او كل منهما خاطئة . وهذا تناقض ، حيث انه من الفرض An تكون صائبة في نموذج و ~An صائبة في النموذج الاخر!

اذن النظام تام.

مثال:اثبت ان النظام التالفي هونظام تام

الحل: ناخذ النموذجين التالين في المستوي التالفي:

النموذج الاول (٩ نقاط ، ١٢ خط اومستقيم)

k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10	k11	k12
A	D	G	A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	E	H	D	E	F	E	F	D	F	D	E
C	F	I	G	H	I	I	G	H	H	I	G

النموذج الثاني (٩ نقاط ، ١٢ خط او مستقيم)

k*1	k*2	k*3	k*4	k*5	k*6	k*7	k*8	k*9	k*10	k*11	k*12
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	7	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	6	9

لوضع تقابل احادي بين النموذجين ، ناخذ التقابل التالي:

A=1
B=2
C=3
D=4
E=5
F=6
G=7
H=8
I=9

هذا التقابل يجب ان يحفظ العلاقة ، فمثلا بما ان A,B,C تقع على المستقيم k1 ، يجب ان نتاكد من وجود مستقيم في النموذج (٢) يحتوي على العناصر المقابلة لهذه النقاط ، أي يوجد مستقيم يحتوي على النقاط 1,2,3 لكن لايوجد مثل هذا المستقيم في نموذج رقم (٢) .

اذن التقابل لايحفظ العلاقات.

أي ان :

k1 ⟶
k2 ⟶
k3 ⟶
k4 ⟶
k5 ⟶
k6 ⟶
k7 ⟶
k8 ⟶
k9 ⟶ k*8
k10 ⟶
k11 ⟶
k12 ⟶ k*9

ولو اخذنا التقابل التالي :

A=1
B=2
C=4
D=5
E=3
F=7
G=8
H=9
I=6

نلاحظ هذا التقابل (بحيث يجب ان يحفظ العلاقات) فمثلا بما ان A,B,C تقع على المستقيم k1 ، فيجب ان يكون هناك مستقيم يناظر k1 بحيث يحتوي على النقاط 1,2,4 .
كما يوجد تناظر لبقية المستقيمات كما مبين ادناه:

k1 ⟷ k*1
k2 ⟷ k*9
k3 ⟷ k*12
k4 ⟷ k*3
k5 ⟷ k*5
k6 ⟷ k*11
k7 ⟷ k*2
k8 ⟷ k*7
k9 ⟷ k*10
k10 ⟷ k*4
k11 ⟷ k*6
k12 ⟷ k*8

اذن يوجد تشاكل .

مثال : نفرض ان مايلي ، هو نموذج لمستوي تالفي:

l	k	j	i	h	g	f	e	d	c	b	a
5	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
6	7	6	5	4	7	5	4	8	6	4	2
9	8	8	7	9	9	8	6	9	7	5	3

جد تقابل احادي يحفظ العلاقات بينه وبين النموذج التالي:

l^*	k^*	j^*	i^*	h^*	g^*	f^*	e^*	d^*	c^*	b^*	a^*
6	4	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1
8	7	5	5	4	7	5	3	7	5	3	2
9	6	9	7	8	8	6	9	9	8	6	4

الحل:

$1 \leftrightarrow 1$

$2 \leftrightarrow 2$

$3 \leftrightarrow 4$

$4 \leftrightarrow 3$

$5 \leftrightarrow 6$

$6 \leftrightarrow 9$

$7 \leftrightarrow 7$

$8 \leftrightarrow 5$

$9 \leftrightarrow 8$

وبالتالي:

$i \leftrightarrow k^*$

$j \leftrightarrow j^*$

$k \leftrightarrow i^*$

$l \leftrightarrow l^*$

$e \leftrightarrow e^*$

$f \leftrightarrow f^*$

$g \leftrightarrow g^*$

$h \leftrightarrow h^*$

$a \leftrightarrow a^*$

$b \leftrightarrow b^*$

$c \leftrightarrow d^*$

$d \leftrightarrow c^*$

الفصل الرابع

أسس الهندسة

من الفصل الرابع يبتدئ تقويم الهندسة الاقليدية وينتهي بالفصل السابع , حيث سنطرح نظام هلبرت للهندسة الاقليدية نسبة الى العالم الالماني دافيد هلبرت (1862- 1943) حيث قدم نظاما بدهيا متكاملا الذي استنتج منه الهندسة الاقليدية . لقد صحح الاخطاء والعيوب التي رافقت اعمال اقليدس .

يتالف النظام من مجموعتين من البديهيات.

اولا : بديهيات الوقوع والوجود

Ax1 :لكل نقطتين مختلفتين معلومتين , يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.

Ax2 : كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل.

Ax3 : لكل مستقيم معلوم , توجد في الاقل نقطة واحدة لاتنتمي اليه .

Ax4 : يوجد في الاقل مستقيم واحد.

تعريف تكون المجموعتان متساويتين اذا وفقط اذا احتوتا بالضبط على نفس العناصر.

مبرهنة 1 :

توجد في الاقل ثلاث نقاط في النظام .

البرهان:

حسب Ax4 : يوجد l مستقيم .

حسب Ax3 : توجد $P \notin l$.

حسب Ax2 : l يحتوي على نقطتين مختلفتين A,B .

اذن توجد على الاقل ثلاث نقاط مختلفة.

🔔 **ملاحظة مهمة:** يرمز للنقاط باحرف كبيرة A,B,C,.... وللمستقيمات يرمز لها باحرف صغيرة l,m,n,... .

مبرهنة 2 :

أي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان:

نفرض ان l,m مستقيمين مختلفين , أي ان $l \neq m$.

ولتكن A,B نقطتين بحيث ان $A,B \in (l,m)$.

من Ax1 : نحصل على ان $l = m$, تناقض مع الفرض.

ثانيا : بديهيات الترتيب Axioms of order

ان بديهيات الوقوع والوجود ليست كافية لاشتقاق بعض المبرهنات المعروفة في الهندسة الاقليدية وليست كافية لوجود اكثر من نقطتين على خط ولا وجود عدد غير منته من النقاط على الخط, ولاتضمن وجود عدد غير منته من النقاط بين أي نقطتين , ولايمكن ان تكلم عن نقطة بين نقطتين , ولايمكن ان نتكلم عن قطعة مستقيم او المقارنة بين القطع فايهما الاكبر او الاصغر . كل هذا ياتي من العلاقة "بين " . فقد اهمل اقليدس هذه العلاقة في بديهياته ولكنه استنتجها من الرسم , وهذا لايعني اننا لانستخدم الرسم , غير ان لايكون جزءا من البرهان.

🔔 **ملاحظة :**

"بين" هي كلمة اولية تقنية . الرمز :A-B-C يعني ان " B تقع بين A و C ".

البديهيات

Ax5 : A-B-C ⟷ C-B-A .

Ax6 :اذا كان A-B-C ,فان النقاط A,B,C مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

Ax7 : اذا كانت A,B,C أي ثلاث نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد , فان واحدة مما يلي تتحقق :

A-B-C , B-C-A , C-A-B .

ملاحظة:

الرمز A-B-C-D هو مختصر الى A-B-D , A-B-C و B-C-D , A-C-D .

وبنفس الطريقة بالنسبة لاكثر من اربع نقاط .

Ax8 : اذا كانت A,B,C,D اربع نقاط مختلفة وعلى مستقيم واحد وان A-B-C فان واحدة فقط مما يلي تتحقق: A-D-B-C , D-A-B-C A-B-D-C , A-B-C-D

Ax9 : اذا كانت A , B أي نقطتين , فان :

1. توجد نقطة C بحيث ان A-B-C .
2. توجد نقطة D بحيث ان A-D-B .
3. توجد نقطة E بحيث ان E-A-B .

مبرهنة 3:

1- اذا كان A-B-C وA-C-D فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد .
2- اذا كان A-B-D و B-C-D , فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد.
3- اذا كان A-B-C و B-C-D , فان النقاط A,B,C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.

البرهان :

برهان 1-

من Ax6 : بما ان A-B-C , فان النقاط A,B,C مختلفة وعلى مستقيم واحد.وكذلك بما ان A-C-D , فان النقاط A,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد .

يجب ان نبرهن ان $B \neq D$

اذا كان B=D : فانه بتعويض ذلك في A-C-D ⟵ A-C-B , ولكن من الفرض A-B-C , تناقض مع Ax7 .

لذلك , فان النقاط A,B,C,D تكون مختلفة .

من Ax1 : يوجد مستقيم واحد فقط يتعين من A و C .

بما ان B و D تقعان على المستقيم AC , فان A,B,C,D تقع على مستقيم واحد.

برهان 2- واجب ؟

برهان 3- واجب؟

مبرهنة 4 :

1- اذا كان A-B-C و A-C-D , فان A-B-C-D .
2- اذا كان A-B-D و B-C-D , فان A-B-C-D .
3- اذا كان A-B-C و B-C-D , فان A-B-C-D .

البرهان :

برهان 1-

حسب Th 3 :A-B-C و A-C-D ⟵ A,B,C,D مختلفة وعلى استقامة واحدة . بما ان A-B-C

حسب Ax8 :تتحقق واحدة فقط مما يلي

A-B-C-D , A-B-D-C , A-D-B-C , D-A-B-C .

بما ان A-C-D , حسب Ax7 : لاتتحقق كل من

A-D-C

D-A-C

من هذا نستنتج انه لاتتحقق كل من الحالات الاتية:

A-B-D-C , D-A-B-C , A-D-B-Cلذلك تتحقق الحالة الوحيدة,

A-B-C-D .

برهان 2- واجب ؟

برهان 3- واجب ؟

مبرهنة 5 :

1- اذا كان A-B-D و A-C-D و $B \neq C$, فان A-B-C او A-C-B .

2- اذا كان A-B-C و A-B-D و $C \neq D$, فان B-C-D او B-D-C .

3- اذا كان A-B-C و A-B-D و $C \neq D$, فان A-C-D او A-D-C .

البرهان :

برهان 1-

من الفرض A- B-D وحسب Ax6 : A-B-D مختلفة وتقع على مستقيم واحد .

ومن الفرض ايضا A-C-D وحسب Ax6 : A-C-D مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

ولكن $B \neq C$ بالفرض

اذن النقاط A,B,C,D مختلفة .

حسب Ax1 : يوجد مستقيم يحتوي النقطتين A,D

بما ان النقاط A,B,D تقع على مستقيم واحد ومختلفة أي ان B تقع على AD , وكذلك , بما ان A,C,D تفع على مستقيم واحد ومختلفة أي ان C تقع على AD .

اذن النقاط A,B,C,D مختلفة وتقع على مستقيم واحد.

بما ان A-B-D وحسب Ax8 : تتحقق واحدة فقط من الحالات

C-A-B-D , A-C-B-D , A-B-D-C , A-B-C-D .

ولكن بالفرض A-C-D ,

اذن اما A-B-C-D ⟵ A-B-C

او A-C-B-D ⟵ A-C-B .

برهان 2- واجب ؟

برهان 3- واجب ؟

تعاريف :

- التجزئة (Partition) : لتكن S مجموعة غير خالية , ولتكن S1,S2,.....,Sn مجموعات غير خالية وجزئية من المجموعة S ,

المجموعات S1,S2,....,Sn يقال او تعرف بانها تجزئة للمجموعة S اذا تحقق الاتي:

- $S = S1 \cup S2 \cup S3 \cup .... \cup Sn = \bigcup_{i}^{n} Si$
- $S1 \cap S2 = \varphi$.

او بتعبير اخر :اذا كانت المجموعة S هي اتحاد مجموعتين (او اكثر) جزئيتين غير خاليتين A1,A2 بحيث ان كل عنصر في S هو عنصر في واحدة وواحدة فقط من المجموعات الجزئية , فانه يقال ان A1,A2 تكونان تجزئة للمجموعة S .

مثال:

المجموعتان {3,4,5}{1,2} تكونان تجزئة للمجموعة {1,2,3,4,5} .

مطلوب ← لتكن O اية نقطة على مستقيم m و A نقطة اخرى على m . لتكن S_1 مجموعة كل النقاط على m من ضمنها A وكل النقاط X بحيث ان O-X-A او X-A-O .

لتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث ان Y-O-A . **فان** S_1 و S_2 **تدعيان جهتي O على m . وتدعيان ايضا نصفي المستقيم m بالنسبة الى O . أي ان**

$$S_1 = \{X \in m : O - X - A \vee O - A - X \vee X = A\}$$
$$S_2 = \{Y \in m : Y - O - A\}.$$

مطلوب ← لتكن S_1 و S_2 مجموعتين مختلفتين غير خاليتين ومنفصلتين وكلا منهما منفصلة عن مجموعة اخرى S ويتحقق الشرطان التاليان :

- لاي عنصر A في S_1 وB في S_2 , توجد نقطة في S بين A وB ,
- لاي عنصرين A وB من نفس المجموعة ,لاتوجد نقطة في S بينهما ,

فانه يقال بان S تفصل (Separates) S_1 و S_2

مبرهنة 6:

جهتا النقطة O على المستقيم m لاتحتويان على O .

أو بمعنى اخر: $O \notin S_1 \wedge O \notin S_2$.

البرهان :

نفرض ان $O \in S_1$

$$O-O-A \vee O=A \vee O-A-O$$

ولكن $O \neq A$

فان $O-A-O \vee O-O-A$

ولكن حسب Ax6 : A,O,O نقاط مختلفة (تناقض)

اذن O غير موجودة في S_1.

وكذلك , اذا كان $O \in S_2$ وحسب تعريف S_2,

O,O,A نقاط مختلفة (تناقض) , اذن O غير موجودة في S_2.

اذن O لاتنتمي الى جهتي O .

مبرهنة 7:

اية نقطة O على مستقيم m تفصل m الى جهتين بالنسبة الى O وتكونان مع O تجزئة للمستقيم m .

البرهان : واجب ؟

مبرهنة 8 :

لتكن O,A,A' ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m , جهتا النقطة O على المستقيم m المتعينتين من O و A هما نفس الجهتين المتعينتين من O و A' .

البرهان :

لتكن $S_1 \wedge S_2$ جهتي النقطة O على المستقيم m المتعينتين من O و A

$$S_1 = \{X \in m : O - X - A \vee O - A - X \vee X = A\}$$
$$S_2 = \{Y \in m : Y - O - A\}.$$

لتكن S_1^* و S_2^* جهتي النقطة O على m المتعينتين من O و A'

$$S_1^* = \{X \in m : O - X - A' \vee O - A' - X \vee X = A'\}$$
$$S_2^* = \{Y \in m : Y - O - A'\}.$$

النقاط O,A,A' مختلفو وتقع على المستقيم m .

حسب Ax7 : تتحقق واحدة فقط ممايلي :

O-A-A', O-A'-A , A'-O-A

الحالة (1):

نفرض ان O-A-A' . يجب ان نبرهن ان $S_1 = S_1^*$ و $S_2 = S_2^*$

أ- لكي نبرهن ان $S_1 = S_1^*$ يجب ان نبين ان $S_1 \subseteq S_1^*$ و $S_1^* \subseteq S_1$

(1) لاجل ان نبرهن $S_1 \subseteq S_1^*$

يجب ان نبين اذا كان $X \in S_1$, فان $X \in S_1^*$

$X \in S_1$ ⟵ O-X-A ,O-A-X أو X=A

نفرض ان O-X-A

وبما ان O-A-A' ,

حسب Th4 : يكون

$X \in S_1^*$ ⟵ O-X-A' ⟵ O-X-A-A'

نفرض O-A-X

وبما ان O-A-A' واذا كان $X \neq A'$

فان من Th5 ⟵ O-A'-X او O-X-A' ⟵ $X \in S_1^*$

اما اذا كان X=A' فان $X \in S_1^*$

عندما X=A

وبما ان O-A-A' ⟵ O-X-A' ⟵ $X \in S_1^*$.

يتبين مما تقدم ان $S_1 \subseteq S_1^*$.

(2) برهان $S_1^* \subseteq S_1$ نتبع نفس طريقة (1) من فرع (أ) .

ب-لكي نبرهن ان $S_2 = S_2^*$ يجب ان نبين ان $S_2 \subseteq S_2^*$ و $S_2^* \subseteq S_2$

(1) يجب ان نبرهن $S_2 \subseteq S_2^*$

أي ان لكل $X \in S_2$ ⟵ $X \in S_2^*$.

$X \in S_2$ ⟵ X-O-A

وبما ان O-A-A'

ومن Th4 ⟵ X-O-A-A'

⟵ X-O-A' ⟵ $X \in S_2^*$

(2)بنفس طريقة (1) من فرع ب-

نبرهن ان $S_2 \subseteq S_2^*$.

يتبين مما تقدم ان $S_1 = S_1^*$ و $S_2 = S_2^*$

وبنفس طريقة الحالة (1) نبرهن

$S_1 = S_1^*$ و $S_2 = S_2^*$.

اذا كان O-A'-A و $S_1 = S_2^*$ و $S_2 = S_1^*$ اذا كان A'-O-A .

مبرهنة 9:

لتكن O و O' نقطتين مختلفتين على مستقيم m . جهتا النقطة O على المستقيم m تختلفان عن جهتي النقطة O' على m .

البرهان : واجب

تعريف قطعة المستقيم :

لتكن A وB نقطتين مختلفتين , مجموعة كل النقاط X بحيث ان A-X-B تدعى قطعة مستقيم ويرمز لها بالرمز A-B .

مبرهنة 10 :

النقطتان A وB لاتنتميان الى A-B .

البرهان:

لو افترضنا ان $A \in A-B$

وحسب تعريف قطعة المستقيم A-A-B ,

حسب Ax6 : النقاط A,A,B مختلفة وعلى مستقيم واحد .

اذن $A \neq A$ (تناقض).

اذن $A \notin A-B$.

وبنفس الطريقة $B \notin A-B$.

مبرهنة 11:

A-B هي مجموعة غير خالية.

البرهان:

لتكن A-B قطعة معلومة

ومن تعريف القطعة , النقطتين A و B مختلفتين .

وحسب Ax9 : توجد نقطة C بحيث ان A-C-B .

أي ان $C \in A-B$.

وبهذا فان A-B مجموعة غير خالية.

مبرهنة 12:

A-B=B-A

البرهان :

يجب ان نبرهن ان $A-B \subseteq B-A$ وان $B-A \subseteq A-B$.

لكي نبين ان $A-B \subseteq B-A$.

يجب ان نبرهن اذا كان $X \in A-B$, فان $X \in B-A$

بما ان $X \in A-B$, فان A-X-B .

ومن Ax5 : يكون B-X-A .

ومن تعريف قطعة المستقيم , $X \in B-A$.

وبنفس الطريقة , نبرهن الاتجاه الاخر.

مبرهنة 13:

A-B هي مجموعة جزئية من المستقيم AB .

البرهان:

يجب ان نبرهن ان $X \in A-B$ وبالتالي فان X تقع على المستقيم AB

$X \in A-B$ ⟵ A-X-B

ومن Ax6 : A ,X ,B مختلفة وعلى مستقيم واحد.

لذا فان X تقع على المستقيم AB .

مبرهنة 14:

لتكن A وB نقطتين مختلفتين , فان A-B=C-D اذا وفقط اذا {A,B}={C,D} .

البرهان :

نفرض ان {A,B}={C,D}

اذن اما (A=C و B=D) او (A=D و B=C)

اذن اما (A-B=C-D) او (A-B=D-C)

ولكن حسب Th12 : C-D=D-C

اذن اما (A-B=C-D) او (A-B=C-D)

اذن A-B=C-D .

نفرض ان A-B=C-D

يجب ان نبرهن ان {A,B}={C,D}

لو افترضنا ان $\{A,B\} \neq \{C,D\}$

اذن يوجد عنصر واحد بحيث ان $C \in \{C,D\}$ وان $C \notin \{A,B\}$

أي ان $C \neq B, C \neq A$

ولكن $A \neq B$ (حسب تعريف قطعة المستقيم).

اذن النقاط A,B,C ثلاث نقاط مختلفة 1

حسب Th13 : $A-B \subseteq AB$

$C-D \subseteq CD$

ولكن A-B=C-D بالفرض

اذن $C-D \subseteq A-B$ (القطعتان A-B و C-D تقعان على مستقيم واحد وهو المستقيم AB).

اذن النقاط A,B,C تقع على مستقيم واحد.....2

من 1 و 2 نحصل على إن النقاط A,B,C مختلفة وعلى مستقيم واحد.

وحسب Ax7 : يتحقق واحد فقط مما يلي :

1. A-C-B
2. C-A-B
3. A-B-C

الحالة الاولى : عندما A-C-B

وحسب تعريف قطعة المستقيم $C \in A-B$

ولكن بالفرض A-B=C-D

اذن $C \in C-D$ وهذا يخالف Th10 : حيث ان الاطراف لاتنتمي لقطعة المستقيم

الحالة الثانية: عندما C-A-B

حسب Th11 : توجد نقطة H في A-B بحيث ان A-H-B

ولكن C-A-B : حسب Th4 , C-A-H-B

1..... C-A-H

ولكن $H \in A-B$ بالبرهان و A-B=C-D بالفرض

اذن $H \in C-D$ ⟵ C-H-D 2

من 1 و2 يكون لدينا C-A-H ⟵ C-A-H-D

C-H-D

وحسب Th4 : C-A-D

وبالتالي فان $A \in C-D$

ولكن C-D=A-B

وبالتالي $A \in A-B$

تناقض مع Th10 :

الحالة الثالثة : مشابهة تماما الى الحالة الثانية.

اذن {A,B}={C,D}

مبرهنة 15:

لتكن A-B قطعة مستقيم وان A-R-B فان $A-R \subseteq A-B$, $R-B \subseteq A-B$

البرهان :

لكي نبرهن ان $A-R \subseteq A-B$,

يجب ان نبين اذا كان $X \in A-R$, فان $X \in A-B$

$X \in A-R$ ⟵ A-X-R , ومن الفرض A-R-B

حسب Th4 : A-X-R-B

⟵ A-X-B

⟵ $X \in A-B$

وبنفس الطريقة ,نستطيع ان نبرهن ان $R-B \subseteq A-B$

مبرهنة 16:

أي نقطة R في القطعة A-B تفصل A-B الى مجموعتين جزئيتين غير خاليتين R-B و A-R اللتين مع {R} تكون تجزئة للقطعة A-B .

البرهان :

واجب ؟

مقدمة لبديهية باخ : The Axiom of Pasch

في كثير من البراهين الاقليدية ,مثل ,"المستقيم الذي يمر برأس مثلث " و " منصف زاوية في مثلث " قد افترضت بان هذه المستقيمات تقطع الضلع المقابل في المثلث . لكن على أي اساس اعتمدت هذه الفرضية ؟. لقد صاغ العالم باخ بديهيته ليس فقط على انها عبارة اعتمد عليها في البراهين , ولكن لانه ليس بالامكان برهنتها من بديهيات اقليدس المعروفة.

تعريف:

لتكن A,B,C ثلاث نقاط مختلفة ولاتقع على مستقيم واحد , ان اتحاد {A,B,C} مع القطع A-B A-C,B-C, يدعى مثلثا , تدعى A,B,C الرؤوس . تدعى A-C,A-B,B-C الاضلاع.

Ax10 :"باخ"

اذا كانت A,B,C رؤوس مثلث و m هو مستقيم لايمر باي راس من هذه الرؤوس ويحتوي m على نقطة من الضلع A-B , فان m يحتوي كذلك على نقطة من الضلع B-C او A-C .

تسال :هل ان المستقيم m يقطع كل من B-C و A-C ؟.

الجواب / كلا . كما في مبرهنة 17 .

مبرهنة 17:

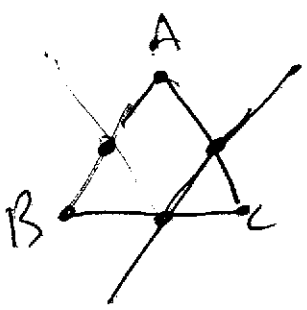
اذا كانت A,B,C رؤوس مثلث , أي مستقيم m يحتوي على نقطة من الضلع A-B ونقطة من الضلع A-C , فانه لايمكن ان يحتوي على نقطه من الضلع B-C .

او بعبارة اخرى : المستقيم الذي يقطع ضلعا واحدا من مثلث والذي لايمر باي راس منه , فانه يقطع ضلعا واحدا فقط من الضلعين الاخرين.

البرهان:

نفرض وجود مستقيم m يحتوي على مثل هذه النقاط D,E,F بحيث ان $D \in A-B, E \in B-C, F \in A-C$.

من الفرض ومبرهنة 2 : تكون النقاط مختلفة.



من Ax7 : تتحقق واحدة مما يلي

. D-F-E, D-E-F, F-D-E

نفرض ان D-F-E , بما ان $E \in B-C$,

فان E تقع على المستقيم BC (Th13) وكذلك D تقع على الخط AB ,

من (Th2) : النقاط D,E,B لاتقع على مستقيم واحد.

لذلك من Ax10 (باخ) : المستقيم AC الذي يقطع D-E في F يجب ان يقطع B-E او B-D .

لكن هذا لايمكن من (Th2 و Ax7) , لذا فان الفرض يكون خاطئا .

وبنفس الطريقة , نتوصل الى تناقض اذا كان D-E-F او F-D-E .

وبهذا , فان المستقيم الذي يقطع ضلعين في مثلث , فانه لايقطع الضلع الثالث.

تعريف :

ليكن m أي مستقيم و P نقطة لاتقع على m .لتكن S_1 مجموعة تحتوي على P وكل النقاط X لاتقع على m ,بحيث ان P-X لاتحتوي على نقطة من m . أي ان

$$S_1 = \{X \notin m : P - X \cap m = \varphi\} \cup \{P\}$$

لتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث ان P-Y تحتوي على نقطة m .اي ان

$$S_2 = \{Y \notin m : P - Y \cap m \neq \varphi\}$$

فان S_1 و S_2 تدعيان جهتي المستقيم m .

وتدعيان ايضا نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم m .

أي ان : S_1 هو نصف المستوي الذي يحتوي P .

: S_2 نصف المستوي الذي لايحتوي P .

مبرهنة 18:

جهتا المستقيم m غير خاليتين .

او بعبارة اخرى : نصفا المستوي S1 وS2 غير خاليين .

البرهان/

نفرض ان m مستقيم معلوم .

حسبAx3 : توجد نقطة P بحيث ان $P \notin m$

وحسب Ax2 : توجد على الاقل نقطتين مختلفتين ولتكن Q احداهما على m.

حسب Ax9: توجد نقطة Y بحيث ان Y- Q- P .

ولذلك P-Y تحتوي على نقطة Q من m , أي ان $Y \in S_2$.

أي ان جهة المستقيم m (المجموعة $S_2 \neq \varphi$).

توجد نقطة اخرى R على m.

من Ax9 : توجد نقطة X بحيث ان Y-R-X .

في ΔPXY , بما ان m يقطع الضلع P-Y في Q ويقطع الضلع Y-X في R ,

من Th17 : لايمكن ان يقطع الضلع P-X .

منAx6 وTh2 : لاتقع X على m , فان $X \in S_1$

أي ان جهة المستقيم m (المجموعة $S_1 \neq \varphi$).

مبرهنة 19:

توجد جهتان فقط للمستقيم m (نسبة الى النقطة P) وتكونان مع m تجزئة لمجموعة كل النقاط.

البرهان/

كل نقطة اما تقع على m او لاتقع ,

من برهان Th18 : اذا كانت M نقطة على m , فانه توجد نقطتين P,Q لاتقعان على m, بحيث P-M-Q .

لتكن X اية نقطة لاتقع على m .

اذا كانت X تقع على المستقيم PQ , فانه تتحقق واحدة فقط من الحالات الاربع التالية:

X=P or X=Q , P-Q-X , P-X-Q ,X-P-Q .

فواحدة فقط من القطع P-X , Q-X تقطع m .

اذا كانت X لاتقع على المستقيم PQ , فايضا واحدة فقط من القطع P-X,Q-X تقطع m.

اذا كان أي قطعة من هذه القطع لاتقطع m , وبما ان P-M-Q , أي ان m يقطع P-Q في M ,(تناقض مع Ax10).

اما اذا كان كل من P-X, Q-X تقطع m , (تناقض مع Th17).

اذا كانت P-X لاتقطع m , فان $X \in S_1$ ؟.

بما انه توجد هذه الاحتمالات فقط وان كل نقطة في واحدة فقط من المجموعات S_1, S_2 .

مبرهنة 20:

أي مستقيم m يفصل مجموعة كل النقاط الى جهتين.

البرهان/

H.W

مبرهنة 21:

ليكن m مستقيما , P,P' نقطتان لاتقعان على m . جهتا المستقيم m المتعينتين من P و m هما نفس الجهتين المتعينتين من P' و m .

البرهان/

حسب التعريف S_1, S_2, S_1', S_2'

$$S_1 = \{X \notin m : P - X \cap m = \varphi\} \cup \{P\}.$$
$$S_2 = \{Y \notin m : P - Y \cap m \neq \varphi\}$$
$$S_1' = \{X \notin m : P' - X \cap m = \varphi\} \cup \{P'\}$$
$$S_2' = \{Y \notin m : P' - Y \cap m \neq \varphi\}$$

يجب ان نبرهن ان $\{S_1', S_2'\} = \{S_1, S_2\}$

البرهان الحالة الاولى:

عندما P,P' في نفس جهة S_1 , يجب ان نبرهن ان $S_1 = S_1', S_2 = S_2'$

نفرض ان $X \in S_1$

من Th20: $X \notin m, X \notin S_2$ ؟

ولكن S_1', S_2', m هي تجزئة ايضا للمستوي.

بما ان $X \notin m$ فان اما $X \in S_1'$ او $X \in S_2'$ وليس كلاهما.

الحالة 1) الاحتمال A: اذا كان $X \in S_1'$ $S_1 \subseteq S_1'$

وبنفس الطريقة ⟵ $S_1' \subseteq S_1$ ⟵ $S_1 = S_1'$

الاحتمال B: عندما $X \in S_2'$,هذا غير ممكن ؟

لانه لو صح ذلك فان P'-X يقطع m بينما P-X لايقطع m لان $X \in S_1$

وان P' لايقع على الخط m.

اذن الخط m يقطع P-P' وهذا مستحيل.

لان P,P' بنفس الجهة من m.

اذن الاحتمال B مرفوض وان احتمال A هو الوحيد المقبول.

اذن $S_1 \subseteq S_1'$.

وبنفس الطريقة نبرهن ان $S_1' \subseteq S_1$

اذن $S_1 = S_1'$

برهان $S_2 = S_2'$ (H.W)

الحالة 2) اذا كانت P,P' في جهتين مختلفتين ولتكن $P \in S_1, P' \in S_2$ وبنفس الطريقة السابقة اعلاه.

مبرهنة 22:

ليكن m, m' مستقيمين مختلفين ,جهتا المستقيم m تختلفان عن جهتي المستقيم m'.

البرهان /

H.W

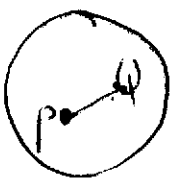
المجموعات المحدبة (Convex Sets):

تعريف: تدعى المجموعة S مجموعة محدبة اذا وفقط اذا كان

$P, Q \in S \rightarrow P - Q \subseteq S$

مبرهنة 23:

1) أي مستقيم يكون مجموعة محدبة.



2) كل من جهتي نقطة O هي مجموعة محدبة.

البرهان/

1) ليكن m خط , لتكن A,B أي نقطتين على m .
حسب Th13 : $A-B \subseteq m$.

لذلك من تعريف المجموعة المحدبة ,يكون m مجموعة محدبة.

2) ؟

مبرهنة 24:

كل قطعة هي مجموعة محدبة.

البرهان/

لتكن A-B قطعة .

المطلوب اثباته: A-B هي مجموعة محدبة.

لتكن X,Y أي نقطتين مختلفتين في A-B . يجب ان نبرهن ان

$X-Y \subseteq A-B$

ليكن $Z \in X-Y$ ⟵ X-Z-Y

$X \in A-B$ ⟵ A-X-B

$Y \in A-B$ ⟵ A-Y-B

من Th5 : A-X-B وA-Y-B ⟵ A-Y-X او A-X-Y

عندما A-X-Y وبما ان X-Z-Y , فان من Th4 :

⟵ A-X-Z-Y

⟵ A-Z-Y وبما ان A-Y-B

من Th4 ⟵ A-Z-Y-B

⟵ A-Z-B

⟵ $Z \in A-B$

عندما A-Y-X ,

من Ax5 : X-Y-A وبما ان X-Z-Y

من Th4 : ⟵ X-Z-Y-A

⟵ X-Z-A

من Ax5 ⟵ A-Z-X وبما ان A-X-B

من Th4 ⟵ A-Z-X-B

⟵ A-Z-B

⟵ $Z \in A-B$

وبهذا ,فان A-Bهي مجموعة محدبة.

مبرهنة 25:

كل من جهتي المستقيم m هي مجموعة محدبة.

البرهان/؟

مبرهنة 26:

تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة.

البرهان/

ليكن $A = A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_n$

حيث ان $A_1, A_2, ..., A_n$ هي مجموعات محدبة.

يجب ان نبرهن ان A هي مجموعة محدبة.

لتكن X,Y نقطتين مختلفتين في A

يجب ان نبين ان $X-Y \subseteq A$

$X,Y \in A$ ⟵ $X,Y \in A_1, X,Y \in A_2, ..., X,Y \in A_n$

وبما ان $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعات محدبة فان

$X-Y \subseteq A_1$ و $X-Y \subseteq A_2$ و..... و $X-Y \subseteq A_n$

⟵

$X-Y \subseteq A_n \cap ... \cap A_2 \cap A_1$

$X-Y \subseteq A$ ⟵

A مجموعة محدبة ⟵

الفصل الخامس
التطابق والمقارنة

بديهيات عن تطابق القطع:
التطابق هو علاقة اولية تقنية .
فيقال ان شكلا يطابق شكلا اخر .
ويرمز لهذا بالرمز $\cong$.
فمثلا , "A-B تطابق C-D " يرمز لها :
$A-B \cong C-D$

مجموعة البديهيات :
بما ان التطابق هو علاقة اولية , يجب ان نقدم بديهيات لتعطينا خواص هذه العلاقة .

Ax11 : (بديهية انشاء القطعة)
لتكن A-B قطعة و C نقطة على خط m فانه على كل شعاع على m نقطة بدايته C توجد نقطة واحدة فقط D بحيث ان $A-B \cong C-D$.

Ax12: (تطابق القطع هو علاقة تكافؤ)

أي ان تطابق القطع تحقق الصفات التالية:
١- انعكاسية (Reflexive) : $A-B \cong A-B$
٢- متناظرة (Symmetric): $A-B \cong C-D \longleftarrow C-D \cong A-B$
٣- متعدية (Transitive) : $\begin{matrix} A-B \cong C-D \\ C-D \cong E-F \end{matrix} \Longrightarrow A-B \cong E-F$

Ax13 : (جمع القطع)
اذا كان :
أ- A-B-C ,
ب- D-E-F ,
ت- $A-B \cong D-E$
ث- $B-C \cong E-F$
فان $A-C \cong D-F$.

مبرهنة ٥١: طرح القطع
اذا كان

أ- A-B-C ,
ب- D-E-F ,

مبرهنة ٥١: جمع القطع
اذا كان:
A-B-C
D-E-F
ت- $A-B\cong D-E$
ث- $A-C\cong D-F$
فان $B-C\cong E-F$
البرهان:
نفرض ان $E-F$ لايطابق $B-C$
حسب Ax11 : توجد نقطة G بحيث ان D-E-G و $B-C\cong E-G$

بما ان $E-F$ لايطابق $B-C$
وحسب Ax12 ⟸ E-G لايطابق E-F
وعليه $F\neq G$ .....*
بما ان $A-B\cong D-E$ و $B-C\cong E-G$
وحسب Ax13 : $A-C\cong D-G$
ولكن $A-C\cong D-F$
وحسب Ax12 : $D-F\cong D-G$
وحسب Ax11 +Ax12 : نحصل ان F=G .....**
من * و ** نحصل على تناقض.
اذن $B-C\cong E-F$.

مبرهنة ٥٢:
اذا كان $A-C\cong D-F$ وB نقطة بحيث ان A-B-C , فانه توجد ونقطة E بحيث ان D-E-F و $A-B\cong D-E$.
البرهان : H.W

مقارنة القطع :
تعريف: $A-B<C-D$ اذا وفقط اذا توجد نقطة E بحيث ان C-E-D و $A-B\cong C-E$.

مبرهنة ٥٣:
اذا كانت A-B و C-D قطعتين , فانه تتحقق واحدة فقط ممايلي:
$C-D<A-B, A-B\cong C-D, A-B<C-D$

البرهان: H.W

مبرهنة ٥٤:
اذا كان A-B < C-D و $A-B\cong E-F$ فان E-F < C-D .
البرهان:
بما ان A-B < C-D بالفرض
فانه توجد نقطة G بحيث ان C-G-D و $A-B\cong C-G$
بما ان $A-B\cong E-F$ وحسب Ax12 : $E-F\cong C-G$
حسب تعريف مقارنة القطع $E-F<C-D$.

مبرهنة ٥٥:
اذا كان A-B < C-D و $C-D\cong E-F$ فان A-B < E-F .
البرهان:
حسب تعريف مقارنة القطع: توجد نقطة G بحيث ان C-G-D و $A-B\cong C-G$

وحسب Th52: توجد نقطة H بحيث ان E-H-F و $E-H\cong C-G$
بما ان $A-B\cong C-G$
وحسب Ax12 $\Longleftarrow$ $A-B\cong E-H$
وعليه A-B < E-F .

مبرهنة:
اذا كان A-B < C-D و A-B < E-F فان C-D < E-F
البرهان:
بما ان A-B < C-D , فانه توجد نقطة G بحيث ان C-G-D و $A-B\cong C-G$.
بما ان C-D < E-F , فانه توجد نقطة H بحيث ان E-H-F و $C-D\cong E-H$
ومن Th55: نستنتج ان A-B < E-H . لذلك توجد نقطة I بحيث ان E-I-H و
$A-B\cong E-I$.
بما ان E-H-F و E-I-H فانه Th4 : E-I-H-F .
لذلك E-I-F , وبذلك يكون A-B < E-F .

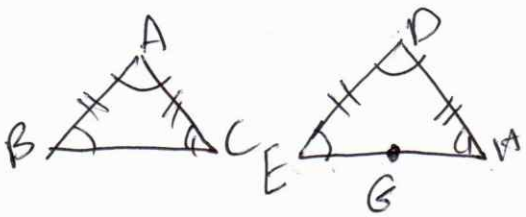
تطابق الزوايا والمثلثات

مجموعة البديهيات:
Ax14 (بديهية إنشاء زاوية)
لتكن $\angle BAC$, وليكن $\overrightarrow{DF}$ شعاعا على الخط m , فانه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط DF بحيث
$\angle BAC\cong\angle EDF$.

Ax15 : (تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ)
اي أن :
١- $\angle A\cong\angle A$
٢- اذا $\angle A\cong\angle B$ $\longrightarrow$ $\angle B\cong\angle A$
٣- اذا $\angle A\cong\angle B$ و $\angle B\cong\angle C$ $\longrightarrow$ $\angle A\cong\angle C$

Ax16 : (ضلعان وزاوية محصورة)
في $\Delta\Delta ABC, DEF$ اذا كان : $A-B\cong D-E, A-C\cong D-F$
و $\angle A\cong\angle D$ فان $\angle B\cong\angle E, \angle C\cong\angle F$.

مبرهنة ٥٦: (SAS):
اذا كان ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث اخر , فان المثلثين يتطابقان.
البرهان:
ليكن ABC و EDH مثلثين وفيهما
$A-B\cong E-D, A-C\cong D-H, \angle A\cong\angle D$
حسب Ax16 : نحصل على ان $\angle B\cong\angle E, \angle C\cong\angle H$



تعريف الزوايا المتقابلة بالراس (الزوايا الراسية):
وهما الزاويتان اللتان تحققان الشرطين التاليين:
١- لهما راس مشترك.
٢- شعاعي الزاوية الاولى هما الشعاعين المعاكسين للزاوية الثانية.

نتيجة ٢:
تكون الزاويتان المتقابلتان بالراس متطابقتان.
البرهان:
لتكن $\angle 1, \angle 2$ متقابلتان.
وحسب التعريف: $\vec{AK}$ هوالشعاع المعاكس للشعاع $\vec{AH}$
$\vec{AU}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\vec{AE}$
ناخذ الان $\angle 3$ وهي زاوية AHU
واضح ان $\angle 1, \angle 3$ تكونان زوجا خطيا.
وكذلك $\angle 2, \angle 3$ تكونان زوجا خطيا ايضا.
وحسب Ax15 : $\angle 3 \cong \angle 3$
: $\angle 1 \cong \angle 2$. حسب [اذا كانت زاويتان متطابقتان فان تتطابق الزاويتان اللتان تكونان معهما على التعاقب زوجين] .

تعريف: الزاويتان المتجاورتان
وهما الزاويتان اللتان تحققان:
١- لهما راس مشترك.
٢- لهما ضلع مشترك.
٣- الضلعين الاخرين يقعان في جهتين متعاكستين من الضلع المشترك.

الفصل السادس
هندسة أولية
إعادة براهين برهنات اقليدس

الهدف من هذا الفصل هو تقديم برهنات اولية مهمة برهنت من قبل اقليدس وغيره.

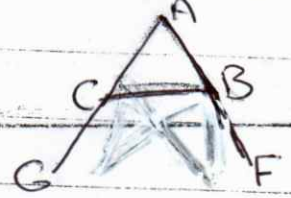
~~[redacted]~~

SSS , SAA , ASA

angle Side angle

مبرهنة (٦٦) (فقط المنطوق)

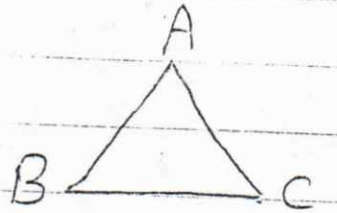
في المثلث ABC اذا كانت $A-B \cong A-C$ وأن $A-B-F$ و $A-C-G$ نقطتان كيفيتان فإن $\angle CBF \cong \angle BCG$



$\angle ABC \cong \angle ACB$

مبرهنة (٦٧) (فقط المنطوق)

اذا كانت زاويتان في مثلث متطابقتين فإنه تتطابق كذلك الضلعان المقابلان لهما



$\angle A \cong \angle B$ و

$B-C \cong A-C$ ،

$\angle A \cong \angle C$ و

$B-C \cong A-C$

مبرهنة (٦٩) (SSS) المطوقة فقط.

اذا كان ثلاثة اضلاع من مثلث متطابقة على التوالي ثلاثة اضلاع من مثلث آخر فان المثلثين متطابقين

البرهان:

المعطى:

المطلوب:

غير مطلوب

تعريف (١٧): لتكن $\angle BAC$ زاوية مكونة من شعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فإن $\overrightarrow{AD}$ يكون بين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ اذا وفقط اذا كان $\overrightarrow{AD}$ في داخل $\angle BAC$

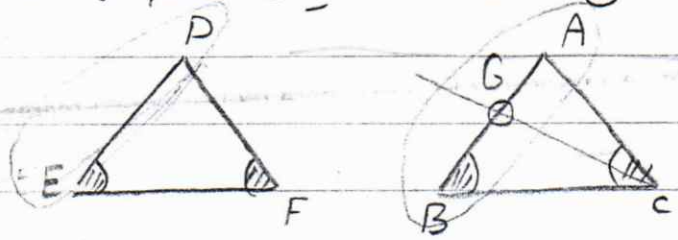
غير مطلوب

برهنة (٤٥) الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يكون بين شعاعين آخرين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ اذا وفقط اذا توجد نقاط B على $\overrightarrow{AB}$ و C على $\overrightarrow{AC}$ و D على $\overrightarrow{AD}$ بحيث $B-D-C$

البرهان: بدون برهان.

مطلوب فقط

برهنة (٤٦) ASA: اذا كانت زاويتان وضلع مشترك بينهما في مثلث تطابق على التوالي زاويتين وضلع مشترك بينهما من مثلث آخر فان المثلثين متطابقان



البرهان/

ليكن ABC ، DEF مثلثين فيهما

$\angle ABC \cong \angle DEF$

$\angle ACB \cong \angle DFE$

$B-C \cong E-F$

يجب ان نبرهن $\triangle DEF \cong \triangle ABC$

اي بمعنى $A-B \cong D-E$

نفرض ان $D-E < A-B$ فانه توجد نقطة مثل G بحيث ان $A-G-B$ وأن $D-E \cong G-B$ وبما أن $B-C \cong E-F$ فانه من SAS (.....

$\Delta GBC \cong \Delta DEF$ لذا فان $\Delta DEF \cong$ $\Leftarrow$

$\angle GCB \cong \angle DFE$

لكن $\angle DFE \cong \angle ACB$

$\therefore \angle GCB \cong \angle ACB$

لكن بما أن $A-G-B$ فأنه $\angle GCB < \angle ACB$

وهذا يناقض مبرهنة (٦٢)[.....]

وبنفس الطريقة اذا كانت $A-B < D-E$ لذلك فأن $A-B \cong D-E$ ومن SAS فانه

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

و.ه.م

وظيفة

مبرهنة ٦٣/ لأي زوج من الزوايا ولتكن $\angle A$ و $\angle B$ فأنه تتحقق واحدة فقط من الآتي

$\angle A < \angle B$, $\angle A = \angle B$, $\angle B < \angle A$

مبرهنة الزوايا الخارجية

مبرهنة (1): ليكن m مستقيماً و A نقطة لا تقع على m فإنه يوجد على الأقل مستقيم واحد يمر من A ولا يقطع m

تعريف 29 إذا قطع مستقيمين بقاطع من نقطتين مختلفتين A, B فالزوايا التي تكون القطعة $A-B$ كجزء من الشكل تدعى زوايا داخلية وتدعى الزوايا الأخرى خارجية

الزاويتان اللتان يكون رأسيهما النقطتين A و B وفي نفس الجهة من القاطع احدهما داخلية والأخرى خارجية تدعيان زاويتان متناظرتان.

الزاويتان غير المتجاورتان على جهتي القاطع المتحاكستين وكل منهما داخلية تدعيان زاويتان داخليتان متبادلتان

مبرهنة 2 إذا قطع مستقيمان بقاطع وكان الزاويتان الداخليتان المتبادلتان متطابقتين فان المستقيمان لا يتقاطعان

تعريف 30 الزوايا التي تكون مجاورة ومكملة للزوايا مقابلة للزوايا الخارجية

زوايا خارجية للمثلث غير مجاورة مثل زاوية A في المثلث تدعى زوايا خارجية مقابلة الى الزاوية A

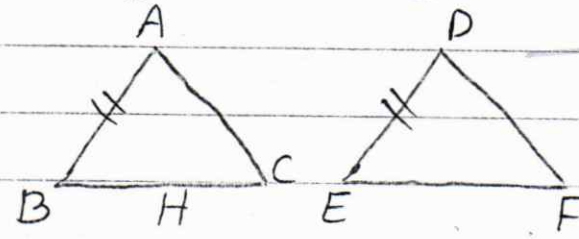
مطلوب

مبرهنة 75 اي زاوية داخلية للمثلث تكون اصغر من اي زاوية خارجية مقابلة لها. (بدون برهان)

المعطوف فقط

مطلوب

مبرهنة 76 :- SAA / اذا كانتا زاويتان وضلع غير مشترك بينهما من مثلث تطابق على التوالي زاويتين وضلع غير مشترك بينهما من مثلث اخر فان المثلثين متطابقين



غير مطلوب البرهان

البرهان /

ليكن ABC ، DEF مثلثين وفيهما $\angle B \cong \angle E$

و $\angle C \cong \angle F$ ، $A-B \cong D-E$

يجب ان نبرهن أن المثلثين ABC ، DEF متطابقان

اذا كان $B-C \cong E-F$ فانه من مبرهنة SAS

[....] يتطابق المثلثان .

نفرض أنه $B-C \ncong E-F$ فمن مبرهنة 52 (....)

[إما $B-C < E-F$ أو $E-F < B-C$]

نفرض أن $E-F < B-C$ فانه توجد نقطة مثل H بحيث

أن $B-H-C$ و $E-F \cong B-H$

من SAS يتطابق المثلثان $\Delta ABH \cong \Delta DEF$

لذلك $\angle BHA \cong \angle EFD$ لكن $\angle C \cong \angle F$

وبذلك في مثلث AHC الزاوية الخارجية $\angle AHB$

تطابق الزاوية الداخلية المقابلة لها $\angle BCA$

وهذا خلف لـ مبرهنة (75) [.....]

وبنفس الطريقة اذا كان $B-C < E-F$

$B-C \cong E-F$ ∴

∴ يتطابق المثلثان ABC ، DEF حسب مبرهنة SAS

الزوايا القوائم والزوايا غير القوائم.

مطلوب - تعريف 35/ الزوايا التي تطابق مكملتها تدعى زاوية قائمة

- الزاوية التي تكون اصغر من الزاوية القائمة تدعى زاوية حادة
- اي زاوية ليست قائمة وليست حادة تدعى زاوية منفرجة.

مطلوب برهنة جزء - برهنة 84/ اي زاوية حادة تكون اصغر من اي زاوية منفرجة

البرهان/

لتكن $\angle ABC$ حادة، و $\angle DEF$ منفرجة

نفرض ان العبارة خاطئة فمن برهنة ٦٢ «.....»

اما ① / $\angle DEF \cong \angle ABC$

أو ② / $\angle DEF < \angle ABC$

① اذا كانت $\angle DEF \cong \angle ABC$

فانه [اذا كان $\angle A < \angle B$ و $\angle B \cong \angle C$ فانه $\angle A < \angle C$]

∴ تكون $\angle DEF$ زاوية حادة وهذا خلاف للفرض

② اذا كان $\angle DEF < \angle ABC$

∴ $\angle ABC$ زاوية حادة اي انها تكون أصغر من زاوية قائمة

فانه [اذا كانت $\angle E < \angle B$، $\angle B < \angle C$ فان $\angle E < \angle C$] $\Leftarrow$ $\angle DEF$ اصغر من زاوية قائمة فتكون $\angle DEF$ حادة وهذا خلاف الفرض $\Leftarrow$ $\angle ABC < \angle DEF$

ان البديهية الخامسة لاقليدس كانت هدفا لنقد علماء الرياضيات , فقد برهن اقليدس مبرهناته ال ٢٨ بدون ان يستخدم البديهية الخامسة وقد استند اليها لاول مرة في برهان مبرهنة(٢٩)مما اثار انتباه العلماء حيث اعتقد البعض منهم بانها مبرهنة وبهذا يجب ان تبرهن وقد كانت هناك محاولات عديدة لبرهنتها وعلى فترة تزيد عن الفي عام ولكن باءت كل المحاولات بالفشل لان البراهين كانت تعتمد على عبارات تكافئ البديهية الخامسة.

وتنص البديهية الخامسة على مايلي:

اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث وكان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين , فان المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع اذا مدا بغير حد.

بعض مكافئات البديهية الخامسة:

١- بديهية بليفير : من نقطة لاتقع على مستقيم معلوم يمكن رسم موازي واحد فقط للمستقيم المعلوم.
٢- اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين , فان الزاويتين الداخلتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها , ومجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين في نفس الجهة من القاطع يساوي زاويتين قائمتين .(مبرهنة ٢٩)
٣- مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين .
٤- الزاوية الخارجية في المثلث تساويمجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها.
٥- يوجد زوج من المثلثات المتشابه.
٦- اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الاخر.
٧- المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين تكون ثابتة.
٨- يوجد زوج من المستقيمات التي تكون المسافة بينهما ثابتة.
٩- اذا كان مجموع زوايا أي مثلث مقدارا ثابتا, فان هذا المجموع يساوي زاويتين قائمتين.
١٠- اذا كانت ثلاث زوايا من شكل رباعي قوائم فالزاوية الرابعة تكون قائمة ايضا.
١١- المستقيمان الموازيان لمستقيم معلوم يكونان متوازيين.
١٢- لاي ثلاث نقاط لاتقع على مستقيم واحد, توجد دائرة تمر من هذه النقاط.

تعتبر البديهية الخامسة لاقليدس والمسماة " بديهية التوازي" نقطة بداية لدراسة الهندسة اللااقليدية.

ويمكن تحديد مواقف هؤلاء المعترضين باحد المواقف التالية:

١- اعتقد بعضهم بان بديهية التوازي يجب ان تكون نظرية ولذلك تحتاج الى برهان يعتمد على المفاهيم الاساسية والبديهيات الاربعة الاولى.
٢- وقال اخرون يمكن برهان نظرية ٢٩ لاقليدس بدون استخدام بديهية التوازي فلا حاجة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣- واخرون فرضوا نقيض بديهية التوازي واستمروا في اشتقاق النظريات لعلهم يحصلون على تناقض وبذلك يثبتون صحتها.

محاولات لبرهنة البديهية الخامسة او احدى مكافئاتها:

١- ان اول محاولة لبرهان بديهية التوازي لاقليدس كانت من قبل العالم الفلكي بطليموس الذي عاش في القرن ٢ في مدينة الاسكندرية حيث حاول بطليموس:

١- برهان نظرية ٢٩. بدون استخدام بديهية التوازي .
٢- برهان بديهية التوازي.

مبرهنة ٢٩: اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين , فان الزاويتين الداخلتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها , ومجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين في نفس الجهة من القاطع يساوي زاويتين قائمتين.

المفروض / المستقيم AB يوازي المستقيم المستقيم CD .

م. ث: $\angle 1 = \angle 2$ بالتبادل.
$\angle 3 = \angle 4$

$\angle 5 = \angle 2$ بالتناظر.
$\angle 6 = \angle 4$

$\angle 3 + \angle 2 = 180$
$\angle 1 + \angle 4 = 180$

البرهان:

لقد افترض بطليموس مايلي: ان امتداد المتوازين في جهة واحدة من القاطع لايختلف عن امتدادهما من الجهة الاخرى.

اذا كان $\angle 2 + \angle 3 < 180$, فان

$\angle 1 + \angle 4 < 180$,

اذن $\angle 2 + \angle 3 + \angle 1 + \angle 4 < 360$ (لايمكن : لان مجموع الزوايا الاربع يساوي اربع زوايا قوائم).

وبنفس الطريقة اذا كان :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\angle 1 + \angle 4 > 180$,

اذن $\angle 2 + \angle 3 + \angle 1 + \angle 4 > 360$, وهذا لايمكن لنفس السبب السابق.

اذن يجب ان يكون مجموع الزوايا يساوي 180 .

بما ان $\angle 2 + \angle 3 = 180$ بالبرهان.

وان $\angle 1 + \angle 3 = 180$ (زاوية مستقيمة)

اذن $\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 3$ وبطرح $\angle 3$ من الطرفين نحصل على $\angle 2 = \angle 1$.

وبنفس الطريقة نبرهن ان $\angle 3 = \angle 4$.

وبما ان $\angle 2 + \angle 3 = 180$ بالبرهان,

ولكن $\angle 5 + \angle 3 = 180$ (زاوية مستقيمة).

اذن $\angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 3$ وبالطرح نحصل , $\angle 2 = \angle 5$.

وبنفس الطريقة نبرهن $\angle 4 = \angle 6$.

مطلوب

الانتقاد: ان فرضية بطليموس التي اعتمدها لبرهان النظرية اعلاه هي تفسير اخر لبديهية بليفير.
فهو افترضها من حيث لايعلم لذا فهو افترض مايجب برهانه.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل الثامن // البديهية الخامسة لاقليدس

البديهية الخامسة لاقليدس: اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث وكان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين , فان المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع اذا مدا بغير حد.

البرهان:

المفروض / ليكن AB, CD مستقيمان.

والمستقيم EF يقطعهما في X,Y على التوالي .

بحيث ان $\angle 1 + \angle 2 < 180$.

م. ث: المستقيمان AB, CD يلتقيان في جهة القاطع الحاوية B,D .

البرهان:

ان لم يكن AB,CD متلاقيان فانهما متوازيان.

وحسب Th29 : $\angle 1 + \angle 2 = 180$ وهذا خلاف الفرض. (لان $\angle 1 + \angle 2 < 180$)

اذن المستقيمين AB,CD يجب ان يتلاقيان .

ولو كان المستقيمان AB,CD متلاقيان في جهة A,C لاصبح لدينا مثلث فيه الزاويتين مجموعهما اكبرمن 180 . (يناقض نظرية اقليدس).

اذن المستقيمان AB,CD يتلاقيان من جهة B,D .

محاولة بروكلس لبرهنة بديهية اقليدس الخامسة:

البرهان: افترض بروكلس لبرهان بديهية التوازي الفرضية التالية

" المستقيم الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الاخر".

المفروض/ AB,CD مستقيمين وقد قطعهما القاطع AC , وكانت الزاويتان الداخليتان $\alpha + \beta < 180$.

م.ث: AB,CD يتلاقيان من جهة B,D .

البرهان:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\angle CAE + \angle\beta = 180$.

من Th28 لاقليدس والتي تنص" اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية والمقابلة لها في نفس الجهة من القاطع, او كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين , يكون المستقيمان متوازيين."

نحصل : AE يوازي CD .

ولكن $\alpha + \beta < 180$ من الفرض.

وبذلك تكون $\angle CAE$ اكبر من $\angle\alpha$.

أي ان AE لاينطبق على AB .

لذا فان AB يقطع احد المتوازيين AE, فيجب ان يقطع الموازي الاخر CD , وبذلك يتلاقى AB, CD .

ولو كان المستقيمين AB, CD يتلاقيان في جهة A,C لاصبح لدينا مثلث فيه زاويتين اكبر من 180 وهذا تناقض مع Th17 "مجموع زاويتان في مثلث كيفما اتخذت اقل من زاويتين قائمتين". أقليدس

اذن يجب ان يتلاقيان من جهة B,D .

محاولة عمر الخيام : حاول أن يبرهن " إذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاثة زوايا قوائم فان الزاوية الرابعة تكون قائمة أيضا".

رباعي الخيام: فرض ان AB قطعة مستقيم وان AC, BD عمودان على AB ثم رسم قطعة مستقيم بين C,D .

فتكون شكل رباعي ABCD وفيه.

١- $\angle A = \angle B = 90$. زوايا متجاورة وقائمة

٢- A-C=B-D .

يسمى هذا الشكل برباعي الخيام.

ويسمى الضلع A-B القاعدة (الضلع الذي يصل الزاويتين A,B) ويسمى الضلع C-D السمت (وهو الضلع المقابل للقاعدة) . ويسمى AC, BD بالساقين وتسمى الزاويتان $\angle C, \angle D$ بزاويتي السمت .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

برهان عمر الخيام:

اولا: برهن عمر الخيام ان زاويتي السمت في رباعي الخيام متساويتين .

ثانيا: برهن عمر الخيام ان المستقيم الواصل بين منتصف القاعدة والسمت في رباعي الخيام يكون عموديا عليها.

الخطأ في برهان عمر الخيام:

اعتمد على بديهيات تكافئ بديهية التوازي وهي:

١- اذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فان الزاوية الرابعة قائمة.
٢- المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين تكون ثابتة.

محاولة جون والاس:

فرض جون والاس انه بالامكان رسم مثلث مهما يكن قياسه يشابه مثلثا معلوما .ولكن هذه العملية من مكافئات البديهية الخامسة لاقليدس.

محاولة ساكيري :

حيث حاول اثبات ان مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين وذلك ببرهنة ان مجموع زوايا السمت لرباعي الخيام يساوي قائمتين.

لقد كان برهانه طويل ومعقد وغير واضح وقد اعطى بعض الحقائق الصحيحة منها:

١- اذا كان مجموع زاويتي السمت في شكل رباعي الخيام واحد قائمتين , فان أي شكل رباعي اخر مثل هذا يكون مجموع زاويتي السمت له قائمتان ايضا.
٢- اذا كان مجموع زاويتي السمت في شكل رباعي الخيام اقل او اكثر من قائمتين او يساوي قائمتين , فان مجموع زوايا المثلث يكون اقل او اكثر او يساوي لزاويتين قائمتين.
٣- اذا وجد مثلث واحد مجموع زواياه يساوي قائمتين او اقل او اكثر من قائمتين , فان مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام يساوي قائمتين او اقل او اكثر من قائمتين على التوالي.
٤- كل مستقيمين في المستوي اما ان يكون لهما عمود مشترك او يتقاطعان (اذا مدا) او يتقاربان باستمرار.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

محاولة ليجندر:

حاول ليجندر اثبات بديهية اقليدس الخامسة وذلك بان برهن مكافئتها " مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين " , افترض العكس بالبرهان وكان هناك احتمالين:

اولا: اذا كان مجموع زوايا المثلث اكثر من قائمتين. ولكن هذا يخالف نظرية ١٧ لاقليدس.

والخلل في هذا البرهان هو مد قطعة المستقيم الى مالانهاية وهذا غير صحيح.

ثانيا : اذا كان مجموع زوايا المثلث اصغر من قائمتين.

وهذا الاحتمال يؤدي الى ان مجموع زوايا المثلث يساوي $180^\circ - 2''\alpha$ سالبا , وهذا غير ممكن لان مجموع زوايا المثلث موجب.

٧- نصير الدين الطوسي

حاول ان يبرهن ان (مجموع زاويتي السمت في رباعي اكيام = زاويتين قائمتين)

ومن برهنة سابقة (مجموع زوايا المضلع = مجموع زاويتي السمت في رباعي اكيام)

⇐ مجموع زوايا المضلع = زاويتين قائمتين

الانتقاد:

ان الخلل في برهان نصير الدين الطوسي هو لم يبرهن العبارة التي اعتمد عليها في برهانه.

* زاوية السمت : هي زاوية تستخدم لتحديد اتجاهات الاجرام السماوية او الاجسام الطائرة وتقع بين الشمال الحقيقي واتجاه الجسم على سطح مستوي وتقاس في اتجاه عقارب الساعة بين الشمال والجسم المذكور.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفصل التاسع

الهندسة الهذلولية " Hyperbdic Geometry "

بديهية التوازي [لكل مستقيم ونقطة خارجة عنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر من تلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم]

معلوب

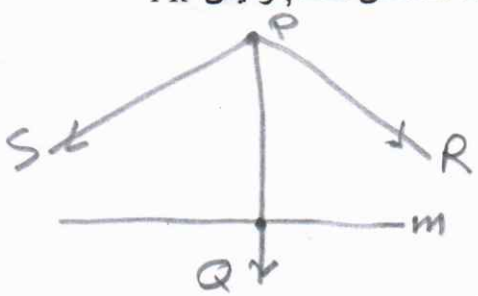
بعد المحاولات التي بذلت من قبل العلماء في برهان بديهية التوازي الخامسة لاقليدس بدأوا يشكون في امكانية برهان هذه البديهية ونتيجة لهذه المحاولات فقد ولدت الهندسة اللااقليدية وعندما اثبت عدم امكان اشتقاق بديهية التوازي من فرضيات اقليدس فقد بنيت الهندسة اللااقليدية على فرضيات اقليدس عدا بديهية التوازي . ولقد برهن العلماء .لقد تمكن العالمان جون بوليا الهنغاري ولوباجفسكي الروسي بان البديهية الخامسة مستقلة عن البديهيات الاربعة الاولى حيث تم تبديل البديهية الخامسة لاقليدس وحل محلها نقيضها في الحالة :

وجود اكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه , تدعى هذه الهندسة بالهندسة الهذلولية.

معلوب البديهية المميزة للهندسة الهذلولية:

بديهية التوازي الهذلولية HPP :

Ax17 : اذا كانت P نقطة لاتقع على مستقيم معلوم m , فانه يوجد شعاعان فقط , وليكن $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$, بحيث ان :



١- $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ شعاعين غير متعاكسين.

٢- $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ لايقطعان m .

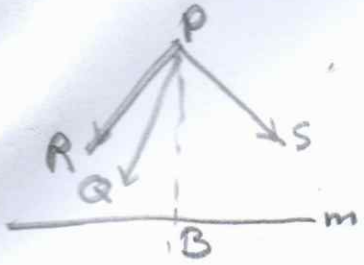
٣- أي شعاع $\vec{PQ}$ يقطع m اذا وفقط اذا $\vec{PQ}$ يقع بين $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$.

تعريف : كل من الشعاعين $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ المذكورين في HPP , يدعى موازي الى m من P .

مطلوبة مبرهنة ١٠٢:

اذا كان شعاع يقع بين شعاع موازي لمستقيم معلوم وشعاع يقطع المستقيم المعلوم فان الشعاع يقطع المستقيم المعلوم.

البرهان:



ليكن $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ شعاعين يوازيان خط m من نقطة P .

و B اية نقطة تقع على m و $\vec{PQ}$ أي شعاع يقع بين $\vec{PR}$ و $\vec{PB}$.

يجب ان نبرهن ان $\vec{PQ}$ يقطع m .

بما ان $\vec{PB}$ يقطع m , فانه من HPP , $\vec{PB}$ يقع بين $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$. وبما ان $\vec{PQ}$ يقع بين $\vec{PR}$ و $\vec{PB}$ فانه من Th4 : $\vec{PQ}$ يقع بين $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$, ومن HPP , $\vec{PQ}$ يقطع m .

[اذا كان AD يقع بين AB و AC وان AE يقع بين AD و AC ⇐ AE يقع بين AB و AC]

وبنفس الطريقة اذا فرضنا ان $\vec{PQ}$ يقع بين $\vec{PS}$ و $\vec{PB}$ فانه $\vec{PQ}$ يقطع m .

ملاحظة : من الواضح انه توجد مستقيمات عديدة لاتقطع المستقيم والتي هي ليست موازيات للمستقيم .

المبرهنة التالية تبين على ان الموازي هو اول المستقيمات التي لاتقطع.

المقبول فقط

مبرهنة ١٠٣: اذا كان $\vec{PQ}$ لايقطع مستقيم m , لكن أي شعاع يقع بين $\vec{PQ}$ و $\vec{PB}$, لحيث ان B نقطة على m , يقطع m , فان $\vec{PQ}$ يوازي المستقيم m .

البرهان:

ليكن m مستقيما , P نقطة لاتقع على m , و $\vec{PQ}$ شعاع لايقطع m .

من HPP : يوجد شعاعان $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ من P ويوازيان m .لتكن B اية نقطة على m .

من الفرض: P,B,Q لاتقععلى مستقيم واحد.

Q لاتقع على المستقيم PB .

تقع Q في احدى جهتي PB .

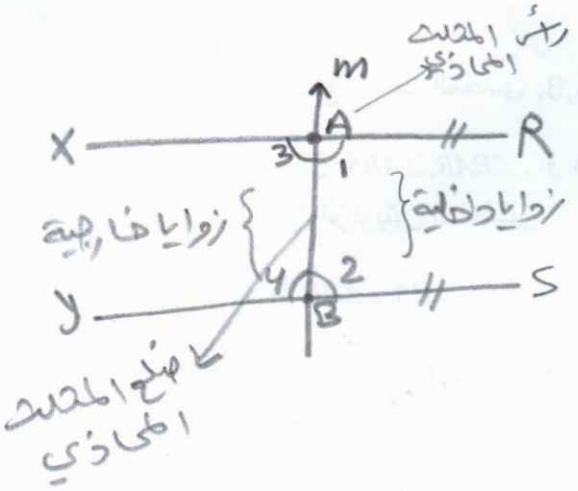
من HPP : $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ في الجهتين المتعاكستين للمستقيم PB .

وعليه يوجد احتمالين:

١- اما تقع Q في جهة $\vec{PB}$ التي تحتوي R .

المثلث المحاذي (مثلث ذو رأسين) :

عندما يقطع مستقيمين متوازيين بقاطع , فان الشكل الناتج يدعى مثلث مُحاذي او مثلث ذو راسين Two – vertices- triangle ويرمز له T-V-T , سنتناول خواصه كما يلي:



ليكن الشعاعين $\vec{XR}$ يوازي $\vec{YS}$ وقد قطعهما قاطع في النقطتين A,B على الترتيب بحيث كان:

١- X-A-R
٢- Y-B-S

اولا : ان المثلث المحاذي RABS يعرف بانه:

$$\Delta RABS = \vec{AR} \cup \vec{BS} \cup (A-B) \cup \{A,B\}$$

A-B تدعى ضلع المثلث المحاذي ,A,B تدعيان الراس.

ثانيا: الزاويتين $\angle BAR, \angle ABS$, او بعبارة اخرى $\angle 1, \angle 2$ يسميان زوايا المثلث المحاذي , وكذلك تدعيان الزاويتين الداخليتين.

ثالثا: الزوايا $\angle YBA, \angle XAB$, او بعبارة اخرى $\angle 3, \angle 4$ وزاويتاهما الراسيتان زوايا خارجية للمثلث المحاذي.

رابعا: لو اخذنا زوج من الزوايا احدهما داخلية والاخرى خارجية لمثلث محاذي وغير متجاورتين , فانهما يسميان داخلية مقابلة وخارجية مقابلة نسبة واحدة للاخرى مثل $\angle 4, \angle 1$ $\angle 3, \angle 2$

خامسا: يعرف داخل المثلث المحاذي هو عبارة عن تقاطع المجموعات التالية

(جهة الخط AB الحاوية R) ∩(جهة BS الحاوية A) ∩(جهة AR الحاوية B)=(داخل المثلث RABS)

سادسا: يعرف خارج المثلث المحاذي كما يلي

(داخل المثلث المحاذي) -X= خارج المثلث المحاذي

حيث تمثل X : المستوي الكلي.

او بعبارة اخرى: مجموعة كل النقاط التي لاتقع على المثلث ولاتقع في داخله.

مبرهنة ١١٢: المنطوق فقط

لتكن P نقطة في داخل مثلث محاذي RABS فان:

١- الخط الذي يمر من P واي راس من المثلث يقطع الشعاع الاخر.
٢- الخط الذي يمر من P ويوازي أي من الشعاعين يقطع الضلع.

البرهان:

١- بما ان P تقع في داخل المثلث المحاذي
اذن P تقع داخل $\angle 1$.

وحسب Th41 : $\vec{AP}$ يقع داخل $\angle 1$.

الفصل العاشر : الهندسة الاهليجية أو (الناقصية والبيضوية)

Elliptic Geometry

ان اول من اشار الى هذه الهندسة هو العالم الالماني ريمان في عام ١٨٥٤ في رسالة الدكتوراه حيث اخذ نقيض بديهية بليفر " وهي احدى مكافئات البديهية الخامسة لاقليدس " وكما يلي :

البديهية المميزة للهندسة الاهليجية:

" لايمكن رسم أي مواز لخط معلوم من نقطة خارجة عنه".

وفي هذه الهندسة ميز ريمان بين فكرة المستقيم الغير منتهي وفكرة المستقيم الغير محدود . (حيث سابقا لايوجد فرق) وبذلك اخذ الخطوط اقواس لدوائر عظيمة على سطح كرة نصف قطرها الثابت a . فان الخط منتهي بالطول , حيث له محيط معلوم ولكن غير محدود في المفهوم الذي نستمر فيه حول الكرة دون توقف.

اذا الكرة هي نموذج لهذه الهندسة.

نقاط هذا النموذج هي نقاط على سطح الكرة.

وان المستقيمات لهذا النموذج هي دوائر عظيمة. بما ان الدوائر العظمى تتقاطع دائما , فان المستقيمين يتقاطعان دائما , ولذلك لاتوجد مستقيمات موازية للمستقيم.

بما ان توجد عدد غير منته من دوائر عظمى تمر بنقطتين متقابلتين بالقطر, فان النقطتين لاتعينان دائما مستقيما واحدا فقط. وبذلك فان بديهيات الوقوع غير متحققة. والتحول من الهندسة الاقليدية الى الهندسة الاهليجية لايتم بسهولة كما يتم مع التحول من الهندسة الاقليدية الى الهندسة الهذلولية.

يوجد نوعان من الهندسة الاهليجية:

١- الهندسة الاهليجية الاحادية: (Single E.G) والتي يكون فيها أي مستقيمين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط. وان المستوى الاهليجي يتميز بان سطحه له جهة واحدة . وكمثال بسيط على ذلك ورقة موفيس, ونموذج اخر عليها هو نصف كرة فقط .

٢- الهندسة الاهليجية الثنائية: (Double E.G) والتي يكون فيها أي مستقيمين يتقاطعان في نقطتين . وان المستوي الاهليجي يتميز بان سطحه له جهتين . مثلا الكرة التي فيها جهتين .

مبرهنة ١ : أي مستقيمين في الهندسة الاهليجية المزدوجة يتقاطعان في نقطتين ويحيطان منطقة لمساحة منتهية A حيث ان $A \neq 0$. او الخط المار بنقطتين متقابلتين ليس وحيد .

سنوضح عددا من المبرهنات المشتركة للهندسة الاحادية والمزدوجة .

مطلوب مبرهنة ٢: العمودان على نفس المستقيم يتقاطعان في نقطة . مثلا تقاطع خطوط الطول والعرض على سطح الكرة الارضية.
نستنتج هذه المبرهنة من البديهية المميزة لهذه الهندسة , حيث ان الخطين في المستوي يتقاطعان دائما.

مطلوب مبرهنة ٣: الاعمدة على كل النقاط لمستقيم تلتقي في نقطة تدعى قطب الخط, وبالعكس كل مستقيم يمر بالقطب يكون عموديا على المستقيم . مثل خطوط الطول هي نماذج للخطوط العمودية على خط الاستواء , وان كل هذه الخطوط تتقاطع في القطبين الشمالي والجنوبي .
المسافة q من قطب مستقيم للمستقيم , هي المسافة القطبية للمستقيم.

مطلوب مبرهنة ٤: في أي مثلث ABC , الذي فيه $\angle B = \angle C = 90$, $\angle A$ تكون اصغر من ,تساوي او اكبر من 90 نسبة الى ان القطعة BC اصغر من , تساوي , او اكبر من المسافة القطبية q .

مطلوب مبرهنة ٥: مجموع زوايا المثلث هو اكبر من 180 .
البرهان:
لتكن B, C نقطتين مختلفتين على مستقيم l . نرسم مستقيمين عموديين من l على B,C وهذان المستقيمان سيتقاطعان في نقطة A .
ولذلك فان مجموع زوايا المثلث اكبر من 180 .

جدول لمقارنة بين الهندسة الاقليدية واللااقليدية :

	اقليدية	هذلولية	اهليجية
يتقاطع المستقيمان في	نقطة واحدة في الاكثر	نقطة واحدة على الاكثر	نقطة واحدة (احادية) نقطتان (المزدوجة)
ليكن l مستقيما و P نقطة لاتقع على l فانه.	يوجد موازي واحد وواحد فقط للمستقيم l من P	يوجد موازيان للمستقيم l من P	لايوجد موازي الى l من P
يفصل المستقيم الى نصفين	بواسطة نقطة	بواسطة نقطة	كلا
اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فانه	يقطع الاخر	قد يقطع ا و لا يقطع	—
العمودان على نفس المستقيم يكونان	متوازيين	غير متوازيين	متقاطعان
مجموع زوايا المثلث	تساوي زاويتين قائمتين	اقل من زاويتين قائمتين	اكثر من زاويتين قائمتين

الفصل الحادي عشر

الهندسة الاسقاطية التركيبية:

نستذكر البديهيات الاربع الخاصة بالهندسة الاسقاطية التي تناولناها بالفصل الاول:

١- لاي نقطتين مختلفتين A و B في π , يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.
٢- كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
٣- توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل مستقيم واحد l بحيث ان $A \notin l$.
٤- أي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.

مبرهنة ١: أي مستقيمين مختلفين l,m في π يتقاطعان بنقطة واحدة وواحدة فقط.

مبرهنة ٢: اية نقطة في π يمر بها ثلاث مستقيمات في الاقل.

مبدأ الثنائية (Principle of duality)
تعريف: عبارتان تكون أحداهما ثنائية (dual) للأخرى إذا أمكن حصول واحدة من الأخرى بتبديل الكلمتين " النقطة" و " المستقيم" أحداهما محل الأخرى.
نتيجة لذلك تقع على ⟵ يمر به .
نصل خط بين نقطتان ⟵ يتقاطع الخطان.
نقاط على خط واحد ⟵ خطوط ملتقية بنقطة واحدة.
مثال : اوجد مثنى العبارة التالية
يوجد على الأقل نقطة A خارجة من خط معلوم l .
المثنى (dual): يوجد على الأقل خط l لايمر من نقطة معلومة A .

ملاحظة// تدعى العبارة ثنائية نفسها (self dual) إذا حصلنا على نفس العبارة بتبديل الكلمتين " النقطة" و " المستقيم".
مثال// المثلث " ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد مع الخطوط الواصلة بينها"
المثنى// ثلاث خطوط مختلفة ولا تلتقي بنقطة واحدة مع نقاط تقاطعهما.

ملاحظة: من الجدير بالذكر نلاحظ إن مبدأ الثنائية يتحقق على البديهيات الأربع الأولى , لذا فان أي عبارة نحصل عليها من البديهيات الاربع تكون صحيحة.
فمبرهنة ١ هي ثنائية بديهية رقم ١ , مبرهنة ٢ هي ثنائية بديهية ٢ , بديهية ٣ هي ثنائية نفسها , وثنائية بديهية ٤ " لاي نقطتين يوجد على الاقل مستقيم واحد يحتويهما" .

تعريف " حزمة المستقيمات": Pencil of lines
هي مجموعة كل المستقيمات التي تمر بنقطة O . النقطة O تدعى رأس الحزمة " vertex" .

" حزمة النقاط" : Pencil of points
هي مجموعة كل النقاط التي تقع على مستقيم l . المستقيم l يدعى محور الحزمة " axis ".

"الشكل" : هو مجموعة جزئية غير خالية من المستوي الاسقاطي π .

تعريف التشكيلات Configuration :
مجموعة من m من النقاط و n من المستقيمات في π , بحيث ان :
- ❖ كل نقطة من m من النقاط يمر بها عدد ثابت وهو a من المستقيمات.
- ❖ كل مستقيم من n من المستقيمات يحتوي على عدد ثابت وهو b من النقاط .

هي تشكيل (m_a, n_b) .
امثلة : تشكيل المثلث $(3_2, 3_2)$
: تشكيل المربع $(4_2, 4_2)$.
: تشكيل الخماسي $(5_2, 5_2)$.
: تشكيل فانو $(7_3, 7_3)$.
: تشكيل..... $(6_2, 4_3)$؟
: تشكيل ..... $(4_3, 6_2)$؟

مبرهنة رقم ٣:
اذا كان (m_a, n_b) تشكيلا في المستوي الاسقاطي , فان ma=nb .
البرهان:
بما ان كل نقطة من m من النقاط يمر بها a من المستقيمات , فانه ينبغي ان يكون ma من المستقيمات . لكن كل مستقيم يحتوي على b من النقاط , أي ان المستقيم يتكرر b من المرات.
لذلك , يكون عدد الخطوط $\frac{ma}{b} = n$
أي ان ma=nb .

تعريف : يقال عن تشكيل انه ثنائي نفسه (self - dual) اذا احتوى عل عدد النقاط كعدد المستقيمات .
(m_a, n_b) هو ثنائي نفسه اذا كان m=n .
فان a=b , لان am=mb .
أي ان التشكيل ثنائي نفسه يكون (m_b, m_b) .
سنرمز لهذا التشكيل بالرمز (m_b).
مثال // المثلث هو (3_2) تشكيل ثنائي نفسه .

تعريف: اربع نقاط في π , لاتوجد أي ثلاثة منها على مستقيم واحد, وستة مستقيمات تتعين من ازواج هذه النقاط تكون رباعي زوايا تام (a complete quadrangle) .

الفصل الثالث عشر

هندسة التحويلات

تعريف (التحويل الهندسي) : ليكن S مستوي فيسمى اي تطابق $f: S \to S$ تحويل هندسي اذا كان تقابل (تباين وشامل) .

تعريف (زمرة التحويلات الهندسية) : ليكن S مستوي و G زمرة فيقال بان G تعمل كزمرة تحويل على S اذا تحقق الشرطان التاليان :

1- لاي عنصر $A \in G$ يعطي تحويل T_A حيث ان $T_A: S \to S$

2- لاي عنصرين $A, B \in G$ فان $T_{AB} = T_A \circ T_B$ حيث ان $T_A \circ T_B$ هي تركيب التحويلين T_A, T_B

مثال : ليكن $S = R^2$ و ان $G = G(2,R) = \{A : 2\times 2$ مصفوفة غير المفردة حيث A$\}$ هل ان G زمرة تحويل هندسي على S ؟

الحل /

$$T_A: R^2 \to R^2 \Rightarrow T_A(X) = AX$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

ليكون T_A تباين لان $AX = AY \Leftarrow A(X-Y) = 0$

وتكون عبارة عن معادلات متجانسة وليس لها حلول غير الصفرية لان المصفوفة A غير المفردة اي $|A| \neq 0 \Leftarrow X = Y$

وليكون T_A شامل فاذا اخذنا $Y \in R^2_S \Leftarrow$ يمكن ايجاد X في R^2 بحيث ان $T_A(X) = Y \Leftarrow AX = Y$

لتحقيق الشرط الثاني

$$(T_A \circ T_B)(X) = T_A(T_B(X)) = T_A(BX) = A(BX)$$

$\therefore G$ تحويل هندسي على S

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

زمرة التحويلات الإسقاطية

ناخذ المستوى الإسقاطي التحليلي $P^2=R^3-\{0\}$ ولتكن $G(3,R)$ مجموعة كل المصفوفات غير الانفرادية لـ X وان $X\in P^2$ فاذا اخذنا AX كنقطة مكونة من ثلاثي مرتب فان A يعطي التحويل $T_A:P^2\to P^2$ بحيث ان $T_A(X)=AX$

تعريف (التحويل الإسقاطي): اذا كان $A\in PG(2,R)$ فان التحويل $T_A:P^2\to P^2$ يدعى تحويل إسقاطي على P^2 ويكتب بالشكل $X=AX$ ويوجد $A\in PG(2,R)$ اي ان A هو صف تكافؤ للمصفوفات التي سعتها $3X3$ وعندما يكون $X\in P^2$ فرزا يعني X هو متجول X بفعل التحويل $T_A:P^2\to P^2$

تعريف (الهندسة الإسقاطية): تعرف كدراسة للخواص التي لا تغير المجموعة $PG(2,R)$ بفعل الزمرة P^2.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥- التحويل الإسقاطي

مبرهنة (١) التحويل الإسقاطي يحول النقاط الواقعة على مستقيم واحد الى نقاط تقع على مستقيم واحد .

مبرهنة (٢) التحويل الإسقاطي يحفظ تقاطع مستقيم الى مستقيم اخر .

مبرهنة (٣) التحويل الإسقاطي $\bar{X} = AX$ يحول المستقيم $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ الى المستقيم $u^t \cdot \bar{A}^{-1}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المستوى التالفي التحليلي: Analytic Affine Plane

يمكن تكوين نموذج للمستوى التالفي من المستوى الاسقاطي وذلك بحذف المستقيم $X_3 = 0$ من P^2 ليكون المستقيم المحذوف.

المستوى التالفي التحليلي يعرف بالمجموعة التالية: $A^2 = \{(X_1, X_2, X_3) \in P^2 : X_3 \neq 0\}$

مبرهنة :

في المستوى التالفي التحليلي يمكن كتابة النقطة بالشكل (x,y,1).

البرهان:

لتكن $p = (X_1, X_2, X_3)$ نقطة في A^2, فان $X_3 \neq 0$. لذلك بما ان

$$(X_1, X_2, X_3) = (\frac{X_1}{X_3}, \frac{X_2}{X_3}, \frac{X_3}{X_3}) = (x, y, 1).$$

تعريف:

(x,y,1) هي احداثيات تالفية للنقطة في A^2.

مبرهنة:

في المستوي التالفي , المستقيم بالشكل $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ لايحتوي على النقطة $(-u_2, u_1, 0)$.

البرهان:

بما ان المستقيم $X_3 = 0$ قد حذف من المستوى الاسقاطي , فان $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ لايحتوي على نقطة تقاطعه مع المستقيم $X_3 = 0$, أي ان

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -u_2X_1 - (-u_1)X_2 + (0)X_3$$

$$= (-u_2, u_1, 0)$$

او

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (u_2, -u_1, 0)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعريف:
النقطة $(-u_2,u_1,0)$ او النقطة $(u_2,-u_1,0)$ هي النقطة المحاذية للمستقيم $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

مبرهنة:
في مستوي تآلفي , المستقيمان $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ و $v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0$
يكونان متوازيين اذا وفقط اذا $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$.

البرهان:
يكون المستقيمان متوازيين اذا لم يشتركا باية نقطة. لذلك , يكونا متوازيين اذا وفقط اذا كمستقيمين في P^2 تكون نقطة تقاطعهما تقع على المستقيم $X_3=0$, أي ان , اذا وفقط اذا:

$$(-u_2,u_1,0)=(-v_2,v_1,0)$$

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$$

نتيجة: $u_1x_1+u_2x_2+Kx_3=0$ تمثل مجموعة من مستقيمات متوازية لمختلف قيم K .

ملاحظة:
١- التحويل الاسقاطي هو تحويل تآلفي , اذا كان بالشكل
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.(a_{33}\neq 0)$, أي ان زمرة التحويلات التآلفية , تعرف

$$AG(2,R)=\left\{A\in PG(3,R);A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}\right\}$$

٢- يمكن كتابة التحويل التآلفي بالشكل التالي:

$A=\begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, حيث ان $a=\frac{a_{11}}{a_{33}},b=\frac{a_{12}}{a_{33}},c=\frac{a_{21}}{a_{33}},d=\frac{a_{22}}{a_{33}},k=\frac{a_{23}}{a_{33}},h=\frac{a_{13}}{a_{33}}$

اذن زمرة التحويلات التآلفية هي :

$$H_1=\left\{A\in G(3,R):A=\begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

٣- النقطة (x,y,1) تتحول الى النقطة (x',y',1) , حيث ان :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أي ان $x' = ax + by + h$
$y' = cx + dy + k$

يمكن ان نكتب المستقيم $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ بالشكل $u_1x + u_2y + u_3 = 0$.

كذلك اذا كان $u_1x + u_2y + u_3 = 0$ يتحول الى $u_1'x + u_2'y + u_3' = 0$, فان

$$[u_1, u_2, u_3] = [u_1', u_2', u_3'] \begin{bmatrix} a & b & h \\ c & d & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

٤- ان التحويل التالفي يحفظ المستقيم المحاذي ثابتا ويرسل نقطة محاذية الى نقطة محاذية ,ان التوازي يحفظ بفعل زمرة التحويلات التالفية .

تعريف:

اذا كانت A و B نقطتين على مستقيم l والذي له النقطة $P\infty$ كنقطة محاذية , فان نقطة P تقع بين A و B اذا كان $AB/PP\infty$. مجموعة كل نقاط l بين A و B تدعى القطعة AB .

نقطة منتصف القطعة AB تعطى بواسطة المرافق التوافقي الى $P\infty$ بالنسبة الى A و B . أي ان D , هي منتصف القطعة AB اذا كان $H(AB, DP\infty)$.

أي ان $D \in AB$. كذلك بما ان $P\infty$ والخاصية التوافقية لاتتغيران بفعل زمرة التحويلات التالفية, فانه تكون كذلك مفاهيم البينية , القطعة ومنتصف القطعة.

مبرهنة:

لتكن $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ نقطتين في مستوي تالفي . فان نقطة منتصف القطعة AB هي:

$(b_3a_1 + a_3b_1, b_3a_2 + a_3b_2, 2a_3b_3)$.

البرهان:

بما ان $P\infty$ و D هما نقطتان على المستقيم AB , فانه نستطيع ان نكتب D=pA+qB

$$P\infty = SA + TB = (sa_1 + tb_1, sa_2 + tb_2, sa_3 + tb_3)$$

$P\infty$ هي نقطة محاذية , $sa_3 + tb_3 = 0$

أي ان $s/t = -b_3/a_3$.

من مبرهنة " اذا كانت $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ نقطتين على مستقيم , فان الشرط S=cX+dY و Z=aX+bY تكون توافقية بالنسبة الى X و Y هو ان $\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = 0, [a,b] \neq [c,d]$ ".

بما ان $H(AB, DP\infty)$, يكون عندنا $\frac{p}{q} + \frac{s}{t} = 0$

أي ان $\frac{p}{b_3} = \frac{q}{a_3}$.

المستوى الاقليدي وزمرة التحويلات الاقليدية:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المستوى التالفي التحليلي A^2 هو مجموعة جزئية من المستوى الاسقاطي التحليلي P^2 , زمرة التحويلات التالفية هي زمرة جزئية من زمرة التحويلات الاسقاطية.
بهذا الهندسة التالفية هي هندسة جزئية من الهندسة الاسقاطية.
ان الهندسة الاقليدية هي هندسة جزئية من الهندسة التالفية.
حيث يمكن تكوين مستوى اقليدي من A^2 باعطاء دالة مسافة.
لتكن الاحداثيات التالفية للنقطتين P=(x,y,1) و Q=(x',y',1) , نعرف

$$d(P,Q)=\sqrt{(X-X')^2+(Y-Y')^2}$$

بهذا القياس المستوى التالفي يحقق كل بديهيات المستوى الاقليدي.
ملاحظة:
زمرة التحويلات الاقليدية او زمرة التقايسات (isometries) للمستوى الاقليدي هي:

$$H_2=\left\{A\in G(3,R):A=\begin{bmatrix} a & b & h \\ be & -ae & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

حيث ان $e^2=1, a^2+b^2=1, be=(ce)e=ce^2=c$, كما ان $|A|=\pm 1$.

تعريف: لتكن $A=(a_1,a_2,a_3), B=(b_1,b_2,b_3)$ و $C=(c_1,c_2,c_3)$ ثلاث نقاط في المستوي الاقليدي . فان قياس مساحة المثلث ABC والتي يرمز له بالرمز m(ABC) هو القيمة المطلقة للمحدد $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$

مبرهنة : قياس مساحة مثلث لايتغير بموجب زمرة التقايسات.

تعريف:
الزاوية θ المحددة بالمستقيمين
$u_1x+u_2y+u_3=0$ و $v_1x+v_2y+v_3=0$ في المستوي الاقليدي تعرف كما يلي:

$$\cos\theta=\frac{|u_1v_1+u_2v_2|}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)}}$$

$$\sin\theta=\frac{|u_1v_1-u_2v_2|}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)}}$$

يكون المستقيمان متعامدين اذا كانت الزاوية المحددة بهما تحقق $\cos\theta=0$.

مبرهنة:
الزاوية θ المحددة بمستقيمين لاتتغير في زمرة التقايسات.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner