

مخردات - المنهج

الفصل الأول :-

- ١) طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة
- ٢) المعادلات التفاضلية الجزئية المتجانسة
- ٣) طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية (لا كرايغ - جارس) استخدام التحويلات
- ٤) حل المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة والرتبة العليا (حل عام وحل خاص).

الفصل الثاني :-

- ١) طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير المتجانسة
- ٢) طرائق حل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة
- ٣) طرائق حل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة
- ٤) معادلات غير متجانسة يمكن ان تتحول الى متجانسة
- ٥) طريقة الحامل المرافق لإيجاد الحل الخاص
- ٦) طريقة التحويلات
- ٧) انفاط المعادلات من الرتبة الثانية

الفصل الثالث :-

سلاسل فورييه

- ١) تعريفها وكيفي إيجادها
- ٢) السلاسل الفورية الفردية والزوجية
- ٣) تقارب السلاسل الفورية
- ٤) سلاسل فورييه المتكاملة

- (5) سلاسل القوة $[L, L^2, \dots]$
 (6) تفاضلات وتعاملات السلاسل العنصرية

الفصل الرابع:

- معادلات التوفيق الكوارية .
 (1) معادلات التوفيق الكوارية في البعد الواحد (فصل المتغيرات)
 (2) معادلات التوفيق الكوارية بشروط حدودية متجانسة .
 (3) معادلات التوفيق الكوارية بشروط حدودية متغيرة .

الفصل الخامس:

- معادلات الموجة في البعد الواحد .
 (1) معادلات الموجة ذات البعد الواحد (فصل المتغيرات)
 (2) معادلات الموجة بشروط حدودية متجانسة .
 (3) حل معادلات الموجة .

الفصل السادس:

- معادلات لابلاس
 (1) معادلات لابلاس في البعدين
 (2) معادلات لابلاس في الأبعاد الثلاث (الفضاء)

المصادر:

- (1) مقدمة إلى المعادلات (اللاكرايج - جارت)
 (2) نظريات ومسائل (سلسلة شوم) فرانك لينز

English:-

- 1) Partial differential equation (F.H. Milard)
 2) Elements of partial differential equation (Sneegon).

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية الجزئية : هي معادلات تمويده على مشتقات جزئية خلافاً للمعادلات التفاضلية الاعتيادية حيث يعتمد الدالة المجهولة على متغير مستقل واحد فان الدالة في المعادلة التفاضلية الجزئية تعتمد على عدد من المتغيرات مثل درجة الحرارة (بالدلالة) حيث ان يمثل الموضع x يمثل الزمان t

التصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية :

تتميز المعادلات التفاضلية الجزئية ببناءاً على اعتبارات عديدة والتصنيف هو مفهوم مهم لأن التفرع العام وظروف الحد تكيف عادة "على حسب" حيث من المعادلات

(1) رتبة المعادلة : هي رتبة أعلى مشتقة تظهر في المعادلة
(2) عدد المتغيرات : هو عدد المتغيرات المستقلة التي تعتمد عليها الدالة المجهولة .

(3) الخطية : المعادلات التفاضلية الجزئية إما تكون خطية أو تكون غير خطية في المعادلات الخطية يظهر المتغير المعتمد (المستقل) أو مشتقاته بمجموعة خطية أي أنها غير مضروبة ببعضها أو أن أحدها مرفوع للأسه أكثر من واحد .

(4) التجانس : تكون المعادلات التفاضلية الخطية متجانسة إذا كان كل حد فيها يحتوي على الدالة المجهولة أو إحدى مشتقاتها الجزئية

(5) نوع المعادلات : إذا كانت المعادلات في المعادلات ثوابت فند أن تسمى المعادلات ذات المعاملات الثابتة وإذا لم تكن كذلك تسمى المعادلات ذات المعاملات المتغيرة

$$① \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

المعادلة من الرتبة الثانية

الدالة خطية لأنها غير مربعة بغيرها أو مربعة جاعداً مستعانتها

وخطية

ذات معاملات ثابتة

$$② \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x$$

رتبة ثانية وخطية وغير متجانسة (لعدم ظهور الدالة كواحد)

مستعانتها في الطرف اليمين

ذات معاملات ثابتة

$$③ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

رتبة ثانية وخطية لأن الدالة ظهرت في كل الطرفين

وغير خطية لأن الدالة مربعة جاعداً مستعانتها

ذات معاملات متغيرة

$$④ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2$$

رتبة أولى وغير خطية (مربعة لـ $\frac{\partial z}{\partial x}$ كيف دالة أي مربعة بغيرها $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$)

مستعانتها وذات معاملات متغيرة لأن ظهرت y

$$⑤ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

رتبة ثانية وخطية وخطية

ذات معاملات متغيرة

حل المعادلات التفاضلية الجزئية

هو ايجاد علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية الجزئية لتكون

(١) خالية من المشتقات

(٢) تحقق المعادلة (ايه يكونها اكل متجانسة)

(٣) تحتوي على واحد أو أكثر من الدوال الاعتيادية

أثبت ان $z = y^2 f(x) - 3x + 4y$ هو حل للمعادلة التفاضلية

$$y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 6x - 4y$$

حيث ان $f(x)$ دالة اختيارية

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y f(x) + 4$$

$$y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 6x - 4y$$

$$y [2y f(x) + 4] - 2(y^2 f(x) - 3x + 4y) = 6x - 4y$$

$$2y^2 f(x) + 4y - 2y^2 f(x) + 6x - 8y = 6x - 4y$$

$$6x - 4y = 6x - 4y$$

أثبت أنه $U = e^x \cos y$ هو حل المعادلة $\Delta U = 0$

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

$$U_x = e^x \cos y$$

$$U_{xx} = e^x \cos y$$

$$U_y = -e^x \sin y$$

$$U_{yy} = -e^x \cos y$$

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

$$e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

$$0 = 0$$

أثبت أنه $Z = ax + \frac{y}{a}$ هو حل المعادلة $x p^2 - Z p + y = 0$ حيث $p = \frac{\partial Z}{\partial x}$

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x} = a$$

$$\therefore x a^2 - (ax + \frac{y}{a}) a + y = 0$$

$$x a^2 - x a^2 - y + y = 0$$

$$0 = 0$$

p^2
كثير الحدود
الدرجة الثانية
 $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2$

المقاربت
الاجابة ان $U = e^{x+2t}$ وحل المعادله $4U_{xx} - U_{tt} = 0$

$$U_x = e^{x+2t}$$

$$U_{xx} = e^{x+2t}$$

$$U_t = 2e^{x+2t}$$

$$U_{tt} = 4e^{x+2t}$$

$$\therefore 4U_{xx} - U_{tt} = 0$$

$$4e^{x+2t} - 4e^{x+2t} = 0$$

$$0 = 0$$

الاجابة ان $U = k \cos 3t \sin 3x$ وحل المعادله $U_{tt} - U_{xx} = 0$

$$U_t = k \sin 3x (-\sin 3t) \cdot 3$$

$$= -3k \sin 3x \sin 3t$$

$$U_{tt} = -9k \sin 3x \cos 3t$$

$$U_x = 3k \cos 3x \cos 3t$$

$$U_{xx} = -9k \sin 3x \cos 3t$$

$$U_{tt} - U_{xx} = 0$$

$$-9k \sin 3x \cos 3t - (-9k \sin 3x \cos 3t) = 0$$

$$0 = 0$$

(3) انتبه ان $u = (y^2 - x^2)^2$ هو حل المعادلة $y u_x + x u_y = 0$

$$u_x = 2(y^2 - x^2) \cdot (-2x) \\ = -4x(y^2 - x^2)$$

$$u_y = 2(y^2 - x^2) \cdot 2y \\ = 4y(y^2 - x^2)$$

$$y u_x + x u_y = 0$$

$$y [-4x(y^2 - x^2)] + x [4y(y^2 - x^2)] = 0$$

$$-4x y^3 + 4x^3 y + 4x y^3 - 4x^3 y = 0 \\ 0 = 0$$

منشأ المعادلة التفاضلية الجزئية

Original of partial differential equation

(1) حذف الدوال الارتباطية u function of orbitory

بما ان الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية تتضمن دوال اختيارية فانه يمكن الحصول على معادلات تفاضلية جزئية وذلك بازالة هذه الدوال

$$Z = U(x+y)$$

جد المعادلة التفاضلية الجزئية
حيث ان U دالة اختيارية

$$\text{let } u = x+y$$

$$Z = U(u)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = P = \frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$P = U'(x+y) \cdot 1$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = Q = \frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$Q = U'(x+y) \cdot 1$$

$$\therefore P = Q$$

$$P - Q = 0$$

حيث ان $Z = 0$

احذف الاكس (المتغيرين) من المعادلتين

$$Z = f(x) + e^y g(x)$$

تتبع ذلك المعادلات الاختيارية في المعادلتين

عني هنا مشتقة مشتقة

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = P = f'(x) + e^y g'(x)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = Q = e^y g(x)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = k = e^y g(x)$$

$$\therefore Q = k$$

$$Q - k = 0 \quad \text{حيث ان } Z = 0$$

أخذ في الدالتين الرضيتين هذا الملاحظ

$$Z = y F(x) + x g(y)$$

٢٠١٥
١

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = P = y F'(x) + g(y) \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = Q = F(x) + x g'(y) \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = S = F'(x) + g'(y) \quad \text{--- (3)}$$

$$F'(x) = \frac{1}{y} [P - g(y)] \quad \text{من المعادلة (1)}$$

$$g'(y) = \frac{1}{x} [Q - F(x)] \quad \text{من المعادلة (2)}$$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد

$$S = \frac{1}{y} [P - g(y)] + \frac{1}{x} [Q - F(x)] \quad \times xy$$

$$Sxy = x[P - g(y)] + y[Q - F(x)]$$

$$Sxy = xP - xg(y) + yQ - yF(x)$$

$$Sxy = xP + yQ - (xg(y) + yF(x))$$

$$Sxy = xP + yQ - Z$$

ن.م.م

11 ✓ اوجد المعادلة التفاضلية التي تحلها المعاد

$$u(x^2 - y^2, y^2 + \frac{1}{2} z^2) = 0$$

let: $u = x^2 - y^2$

$$v = y^2 + \frac{1}{2} z^2$$

نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot 2p \quad \text{--- ①}$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial u} \cdot (-2y) + \frac{\partial u}{\partial v} \cdot (2y + 2q) \quad \text{--- ②}$$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2p \\ -2y & 2y + 2q \end{vmatrix} = 0$$

$$2x(2y + 2q) - 2p(-2y) = 0$$

$$4xy + 2xzq + 2zpy = 0$$

$$Z = y^2 f(x) - 3x + 4y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = P = y^2 f'(x) - 3$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = Q = 2y f(x) + 4 \quad \text{--- (1)}$$

من المعادلة (1) نجد أن

$$f(x) = \frac{1}{2y} (9 - 4)$$

بالنعويض في المعادلة الأصلية نجد أن

$$Z = y^2 \cdot \left(\frac{1}{2y} \right) (9 - 4) - 3x + 4y$$

$$Z = \frac{1}{2} y 9 - 2y - 3x + 4y$$

$$Z = \frac{1}{2} y 9 - 3x + 2y \quad \text{ج. 2.2}$$

جد المعادلة التفاضلية الجزئية من حيث x

$$Z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = P = x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$P = -\frac{y}{x} \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = Q = x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$Q = f'\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{--- (2)}$$

بنعويض (2) في (1) نجد أن

$$P = -\frac{y}{x} Q + f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{--- (3)}$$

من المعادلة الأصلية نجد أن

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{z}{x}$$

بالعوض في المعادلة (3) نجد أن

$$P = -\frac{y}{x}q + \frac{z}{x}$$

$$Px = -yq + z$$

$$\therefore z = xP + yq$$

نجد أن

$$y = z u(x+y)$$

نسب

نتخذ جانباً لـ x

$$0 = z \cdot u'(x+y) \cdot 1 + u(x+y) \cdot P \quad (4)$$

نتخذ جانباً لـ y

$$-1 = z \cdot u'(x+y) + u(x+y)q \quad (5)$$

بالطرح

$$-1 = u(x+y)P - u(x+y)q$$

$$-1 = u(x+y)[P - q]$$

$$u(x+y) = \frac{-1}{P-q}$$

$$P-q$$

نأخذ المشتقة في المعادلة الأصلية نجد أن

$$y' = z \left(\frac{-1}{P-q} \right)$$

$$-z = Py - qy$$

نجد أن

$$U(x^2 - z^2, y^2 - z^2) = 0$$

let $u = x^2 - z^2$

$v = y^2 - z^2$

الدالة كمربع

$U(u, v)$

نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} \cdot (2x - 2z) + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot (-2z)$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} \cdot (-2z) + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot (2y - 2z)$$

$$\begin{vmatrix} 2x - 2z & -2z \\ -2z & 2y - 2z \end{vmatrix} = 0$$

$$(2x - 2z)(2y - 2z) + 2z(-2z) = 0$$

$$4xy - 4xz - 4zy + 4z^2 - 4z^2 = 0$$

$$4xy - 4xz - 4zy = 0$$

$$xy - xz - yz = 0 \quad \text{ع. م. م.}$$

$$z = e^{-y} f(x) + e^x g(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = e^{-y} f'(x) + e^x g(y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = -e^{-y} f(x) + e^x g'(y) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = r = -e^{-y} f'(x) + e^x g'(y) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{-y}} [p - e^x g(y)]$$

من (1) نعلم

$$g'(y) = \frac{1}{e^x} [q + e^{-y} f(x)]$$

من (2) نعلم

نحذف في المعادلة (3) نعلم

$$r = -e^{-y} \cdot \frac{1}{e^{-y}} [p - e^x g(y)] + e^x \cdot \frac{1}{e^x} [q + e^{-y} f(x)]$$

$$r = -p + e^x g(y) + q + e^{-y} f(x)$$

$$r = q - p + [e^x g(y) + e^{-y} f(x)]$$

$$r = q - p + z$$

$$z = q - p + r$$

$$U(xyz, x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$\text{let: } u = xyz$$

$$V = x^2 + y^2 + z^2$$

نشتق بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} \cdot y[x \cdot p + z] + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot (2x + 2zp)$$

نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} \cdot x(y \cdot q + z) + \frac{\partial U}{\partial v} \cdot (2y + 2zq)$$

$y(xp + z)$	$2x + 2zp$	$= 0$
$x(yq + z)$	$(2y + 2zq)$	

$$y(xp + z)(2y + 2zq) - x(2x + 2zp)(yq + z) = 0$$

$$2xy^2p + 2xy\cancel{z}p + 2y^2z + 2y\cancel{z}^2q - 2x^2yq - 2x^2z - 2x\cancel{y}z^2p - 2x\cancel{z}^2p = 0$$

$$2xy^2p + 2y^2z + 2y\cancel{z}^2q - 2x^2yq - 2x^2z - 2x\cancel{z}^2p = 0$$

2... 2... 2

$$z = (x+y) f(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = (x+y) \cdot f'(xy) \cdot y + f(xy)$$

$$p = y(x+y) f'(xy) + f(xy) \quad \text{--- (1) } * x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = (x+y) \cdot f'(xy) \cdot x + f(xy)$$

$$q = x(x+y) f'(xy) + f(xy) \quad \text{--- (2) } * y$$

بمناسبة $y \rightarrow (2)$ و $x \rightarrow (1)$

$$xp = xy(x+y) f'(xy) + x f(xy)$$

$$+ yq = xy(x+y) f'(xy) + y f(xy)$$

بالطرح

$$xp - yq = x f(xy) - y f(xy)$$

$$xp - yq = (x-y) \cdot f(xy) \quad \text{--- (4)}$$

فمن المعادلة السابقة نجد ان

$$f(xy) = \frac{z}{(x+y)}$$

بالتعويض في المعادلة (4) ينتج

$$xp - yq = \frac{z}{x+y} (x-y)$$

م. ن. م.

$$z = (x+y)u(x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P = (x+y) \cdot u'(x^2-y^2) \cdot 2x + u(x^2-y^2)$$

$$P = 2x(x+y) \cdot u'(x^2-y^2) + u(x^2-y^2) \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q = (x+y) \cdot u'(x^2-y^2) \cdot (-2y) + u(x^2-y^2)$$

$$Q = -2y(x+y) \cdot u'(x^2-y^2) + u(x^2-y^2) \quad \text{--- ②}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ y والثانية بـ x على

$$yP = 2xy(x+y) \cdot u'(x^2-y^2) + yu(x^2-y^2)$$

$$xQ = -2xy(x+y) \cdot u'(x^2-y^2) + xu(x^2-y^2)$$

نجمع

$$yP + xQ = u(x^2-y^2) [x+y] \quad \text{--- ④}$$

من المعادلة الأولى على

$$u(x^2-y^2) = \frac{z}{x+y}$$

بالقوس في المعادلة ④ على

$$yP + xQ = \frac{z}{x+y} \cdot [x+y]$$

$$yP + xQ = z$$

ف. ن. ع. : z

حل المعادلة التفاضلية الجزئية الكلية من الرتبة الأولى
طريقة لاگرانج :-

تستخدم هذه الطريقة إذا كانت المصفوفة العامة للمعادلة التفاضلية
الجزئية والتي تحتوي على متغيرات مستقلة x و y ومتغير
معتمد z وتكون المصفوفة بالشكل التالي :-

$$P(x, y, z)P + Q(x, y, z)Q = R$$

أيما كانت P و Q و R دوال تحتوي على المتغيرات x, y, z
حيث في هذه الطريقة المصطلح $U(u, v)$ الذي يكون
ببره المصفوفة :-
المصفوفة العامة للطريقة لاگرانج

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

حل المعادلة التفاضلية الجزئية الانتي.

$$XP + yQ = z^2$$

$$P = x, \quad Q = y, \quad R = z^2$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} = 0$$

$$\ln x - \ln y = \ln c \Rightarrow \ln \frac{x}{y} = \ln c$$

$$u = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow \int \frac{2}{y} dy = \int \frac{dz}{z}$$

$$2 \ln y - \ln z = \ln b$$

$$\ln \frac{y^2}{z} = \ln b$$

$$b = \frac{y^2}{z}$$

$$U(u, v) = 0$$

$$U\left(\frac{x}{y}, \frac{y^2}{z}\right) = 0$$

طريقة القسمة الجزئية

$$\text{Ex: } yzP + xzQ + 2xy = 0$$

$$yzP + xzQ = -2xy$$

$$P = yz, Q = xz, R = -2xy$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-2xy}$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{-2xy}$$

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} \quad * xy$$

$$\int x dx = \int y dy$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + a$$

$$a = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

$$\frac{dy}{xz} = \frac{-dz}{2xy} \quad * 2yz$$

$$\int 2yz dy = \int -z dz$$

$$y^2 = -\frac{z^2}{2} + b$$

$$b = y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

$$U(u,v) = 0 \Rightarrow U\left[\frac{1}{2}(x^2 - y^2), y^2 + \frac{1}{2}z^2\right] = 0$$

حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

Ex: $x^2 p + y^2 q = xy$

$$P = x^2, Q = y^2, R = xy$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xy}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y^2}$$

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + a \Rightarrow a = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

$$a = \frac{x-y}{xy}$$

$$a xy = x - y$$

$$a xy - x = -y \Rightarrow x(ay - 1) = -y$$

$$x = \frac{-y}{ay-1}$$

حل المسألة باستخدام طريقة التفاضل الجزئي

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{x}$$

نقوم بتكامل الطرفين

$$\frac{dy}{y} = -\frac{(ay-1)}{x} dz$$

$$dy = -(1-ay) dz$$

$$\int \frac{1}{(1-ay)} dy = \int dz$$

$$-\frac{1}{a} \ln(1-ay) = z + b$$

$$b = -\frac{1}{a} \ln(1-ay) - z$$

$$U(u, v) = 0$$

او ممكن نفرض $u = \frac{x-y}{xy}$ و $v = -\frac{1}{a} \ln(1-ay) - z$

$$U\left[\frac{x-y}{xy}, -\frac{1}{a} \ln(1-ay) - z\right] = 0$$

$$U\left[\frac{x-y}{xy}, -\frac{xy}{x-y} \ln\left(1 - \frac{(x-y)}{xy}\right) - z\right] = 0$$

$$EX: \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 = 2y$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$p = x, \quad q = -y, \quad r = 2y$$

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dp}{2y}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = \int_0$$

$$\ln x + \ln y = \ln a \Rightarrow a = xy$$

$$\frac{dy}{-y} = \frac{dp}{2y}$$

$$\int -2dy = \int dp$$

$$-2y = p + b$$

$$b = -(p + 2y)$$

$$U(u, v) = 0$$

$$U[xy, -(p + 2y)]$$

$$\text{let } F(xy) = p + 2y \Rightarrow z = g_1(xy) - 2xy + g_2(y)$$

$$p = F(xy) - 2y$$

حالة التفاضل

$$1) y^2 z p - x^2 z q = x^2 y$$

$$p = y^2 z, \quad q = -x^2 z, \quad R = x^2 y$$

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{y^2 z} = \frac{dy}{-x^2 z} = \frac{dz}{x^2 y}$$

$$\frac{dx}{y^2 z} = \frac{dy}{-x^2 z}$$

$$x^2 dx = -y^2 dy$$

$$\frac{x^3}{3} = -\frac{y^3}{3} + a \Rightarrow a = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$$

$$\frac{-dy}{x^2 z} = \frac{dz}{x^2 y} \Rightarrow \frac{-dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

$$-y dy = z dz$$

$$-\frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}(y^2 + z^2)$$

$$U(u, v) = 0$$

$$U\left[\frac{2}{3}(x^3 + y^3), -\frac{1}{2}(y^2 + z^2)\right] = 0$$

$$2) (x^2 - y^2 - z^2)P + 2xyQ = 2xz$$

$$P = x^2 - y^2 - z^2, Q = 2xy, R = 2xz$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz - dydz}{x^3 - xy^2 + 2xy^2 - xz^2 + 2xz^2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dz}{z} = 0$$

$$\ln y - \ln z = \ln a$$

$$\Rightarrow a = \frac{y}{z}$$

نفسه معاكه بـ 1 احيى $\left(\frac{z}{2}, \frac{y}{z}, \frac{x}{y}\right)$ وى

$$\frac{dz}{R}$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 - y^2 - z^2) + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x^3 - xy^2 - xz^2 + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x^3 + xy^2 + xz^2} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{2z}$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} \ln z + \ln b$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2} \ln z = \ln b$$

$$b = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}$$

$$u(u, v) = 0$$

$$u\left[\frac{y}{z}, \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}\right] = 0$$

$$3) yP - xQ + (x^2 - y^2) = 0$$

$$P = y, Q = -x, R = -(x^2 - y^2)$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{-(x^2 - y^2)}$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

$$\int x dx = \int -y dy$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + a \Rightarrow a = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

نضرب dx بـ y ، dy بـ x ، dz بـ -1 ^{من أجل}

$$\frac{y dx + x dy}{y \cdot y - x \cdot x} = \frac{dz}{-(x^2 - y^2)}$$

$$\frac{y dx + x dy}{y^2 - x^2} = \frac{dz}{y^2 - x^2}$$

$$\frac{dx + dy}{y - x} = \frac{dz}{-(x^2 - y^2)}$$

$$\frac{dx + dy}{x - y} = \frac{dz}{-(x - y)(x + y)}$$

$$\begin{aligned} y dx + x dy &= dz \\ \downarrow f(xy) \text{ عبارة عن } \\ d(xy) &= dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x+y)(dx+dy) &= \int dz \\ \frac{(x+y)^2}{2} &= z + b \end{aligned}$$

$$b = \frac{(x+y)^2}{2} - z$$

$$xy = z + b \Rightarrow b = xy - z$$

$$U(u, v) = 0 \Rightarrow U\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2), xy - z\right] = 0$$

١) $x s - y t = 2x$ عند z لا يتغير z فبالإمكان أن dz يتغير dx و dy

$$P = x, Q = -y, R = 2x$$

$$s = \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$t = \frac{\partial z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{r}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{2x}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$$

$$\ln x + \ln y = \ln a \Rightarrow a = xy$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{2x} \rightarrow x = \frac{1}{2} z + b$$

$$b = x - \frac{1}{2} z$$

$$u(u, v) = 0 \Rightarrow u(xy, x - \frac{1}{2} z) = 0$$

$$5) (y-z)P + (x-y)Q = z-x \quad \checkmark$$

$$P = y-z, Q = x-y, R = z-x$$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

$$\frac{dx}{y-z} + \frac{dy}{x-y} + \frac{dz}{z-x} = 0$$

$$y-z + x-y + z-x$$

$$dx + dy + dz = 0 \quad \text{عندما المتكامل يساوي صفر}$$

$$x + y + z = a \quad \text{لازم ثابت}$$

$$\frac{z dy + y dz}{z(x-y) + y(z-x)} = \frac{dx}{y-z}$$

$$\frac{z dy + y dz}{zx - zy + yz - yx} = \frac{dx}{y-z}$$

$$\frac{zdy + ydz}{zx - yx} = \frac{dx}{y-z}$$

$$\frac{zdy + ydz}{-x(y-z)} = \frac{dx}{y-z}$$

$$zdy + ydz = -x dx$$

$$d(zy) = d\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

$$zy = \frac{-x^2}{2} + b \Rightarrow b = zy + \frac{1}{2}x^2$$

$$U(u, v) = 0$$

$$U(x+y+z, zy + \frac{1}{2}x^2) = 0$$

المعادلات التفاضلية الجزئية الغير الكلاسيكية من الرتبة الأولى
هي تلك المعادلات التي تكون فيها إحدى المشتقات الجزئية على
الأقل بدرجة أعلى من الدرجة الأولى حيث أن x ولي متغيرين
متحليين و z متغير معتمد و p و q مشتقات جزئية غير متطبيعين
بدرجة أعلى من الدرجة الأولى

طريقة جارييت لإيجاد الحل التام للمعادلات التفاضلية الجزئية غير
الكلاسيكية

تستخدم هذه الطريقة إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية غير متطبيع
بالشكل الآتي

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1)$$

الصفة العامة للطريقة جارييت

$$\frac{dp}{Fx + pFz} = \frac{dq}{Fy + qFz} = \frac{dz}{-(pFp + qFq)} = \frac{dx}{Fp} = \frac{dy}{Fq} \quad (2)$$

في مساحة جارية ذي ابعاد وحدة فقط ثم نفرض في المعادلة التالية

$$dz = p dx + q dy \quad (3)$$

$$\text{Ex: } x^2 p^2 + y^2 q^2 = 1$$

$$F = x^2 p^2 + y^2 q^2 - 1 = 0$$

$$F_x = 2xp^2, \quad F_y = 2yq^2, \quad F_z = 0$$

$$F_p = 2px^2, \quad F_q = 2qy^2$$

$$\frac{dp}{(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{(F_y + qF_z)} = \frac{dz}{-(pF_p + qF_q)} = \frac{dx}{-F_p} = \frac{dy}{-F_q}$$

$$\frac{dp}{2xp^2} = \frac{dq}{2yq^2} = \frac{dz}{-(2p^2x^2 + 2q^2y^2)} = \frac{dx}{-2px^2} = \frac{dy}{-2qy^2}$$

من الممكن انبدأ بـ dx و dq و dz

$$\frac{dp}{2xp^2} = \frac{dx}{-2px^2}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{-x}$$

$$\ln p + \ln x = \ln a \Rightarrow \ln px = \ln a$$

$$p = \frac{a}{x}$$

نفرض على قيمة p في المعادلة الأصلية

$$x^2 p^2 + y^2 q^2 = 1$$

$$x^2 \cdot \frac{a^2}{x^2} + y^2 q^2 - 1 = 0$$

$$a^2 + y^2 q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 - a^2}{y^2}$$

$$q = \frac{1}{y} \sqrt{1 - a^2}$$

CA

$$dz = p dx + q dy$$

$$\int dz = \int \frac{a}{x} dx + \int \frac{1}{y} \sqrt{1-a^2} dy$$

$$z = a \ln x + \sqrt{1-a^2} \ln y + b \quad \text{✓/55/11}$$

$$\text{Ex: } 2py^2 - q^2 z = 0$$

$$F = 2py^2 - q^2 z = 0$$

$$F_x = 0, \quad F_y = 4py, \quad F_z = -q^2$$

$$F_p = 2y^2, \quad F_q = -2qz$$

$$\frac{dp}{(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{(F_y + qF_z)} = \frac{dz}{-(pF_p + qF_q)} = \frac{dx}{-F_p} = \frac{dy}{-F_q}$$

$$\frac{dp}{-pq^2} = \frac{dq}{4py - q^3} = \frac{dz}{-(2y^2p - 2q^2z)} = \frac{dx}{-2y^2} = \frac{dy}{2qz}$$

$$\frac{dp}{-pq^2} = \frac{dz}{-2y^2p + 2q^2z}$$

$$\frac{dp}{-pq^2} = \frac{dz}{-(2y^2p - q^2z - q^2z)}$$

المعادلة صليبة

$$\frac{dp}{-pq^2} = \frac{dz}{q^2 z}$$

$$\frac{dP}{-P} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{dP}{-P} - \frac{dz}{z} = 0$$

$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dz}{z} = \int 0$$

$$\ln P + \ln z = \ln a$$

$$\ln Pz = \ln a$$

$$P = \frac{a}{z}$$

بالعوض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$2Py^2 - q^2 z = 0$$

$$2 \frac{a}{z} y^2 - q^2 z = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{2a}{z} \frac{y^2}{z}$$

$$q = \sqrt{2a} \frac{y}{z}$$

$$q = \sqrt{2a} \cdot \frac{y}{z}$$

$$dz = P dx + q dy$$

$$dz = \frac{a}{z} dx + \sqrt{2a} \frac{y}{z} dy \quad * z$$

$$z dz = a dx + \sqrt{2a} y dy$$

$$\frac{1}{2} z^2 = ax + \sqrt{2a} \cdot \frac{y^2}{2} + b$$

$$1) 2P^2 - 2P + 2Q = 0$$

تہا رستے 4

$$F = 2p^2 - y^2 p + y^2 q = 0$$

$$f_x = 0, f_y = -2yP + 2yQ, f_z = P^2$$

$$F_p = 2\rho z - y^2, \quad F_z = y^2$$

$$\frac{dP}{(F_x + P F_z)} = \frac{dQ}{(F_y + Q F_z)} = \frac{dZ}{-(P F_P + Q F_Q)} = \frac{dx}{-F_P} = \frac{dy}{-F_Q}$$

$$\frac{dP}{P^3} = \frac{dQ}{-2YP + 2YQ + QP^2} = \frac{dZ}{-(2P^2Z - Y^2P + QY^2)} = \frac{dx}{y^2 - 2PZ}$$

$$\frac{dp}{p^3} = \frac{dz}{-(2p^2z - y^2p + 2y^2)}$$

$$\frac{dp}{p^3} = \frac{dz}{-(p^2 z + p^2 z - y^2 p + 2y^2)}$$

$$\frac{dP}{P^3} = \frac{dz}{-P^2 z}$$

$$\int \frac{dp}{p} + \int \frac{dz}{z} = \ln 0$$

$$\ln p + \ln z = \ln a$$

$$\ln p z = \ln a$$

$$p^2 = a \Rightarrow p = \frac{a}{2}$$

نقوم بكتابة P في المعادلة الأصلية نحصل على

$$z^2 p^2 - y^2 p + y^2 q = 0$$

$$z \cdot \frac{a^2}{z^2} - y^2 \cdot \frac{a}{z} + y^2 q = 0$$

$$\frac{a^2}{z} - y^2 \cdot \frac{a}{z} + y^2 q = 0$$

$$\frac{a}{z} (a - y^2) + y^2 q = 0$$

$$y^2 q = -\frac{a}{z} (a - y^2)$$

$$q = -\frac{a}{z} \left(\frac{a}{y^2} - 1 \right)$$

$$dz = p dx + q dy$$

$$dz = \frac{a}{z} dx - \frac{a}{z} \left(\frac{a}{y^2} - 1 \right) dy$$

$$\int z dz = \int \frac{a}{z} dx - \int \frac{a^2}{y^2} dy + \int a dy$$

$$\frac{z^2}{2} = ax + \frac{a^2}{y} + ay + b \quad \text{الكل ثابت}$$

المعادلة

حالة خاصة

في الحالة خاصة يكون المعامل a أو b أو c صفر
حالة أخرى لا يجوز التكامل بغيرها

$$2) p^2 = 4xy$$

$$f = p^2 - 4xy = 0$$

$$F_x = -4y, \quad F_y = -4x, \quad F_z = 0$$

$$F_p = 2p, \quad F_q = p$$

$$\frac{dp}{F_x + pF_z} = \frac{dq}{F_y + qF_z} = \frac{dz}{-(pF_p + qF_q)} = \frac{dx}{-F_p} = \frac{dy}{-F_q}$$

$$\frac{dp}{-4y} = \frac{dq}{-4x} = \frac{dz}{-(p^2 + p^2)} = \frac{dx}{-p} = \frac{dy}{-p}$$

$$\frac{dp}{4y} = \frac{dy}{-p}$$

$$\int p dp = \int 4y dy$$

$$\frac{p^2}{2} = 2y^2 + a \Rightarrow p^2 = 4y^2 + 2a$$

$$p = \sqrt{4y^2 + 2a}$$

بالقوس في المعادلة الأصلية نجد على

$$\sqrt{4y^2 + 2a} \cdot q = 4xy$$

$$q = \frac{4xy}{\sqrt{4y^2 + 2a}}$$

$$dz = p dx + q dy$$

$$dz = \sqrt{4y^2 + 2a} dx + \frac{4xy}{\sqrt{4y^2 + 2a}} dy$$

$$\int dZ = \int d(\sqrt{4y^2 + 2a} \cdot x)$$

$$Z = \sqrt{4y^2 + 2a} \cdot x + b$$

الحل الثاني

$$3) Px + y = Pq$$

$$F = Px + y - Pq$$

$$F_x = P, F_y = 1, F_z = 0, F_P = x - q$$

$$F_q = y - P$$

$$\frac{dP}{F_x + PF_z} = \frac{dq}{F_y + qF_z} = \frac{dZ}{-(PF_P + qF_q)} = \frac{dX}{-F_P} = \frac{dy}{-F_q}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dq}{q} = \frac{dZ}{-(XP - Pq + yq - Pq)} = \frac{dX}{-(x - q)} = \frac{dy}{-(y - P)}$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{dq}{q}$$

$$\ln P = \ln q + \ln a$$

$$\ln P = \ln qa$$

$$P = aq \quad \text{--- ⑥}$$

بالقوس في المعادلة الأصلية نجد

$$aqx + y = aq^2 \quad \text{--- ⑦}$$

$$ax + y = aq$$

$$q = \frac{ax + y}{a}$$

بالقوة في ① des على

$$P = aq \Rightarrow P = \frac{a}{2}(ax+y)$$

$$P = ax+y$$

$$dz = p dx + q dy$$

$$dz = (ax+y) dx + \frac{(ax+y)}{a} dy$$

$$a dz = a(ax+y) dx + (ax+y) dy$$

$$a dz = (ax+y)(a dx + dy)$$

$$az = \frac{(ax+y)^2}{2} + b \quad \text{في كل مكان}$$

$$4) \quad q^2 - 2q + 3p - 1 = 0$$

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0$$

$$F_p = 3, \quad F_q = 2q - 2$$

$$\frac{dp}{F_x + pF_z} = \frac{dq}{F_y + qF_z} = \frac{dz}{-(pF_p + qF_q)} = \frac{dx}{-F_p} = \frac{dy}{-F_q}$$

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = \frac{dz}{-(3p + 2q^2 - 2q)} = \frac{dx}{-3} = \frac{dy}{-(2q - 2)}$$

$$dp = 0$$

$$\int dq = \int 0$$

$$q = a$$

$$a^2 - 2a + 3p - 1 = 0$$

$$3p = 1 - a^2 + 2a$$

$$p = \frac{1 - a^2 + 2a}{3}$$

$$dz = p dx + q dy$$

$$dz = \left(\frac{1 - a^2 + 2a}{3} \right) dx + a dy$$

$$z = \left(\frac{1 - a^2 + 2a}{3} \right) x + ay + b \quad p(x, y)$$

إذا كانت المعادلة التفاضلية ذات متغير مستقل واحد خاضعة للنظر
في هذه المعادلة تسهل مشتقات تفاضلية اعتيادية والمعادلة تسهل
معادلة تفاضلية اعتيادية

أما إذا كانت المعادلة على أكثر من متغير مستقل واحد فالتشتقات
التي تظهر في المعادلة تسهل مشتقات جزئية والمعادلة تسهل
معادلة تفاضلية جزئية

المعادلة التفاضلية الجزئية Partial differential equations

تكونان z دالة لمتغيرين مستقلين x, y

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

رتبة الدالة (رتبة) : هي رتبة أعلى مشتق جزئية تظهر
في المعادلة بعد تحويل الاسماء إلى دالة

أمثلة: حد رتبة (رتبة) الدالة

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} = 9x \quad \text{رتبة 1 دالة}$$

$$xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 9 \quad \text{رتبة 2 دالة}$$

$$11 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^3 = xy$$

$$11 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = (xy)^4$$

رتبة أول دالة

منشأ المعادلات التفاضلية الجزئية

1) حذف التوابيع الأرضية:

لنفرض ان z هي دالة بالنسبة لـ x و y ومعرفه بالشكل

$$g(x, y, z, a, b) = 0 \quad (1)$$

حيث a و b توابيع أرضية

نشتق جزئياً بالنسبة لـ x :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

ونشتق جزئياً بالنسبة لـ y ينتج:

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} + q \cdot \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

من (1) و (2) و (3) يمكن حذف التوابيع الأرضية

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad \text{و دالة على}$$

أقلية: حذف التوابيع الأرضية من الكمال العام:

$$1) z = ax + by + ab \quad (*)$$

نشتق (*) بالنسبة لـ x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a \Rightarrow p = a \Rightarrow a = p \quad (1)$$

نشتق (*) بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = b \Rightarrow q = b \Rightarrow b = q \quad (2)$$

بتعويض (1) و (2) في (*) ينتج:

$$z = px + qy + pq \quad \text{جواب}$$

$$2) x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2 \quad (*)$$

نشتق (*) بالنسبة لـ x :

$$2x + 2(z-c) \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2x + 2(z-c)p = 0 \quad (1)$$

نشتق (*) بالنسبة لـ y :

$$2y + 2(z-c)q = 0 \quad (2)$$

من (1) نجد p :

$$2(z-c) = -2x \quad (3)$$

من (2) نجد q :

$$2(z-c) = -\frac{2y}{q} \quad (4)$$

$$\frac{-2x}{p} = \frac{-2y}{q}$$

من (3) و (4) نجد x :

$$xq - yp = 0$$

$$3) z = ax + by + cxy \quad (*)$$

نشتق (*) بالنسبة لـ x :

$$p = a + cy \quad (1)$$

نشتق (*) بالنسبة لـ y :

$$q = b + cx \quad (2)$$

نشتق (1) بالنسبة لـ x :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow r = 0 \quad (3)$$

نشتق (2) بالنسبة لـ y :

$$t = 0 \quad (4)$$

نشتق (4) بالنسبة لـ y :

$$s = c \quad (5)$$

بتعويض (5) في (1) و (2) ينتج :

$$P = a + Sy \Rightarrow a = P - Sy \quad (6)$$

$$Q = b + Sx \Rightarrow b = Q - Sx \quad (7)$$

بتعويض (5) و (6) و (7) في (8) ينتج

$$Z = (P - Sy)x + (Q - Sx)y + Sxy$$

$$\Rightarrow Z = Px - Syx + Qy - Sxy + Sxy$$

$$Z = Px - Syx + Qy$$

إذا كانت عدد التوابيع الأرضية يزيد على عدد المتغيرات المستقلة في المعادلة فإن المعادلة التفاضلية تكون من رتبة أقل من رتبة الحدود

٢ حذف الحدود الأرضية

بما أن الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية تتضمن دوال اختيارية فإنها يمكن أن تكون الحلول على (ع. د. ج.) وذلك جازاً حيث هذه الدوال كما في الأمثلة التالية

مثال : جد الحل (ع. د. ج.)

$$Z = \phi(x+y) \quad (*)$$

نتحقق (*) بالنسبة لـ x :

$$P = \phi'(x+y) \quad (1)$$

نتحقق (*) بالنسبة لـ y :

$$Q = \phi'(x+y) \quad (2)$$

$$P = Q$$

من (1) و (2) نلاحظ :

$$\therefore P - Q = 0$$

$$z = f(3x - 4y) \quad (*)$$

نسبة $\otimes$ جالبي x

$$P = f'(3x - 4y) \cdot 3 \quad (1)$$

$$Q = f'(3x - 4y) \cdot -4 \quad (2)$$

$$f'(3x - 4y) = \frac{P}{3} \quad (3) \quad \text{من (1)}$$

نسبة $\otimes$ جالبي y

$$f'(3x - 4y) = -\frac{Q}{4} \quad (4)$$

من (3) و (4)

$$\frac{P}{3} = -\frac{Q}{4} \Rightarrow 4P + 3Q = 0$$

$$\text{Ex: } \phi(x^2 + y^2, y^2 - z^2) = 0$$

$$\text{أو } x^2 + y^2 = \phi(y^2 - z^2)$$

$$\text{let } u = x^2 + y^2, v = y^2 - z^2$$

$$\phi(u, v) = 0 \quad (1)$$

نسبة $\otimes$ جالبي x

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow (2x) \frac{\partial \phi}{\partial u} + (-2z) \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0 \quad (2)$$

نسبة $\otimes$ جالبي y

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$(2y) \frac{\partial \phi}{\partial u} + (2y - 2z) \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{array}{cc|c} 2x & -2z & P \\ 2y & 2y-2z & 9 \end{array} = 0$$

$$2x(2y-2z) + 2y(2z) = 0$$

$$4xy - 4xz + 4yz = 0$$

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الدرجة الأولى:

الدرجة العامة لهذا النوع من المعادلات والتي تحتوي على متغيرين مستقلين x و y ومتغيرين تابعين z و P و Q و R هي:

$$Pp + Qq = R$$

بحال المعادلة من هذا النوع إذا كان هناك متغير مستقل في المعادلة الأولى في P أو Q على عكس المعادلات التفاضلية الاعتيادية لا يوجد حيد نغز في z على P و Q المتغير المعتمد z .

حسبنا:

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b$$

حينئذٍ مستحيلت المعادلات التفاضلية الاعتيادية:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} = \lambda \quad (*)$$

$$\Phi(u, v) = 0 \quad \text{هو حل المعادلة} \quad (1)$$

مثال: حل (ع. ٢. ٢. ٢) التالي:

$$xP + yQ = 2z$$

$$P = x, \quad Q = y, \quad R = 2z$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln|a|$$

$$\ln|x| - \ln|y| = \ln|a|$$

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| = \ln|a|$$

$$\frac{x}{y} = a$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln|z| + \ln|b|$$

$$\ln\left|\frac{y}{\sqrt{z}}\right| = \ln|b|$$

$$\frac{y}{\sqrt{z}} = b$$

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{\sqrt{z}}\right) = 0$$

أو $\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{\sqrt{z}}\right) = 0$

$$I P + m Q + n R = 0$$

أي K أو

$$I dx + m dy + n dz = 0$$

أي

أي I, m, n أو I, m, n أو I, m, n

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{I_1 dx + m_1 dy + n_1 dz}{I_1 P + m_1 Q + n_1 R}$$

$$= \frac{I_2 dx + m_2 dy + n_2 dz}{I_2 P + m_2 Q + n_2 R}$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(y+z)P + (x+z)Q = x+y$$

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$$

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)} = \frac{dx-dz}{z-x} = \frac{dy-dz}{z-y} = \frac{dx-dy}{y-x}$$

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)} = \frac{dx-dz}{z-x}$$

$$\frac{1}{2} \ln|x+y+z| = \frac{dx-dz}{-(x-z)}$$

$$\frac{1}{2} \ln|x+y+z| = -\ln|x-z| + \ln|a|$$

$$(x+y+z)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-z) = a$$

$$\int \frac{dx-dz}{-(x-z)} = \int \frac{dy-dz}{-(y-z)}$$

$$\ln|x-z| = \ln|y-z| + \ln|b|$$

$$\Rightarrow \frac{x-z}{y-z} = b$$

$$\emptyset \left((\sqrt{x+y+z}) \cdot (x-z), \frac{x-z}{y-z} \right)$$

المعادلة التفاضلية

المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من الرتبة الأولى

رتبة أولى ودرجة أولى

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2x$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3 = y$$

رتبة أولى ودرجة ثالثة

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = y^6$$

:- المعادلة غير خطية

هي تلك المعادلات التي تكون فيها إحدى المشتقات الجزئية كالأولى بدرجة أعلى من الدرجة الأولى.

الهدف العام لهذا النوع من المعادلات هو

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1)$$

حيث x, y, z متغيرات مستقلة و p, q متغيرين يعتمدان على x, y, z و p, q مشتقات من الرتبة الأولى و F دالة من الأولى.

التكامل التام والتكامل المنفرد

التكامل التام للمعادلة (1) هو دالة علاقة تحتوي على ثابتين

اختياريين ويكون حل للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة

الأولى وتظهر بالصيغة (2) $g(x, y, z, p, q) = 0$

حيث g دالة اختيارية

يشكل الحل التام هندسياً مجموعة من السطوح التابعة لوسيطتين

وقد يكون لهذه المجموعة خلاف أو قد لا يكون، إذا اردنا

أن نفرض هذا الخلاف (في حالة وجوده) نذف g من المعادلة

$$(2) \quad \frac{\partial g}{\partial p} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial g}{\partial q} = 0 \quad \text{وبعد حل هذه المعادلات}$$

$$\text{نحصل على العلاقة} \quad (3) \quad g(x, y, z) = 0$$

إذا حققنا المعادلة (3) المعادلة الأصلية (1) خارج سبيل جاك

المنفرد والتكامل المنفرد للمعادلة (1) كذلك يمكن الحصول

على الحل المنفرد للمعادلة (1) نذف p, q من المعادلة (1)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

لنرى حل المعادلات التفاضلية الجزئية الغير الخطية من الرتبة الأولى:

① إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية جاليف:

$$F(p, q) = 0 \quad (*)$$

فإن الحل العام للمعادلة (*) هو:

$$z = ax + h(a)y + c$$

حيث أن $h(a)$ هي دالة في a ، $a = p$ ، c ثابتة اعتباطية وليست المعادلة (*) حل منفرد لعدم استيعاب حذف a

هذا الحل العام للمعادلة (*) التالي:

$$p^2 - q^2 = 1$$

$$p = a \quad \text{نضع } a$$

$$q = h(a) \quad \text{بالقوة في المعادلة الأصلية}$$

$$a^2 - [h(a)]^2 = 1$$

$$\therefore [h(a)]^2 = a^2 - 1$$

$$h(a) = \sqrt{a^2 - 1}$$

$$z = ax + h(a)y + c$$

$$z = ax + \sqrt{a^2 - 1} y + c$$

الحل العام

$$p^2 + p = q^2$$

هذا الحل العام للمعادلة (*) التالي:

$$p = a$$

$$q = h(a)$$

نقوم في المعادلة الأصلية بدع

$$a^2 + a = [h(a)]^2$$

$$\therefore h(a) = \sqrt{a^2 + a}$$

$$z = ax + h(a)y + c$$

$$z = ax + \sqrt{a^2 + a} y + c$$

الحل العام

لنرى حل المعادلة (*) منفرد لعدم قدرنا حذف a ، c

$$Pq = P + q$$

جد الكمية الناتجة (2)

$$a \cdot h(a) = a + h(a)$$

$$a \cdot h(a) - h(a) = a$$

$$h(a) [a - 1] = a$$

$$h(a) = \frac{a}{a-1}$$

$$Z = ax + h(a)y + c$$

$$Z = ax + \frac{a}{a-1}y + c$$

الكمية الناتجة

الحالة الثانية

(2) إذا كانت المعادلة بالصيغة:

$$Z = Px + qy + F(P, q) \quad (**)$$

حيث الكمية الناتجة المعادلة (*)

$$Z = ax + by + F(a, b)$$

حيث $P = a$ و $q = b$

* ولذا النوع من المعادلات قد يوجد حل منفرد

تسمى المعادلة (*) بالمعادلة كليوت الموسعة

جد الكمية الناتجة والمنفرد (2) (3) التالي

$$Z = Px + qy + Pq \quad (1)$$

$$P = a$$

$$q = b$$

نقطة

نقوم بالمعادلة الإحصائية على

$$Z = ax + by + ab \quad (2)$$

$$\text{let } F(x, y, z, a, b) = 0$$

$$F = z - ax - by - ab = 0 \quad (3)$$

بالمشتقات المعادلة (3) بالمتغيرات a, b تلك التكاليف

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \Rightarrow -x - b = 0$$

$$\Rightarrow b = -x$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 0 \Rightarrow -y - a = 0$$

$$\Rightarrow a = -y$$

ليقويف a و b في الكالتا (المعادلة ②) كالتا

$$Z = -xy - \cancel{xy} + xy$$

$$Z = -xy \quad \text{④}$$

$$p = -y, \quad q = -x$$

نجمع نتيجتي بالنتيجة ② و ③

$$Z = px + qy + pq$$

ونعوينها في المعادلة الأصلية

$$Z = -xy - xy + xy$$

والاصل هنا على خطا بصفة فان

$$Z = -xy$$

المعادلة (أ) أصل مفرد واذا لم نحل

$$-xy = -xy$$

على متطابقة خلا هو مجرد متغير

∴ المعادلة ④ $Z = -xy$ هو حل متفرد للمعادلة ①

الكالة الثالثة ∴

$$F(Z, p, q) = 0 \quad \text{⑤}$$

إذا كانت المعادلة بالصيغة

$$Z = F(x + ay)$$

نغير في

$$= F(u)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

ثم نتحقق بالنتيجة ①

$$= \frac{dF}{du} \cdot 1 = \frac{dZ}{du} \quad \text{①}$$

ثم نتحقق بالنتيجة ②

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{dF}{du} \cdot a = a \cdot \frac{dZ}{du}$$

ثم يعطينا كالتا p و q في المعادلة ⑤ ينتج

$$F(Z, p, q) = 0$$

$$F\left(Z, \frac{dZ}{du}, a \frac{dZ}{du}\right) = 0$$

ثم نجد Z و u كالتا

الكالتا

المعادلة (*) حل منفرد

$$z = p^2 + q^2 \quad \text{①} \quad \text{جدا كل السطح والمنفرد (د. ج. ت. 2.)}$$

$$z = f(x+ay) \quad \text{تفويضات}$$

$$= f(u)$$

$$z = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 + \left(a \frac{dz}{du}\right)^2$$

$$z = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 + a^2 \left(\frac{dz}{du}\right)^2$$

$$z = \left(\frac{dz}{du}\right)^2 (1+a^2)$$

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{z}{1+a^2}$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{du}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$2 z^{\frac{1}{2}} = \frac{u}{\sqrt{1+a^2}} + C_1 \quad \times \sqrt{1+a^2}$$

$$2\sqrt{1+a^2} z^{\frac{1}{2}} = u + C$$

$$C = \sqrt{1+a^2} C_1 \quad \text{مع ان}$$

$$\therefore 4(1+a^2) z = (u+C)^2$$

ثم نعوّض في قيمة $u = x+ay$ لـ z

$$4(1+a^2) z = (x+ay+C)^2 \quad \text{②}$$

المعادلة ② مع كل خاص المعادلة الأولى ①

لايجاد الحل المنفرد للمعادلة ③

$$F = 4(1+x^2)z - (x+ay+c)^2 = 0$$

نخضع ان $4z+4x^2z$ مشتق كجالية $4x^2z$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \Rightarrow 8xz - 2(x+ay+c)y = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0 \Rightarrow -2(x+ay+c) = 0 \quad (4)$$

نخضع المعادلة ④ بـ y - ثم حلها انياً مع المعادلة ③ فنحصل على
الحل المنفرد ⑤ $z=0 \Rightarrow 8xz=0$

الحالة الرابعة

إذا كانت المعادلة بالشكل التالي ⑥ $F_1(x, p) = F_2(y, q)$
هذا النوع من المعادلات غير متماثل في x و y و p و q
والطرف الأيمن يحتوي على y و q وكل هذا النوع من المعادلات
نخضع الرتب

$$F_1(x, p) = F_2(y, q) = a \quad (1)$$

حيث a ثابت
وبما ان $z = z(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow dz = p dx + q dy \quad (2)$$

من المعادلة ① نكتب a على ما يلي

$$p = f_1(x, a) \quad (3)$$

$$q = f_2(y, a) \quad (4)$$

بتعويض ③ و ④ في ② ننتج

$$dz = f_1(x, a) dx + f_2(y, a) dy \quad (5)$$

وبأخذ التكامل للمعادلة ⑤

$$z = \int f_1(x, a) dx + \int f_2(y, a) dy + b \quad (6)$$

فإنه إذا كان المعادله (6) حل للمعادله (5)
 وليس المعادله (5) حل للمعادله (6)

حل (2.2) المثال 2:

$$p^2 y (1+x^2) = q \cdot x^2 \quad (*) \quad \therefore y \cdot x^2$$

$$\frac{p^2 (1+x^2)}{x^2} = \frac{q}{y} = a$$

$$\frac{p^2 (1+x^2)}{x^2} = a \Rightarrow p^2 = \frac{a x^2}{(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{a} x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1)$$

$$\frac{q}{y} = a \Rightarrow q = a y \quad (2)$$

وبما ان

$$dz = p dx + q dy \quad (3)$$

بتعويض (1) و (2) في (3) نحصل على

$$dz = \frac{\sqrt{a} x}{\sqrt{1+x^2}} dx + a y dy$$

$$dz = \sqrt{a} x (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx + a y dy$$

$$z = \frac{\sqrt{a}}{\frac{1}{2}} \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{1} + \frac{a y^2}{2} + b$$

$$z = \sqrt{a} (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a y^2}{2} + b$$

الكل مع

ليس المعادله حل للمعادله

حل (2.2) التالي

$$pq = 4xy \quad (*) \quad (1.1x)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{x} = \frac{4y}{y} = 4$$

$$\frac{p}{x} = 4 \Rightarrow p = 4x \quad (1)$$

$$\frac{4y}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{4y}{4} \quad (2)$$

$$dz = p dx + q dy \quad \text{بما أن}$$

$$dz = 4x dx + 4y dy$$

$$z = \frac{4x^2}{2} + \frac{4y^2}{2} + b$$

الحل التالي

وليس المعادلة مستقلة

لأنها (مستقلة) حذف التوابيع a, b

معادلات تفاضلية جزئية من رتبة m ثانية وعادة رتبة الأولى

الصيغة العامة (٢.٠) الكلاسيكية من الرتبة m :
 في متغيرين مستقلين x و y ومفرد يعتمد على x و y

$$L(D_x, D_y)z = F(x, y) \quad (1)$$

$$L(D_x, D_y) = A_0 D_x^m + A_1 D_x^{m-1} D_y + A_2 D_x^{m-2} D_y^2 + \dots + A_m D_y^m$$

حيث أن $A_0, A_1, \dots, A_m$ دوال أو ثوابت

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$D_x^j = \frac{\partial^j}{\partial x^j}, \quad D_y^k = \frac{\partial^k}{\partial y^k}$$

$$D_x^j D_y^k = \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}$$

وإذا كانت $A_0, A_1, \dots, A_m$ دوال بالمتغير x ولا تعتمد على y

إذا كانت $A_0, A_1, \dots, A_m$ ثوابت فإن المعادلة (1) تسمى معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة m ذات معاملات ثابتة.

إذا كان الطرف الأيمن للمعادلة (1) مساوياً للصفر فإن المعادلة تسمى

$$L(D_x, D_y)z = 0 \quad (2)$$

خانة المعادلة (2) تسمى (ع. د. 2. 2) من الرتبة m وعيانية
 احادها كانت $\neq 0$ $\nabla(x, y)$ في المعادلة (1) تسمى (ع. د. 2. 2)
 من الرتبة m وغير متجانسة

كل دالة في $\mathbb{R}^2$ تحقق المعادلة (1) وتؤول الى صفرية فيما
 لو عرفت بدلالة x تسمى بالحل الخاص للمعادلة (1)
 ويعبر بها بلوغ (z_p) والدالة التي تحقق المعادلة (2)
 تسمى بالحل المتجانس ويعبر بها بالرقم (z_c)
 ومن المبرهن ان كل دالة في المعادلة (1) تستتبع حاد جميع الـ
 المتجانس والخاص $z_p + z_c$ هو حل عام للمعادلة (1)

z_p حل عام لـ

$$L(D_x, D_y) z = f(x, y)$$

$$L(D_x, D_y) z_p = f(x, y)$$

z_c حل متجانس للمعادلة

$$L(D_x, D_y) z_c = 0$$

$z_p + z_c$ هو حل للمعادلة (1)

$$L(D_x, D_y) z = f(x, y)$$

$$L(D_x, D_y) (z_p + z_c) =$$

$$L(D_x, D_y) z_p + L(D_x, D_y) z_c = f(x, y) + 0 = f(x, y)$$

حيث:

إذا كانت $z_1, z_2, \dots, z_m$ حلولاً للمعادلة المتجانسة

$$L(D_x, D_y)z = 0 \quad (*)$$

وإن $c_1, c_2, \dots, c_m$ هي ثوابت حرة

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_m z_m \quad (*)$$

حله المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة.

المؤثر العام $L(D_x, D_y)$ متجانس وذات معاملات ثابتة

$$L(D_x, D_y)z = 0 \quad \text{--- } \textcircled{B}$$

حيث

هو متعدد الحدود من الدرجة m وذو معاملات ثابتة

ثلاثي رتبة

تتقسم المعادلات من هذا النوع من حيث مرتبتها إلى قسمين

(أ) معادلات من الدرجة الأولى

في هذه الحالة يمكن تحليل الطرف اليساري للمعادلة $\textcircled{B}$ إلى حاصل ضرب m من العوامل الخطية أي يمكن كتابتهاالمعادلة $\textcircled{B}$ بالشكل التالي

$$L(D_x, D_y)z = (a_1 D_x - b_1 D_y - c_1)(a_2 D_x - b_2 D_y - c_2) \dots (a_m D_x - b_m D_y - c_m)z$$

$$= \left[\prod_{i=1}^m (a_i D_x - b_i D_y - c_i) \right] z$$

حيث إن a_i, b_i, c_i هي ثوابتو $m = 1, 2, 3, \dots$ والحل العام للمعادلة $\textcircled{B}$ يكتب بالشكل التالي

$$Z = e^{\frac{c_1}{a_1}x} f_1(a_1y + b_1x) + e^{\frac{c_2}{a_2}x} f_2(a_2y + b_2x) + \dots + e^{\frac{c_m}{a_m}x} f_m(a_my + b_mx)$$

$$Z = e^{\frac{-c_1}{b_1}y} f_1(a_1y + b_1x) + e^{\frac{-c_2}{b_2}y} f_2(a_2y + b_2x) + \dots + e^{\frac{-c_m}{b_m}y} f_m(a_my + b_mx) \quad \therefore \text{ق. 9}$$

إذا كانت $a_i = 0$ فنكتب a_i بدلا من b_i
وإذا كانت $a_i b_i = 0$ فلا يوجد حل في هذه الطريقة

مثال: حل (ع. 5. 2) التالي

$$(2D_x + D_y + 1)(D_x - 3D_y + 2)Z = 0$$

بالمقارنة مع الصيغة العامة

$$a_1 = 2, \quad b_1 = -1, \quad c_1 = -1$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 3, \quad c_2 = -2$$

$$Z = e^{\frac{c_1}{a_1}x} f_1(a_1y + b_1x) + e^{\frac{c_2}{a_2}x} f_2(a_2y + b_2x)$$

$$Z = e^{\frac{-1}{2}x} f_1(2y - x) + e^{-2x} f_2(y + 3x) \quad \text{الحل العام}$$

مثال: حل (ع. 5. 3) التالي

$$(3D_x^2 - 13D_x D_y + 4D_y^2)Z = 0$$

$$(3D_x - D_y)(D_x - 4D_y) = 0$$

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 4, \quad c_2 = 0$$

$$Z = e^{\frac{c_1}{a_1}x} f_1(a_1y + b_1x) + e^{\frac{c_2}{a_2}x} f_2(a_2y + b_2x)$$

$$z = e^0 F_1(3y+x) + e^0 \cdot F_2(y+4x)$$

$$z = F_1(3y+x) + F_2(y+4x)$$

حالات خاصة القابلة للتكامل

$$1) D_x^2 z = 0$$

$$(D_x)(D_x) z = 0$$

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0$$

$$a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = 0$$

$$a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = 0, c_1 = c_2 = 0$$

$$\therefore z = F_1(y) + x F_2(y)$$

$$2) (D_x^2 D_y^2 + 2 D_x D_y^3) z = 0$$

$$D_x D_y^2 (D_x + 2 D_y) z = 0$$

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0$$

$$a_2 = a_3 = 0, b_2 = b_3 = -1, c_2 = c_3 = 0$$

$$a_4 = 1, b_4 = -2, c_4 = 0$$

$$z = F_1(y) + F_2(-x) + y F_3(-x) + F_4(y-2x)$$

الكل اني لا سيادى صفر حيث x و y ثابت

$$3) (2D_x^2 + 7D_x D_y + 5D_y^2) z = 0$$

$$(2D_1 + 5D_2)(D_1 + D_2)z = 0$$

$$a_1 = 2, b_1 = -5, c_1 = 0$$

$$a_2 = 1, b_2 = -1, c_2 = 0$$

$$z = f_1(2y - 5x) + f_2(y - x)$$

$$4) (4D_x^4 + 4D_x^3 D_y + D_x^2 D_y^2) z = 0$$

$$D_x^2 (4D_x^2 + 4D_x D_y + D_y^2) z = 0$$

$$D_x^2 (2D_x + D_y)(2D_x + D_y) z = 0$$

$$D_x^2 (2D_x + D_y)^2 z = 0$$

$$a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$$

$$a_3 = a_4 = 2, b_3 = b_4 = -1, c_3 = c_4 = 0$$

$$z = f_1(y) + x f_2(y) + f_3(2y - x) + x f_4(2y - x)$$

$$5) (2D_x^3 + D_x^2 D_y - 12D_x^2 - 6D_x D_y + 18D_x + 9D_y)z = 0$$

$$D_x^2 (2D_x + D_y) - 6D_x(2D_x + D_y) + 9(2D_x + D_y)z = 0$$

$$(2D_x + D_y)(D_x^2 - 6D_x + 9)z = 0$$

$$(2D_x + D_y)(D_x - 3)^2 z = 0$$

$$a_1 = 2, b_1 = -1, c_1 = 0$$

$$a_2 = a_3 = 1, b_2 = b_3 = 0, c_2 = c_3 = 3$$

$$z = F_1(2y - x) + e^{3x} F_2(y) + x e^{3x} F_3(y)$$

∴ الحل

إذا كان أحد العوامل الكسري في المعادلة (١) من الشكل

$$L(D_x, D_y)z = (a_k D_x + b_k D_y + c_k)^k (a_{k+1} D_x + b_{k+1} D_y + c_{k+1})^{k+1} \dots$$

$$(a_m D_x + b_m D_y + c_m)z = 0$$

فإن الحل العام للمعادلة (١) يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$z = e^{\frac{c_k x}{a_k}} [F_1(a_k y + b_k x) + x F_2(a_k y + b_k x) + \dots + x^{k-1} F_k(a_k y + b_k x)] + e^{\frac{c_{k+1} x}{a_{k+1}}} F_{k+1}(a_{k+1} y + b_{k+1} x) + \dots + e^{\frac{c_m x}{a_m}} F_m(a_m y + b_m x), \quad a \neq 0$$

∴ الجواب

$$z = e^{-\frac{c_k y}{a_k}} [F_1(a_k y + b_k x) + y F_2(a_k y + b_k x) + \dots + y^{k-1} F_k(a_k y + b_k x) + e^{-\frac{c_{k+1} y}{a_{k+1}}} F_{k+1}(a_{k+1} y + b_{k+1} x) + \dots + e^{-\frac{c_m y}{a_m}} F_m(a_m y + b_m x)]$$

(٢) معادلات غير خطية للتحليل :-

اي معادلات لا يمكن كتابتها بدلالة خواصها الذاتية ، فهي من هذا النوع

نختار الحل للمعادلة $L(D_x, D_y) Z = 0$ — (1)

هو (2) $Z = e^{ax+by}$

بتعويض (2) في (1) على

$L(D_x, D_y) e^{ax+by} = 0$

$\Rightarrow L(a, b) e^{ax+by} = 0$ الكمية الأسية (تسمى) غير ابدأ

$\Rightarrow L(a, b) = 0$ — (3)

والمعادلة (3) تسمى بالمعادلة المميزة للمعادلة (1) وبالتالي يمكن

كتابة حل المعادلة (1) بالشكل التالي (4) $Z = \sum_{r=1}^n C_r e^{a_r x + b_r y}$

(- 4D²x + 4D²x D²y + D²y)

Ex:- (2D²x + D²y) Z = 0 — *

$L(a, b) = 0$

$2a^2 + b = 0 \Rightarrow b = -2a^2$

∴ حل المعادلة (4) هو

$Z = \sum_{r=1}^n C_r e^{a_r x + b_r y}$

$= \sum_{r=1}^n C_r e^{a_r x - 2a_r^2 y}$

$= C_1 e^{a_1 x - a_1^2 y} + C_2 e^{a_2 x - a_2^2 y} + \dots + C_n e^{a_n x - a_n^2 y}$

$$(\Delta_x^2 + \Delta_x + \Delta_y) Z = 0 \quad (*)$$

$$L(a, b) = 0$$

$$a^2 + a + b = 0 \Rightarrow b = -(a^2 + a)$$

$$Z = \sum_{r=1}^n C_r e^{a_r x - (a_r^2 + a_r) y}$$

$$Z = C_1 e^{a_1 x - (a_1^2 + a_1) y} + C_2 e^{a_2 x - (a_2^2 + a_2) y} + \dots + C_n e^{a_n x - (a_n^2 + a_n) y}$$

الحل: - عندئذ المعادلة (*) قابلة للتحليل جزئياً أي يمكن كتابتها بالشكل التالي
 $h(D_x, D_y) g(D_x, D_y) Z = 0$ حيث $h(D_x, D_y)$ قابلة للتحليل (بما أنها كما في الحالة الأولى كانت قابلة للتحليل جزئياً) $g(D_x, D_y)$ غير قابلة للتحليل جزئياً في الحالة الثانية
 وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة (*) عبارة عن حاصل ضرب
 الحل للجزئين h و g

$$(\Delta_x^3 + \Delta_y^2 \Delta_x) Z = 0$$

$$\Delta_x^2 (\Delta_x + \Delta_y^2) Z = 0$$

$$(\Delta_x)^2 (\Delta_x + \Delta_y^2) Z = 0$$

$$a_1 = a_2 = 1, \quad b_1 = b_2 = 0, \quad C_1 = C_2 = 0$$

$$L(a, b) = 0$$

$$a + b^2 = 0 \Rightarrow a = -b^2$$

$$Z = f_1(y) + x f_2(y) + \sum_{r=1}^n C_r e^{-b_r^2 x + b_r y}$$

الحل النهائي = القاطعة التالية

$$(\Delta_x + 2\Delta_y) (\Delta_x - 2\Delta_y + 1) (\Delta_x - \Delta_y^2) Z = 0 \quad (*)$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -2, \quad C_1 = 0$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 2, \quad C_2 = -1$$

$$L(a, b) = 0$$

$$a - b^2 = 0 \Rightarrow a = b^2$$

$$Z = F_1(y - 2x) + e^{-x} F_2(y + 2x) + \sum_{r=1}^n C_r e^{b_r^2 x + b_r y}$$

$$Z = F_1(y - 2x) + e^{-x} F_2(y + 2x) + C_1 e^{b_1^2 x + b_1 y} + C_2 e^{b_2^2 x + b_2 y} + \dots + C_m e^{b_m^2 x + b_m y}$$

$$e^{i\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta}$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$P - k = 0$$

$$\Delta_x^2 Z - \Delta_y^2 Z = 0$$

$$(\Delta_x - \Delta_y^2) Z = 0$$

$$L(a, b) = 0$$

$$a - b^2 = 0 \Rightarrow a = b^2$$

$$Z = \sum_{r=1}^n C_r e^{b_r^2 x + b_r y}$$

$$(\Delta_x^2 + \Delta_y^4) Z = 0$$

١) إيجاد الحل الخاص لـ (٢.٠) غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة.

المصفوفة المربعة $L(D_x, D_y)z = f(x, y)$ $\textcircled{1}$ يتكون الحل العام للمعادلة $\textcircled{1}$ من جزئين $\textcircled{2}$ الحل العام للمعادلة المتجانسة مضافاً إليه الحل الخاص للمعادلة $\textcircled{1}$ يعتمد إيجاد الحل الخاص على شكل الدالة $f(x, y)$ والتي تكون في الحالات الآتية:

١) إذا كانت $f(x, y)$ متعددة الحدود في x و y نكتب بالشكل $L(D_x, D_y)$ قوى x و y في D_x, D_y إلى الحدود

حيث من الحدود وبعد ذلك نؤثر بها على الدالة $f(x, y)$

مثال: حل الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(D_x^2 - D_y)z = 2y - x^2$$

$$Z_p = \frac{1}{L(D_x, D_y)} \cdot f(x, y)$$

$$= \frac{1}{D_x^2 - D_y} (2y - x^2)$$

$$= \frac{1}{D_x^2 (1 - \frac{D_y}{D_x^2})} (2y - x^2)$$

$$\Rightarrow Z_p = \frac{1}{D_x^2} (1 - \frac{D_y}{D_x^2})^{-1} (2y - x^2)$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{D_x^2} [2y - x^2 + \frac{1}{D_x^2} (9)]$$

$$= \frac{1}{D_x^2} [2y - x^2 + x^2]$$

$$Z_p = yx^2$$

$$(2D_x^2 - D_y)Z = 3x - y^2 + 2x^2y$$

$$Z_p = \frac{1}{L(D_x, D_y)} f(x, y)$$

$$= \frac{1}{2D_x^2 - D_y} (3x - y^2 + 2x^2y)$$

$$= \frac{1}{2D_x^2 (1 - \frac{D_y}{2D_x^2})} (3x - y^2 + 2x^2y)$$

$$Z_p = \frac{1}{2D_x^2} (1 - \frac{D_y}{2D_x^2}) (3x - y^2 + 2x^2y)$$

$$= \frac{1}{2D_x^2} (1 + \frac{D_y}{2D_x^2} - \frac{D_y^2}{4D_x^4}) (3x - y^2 + 2x^2y)$$

$$= \frac{1}{2D_x^2} [3x - y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2} yx^2 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{4} x^2y]$$

$$= \frac{1}{2D_x^2} \left[3x - y^2 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^2y^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}y^2x^2 + \frac{1}{8}x^4y + \frac{1}{360}x^6 + \frac{1}{48}x^4y^2 \right]$$

$$F(x, y) = c e^{ax+by} \quad \text{حيث } a, b, c \text{ ثوابت}$$

$$Z_p = \frac{1}{L(D_x, D_y)} \cdot f(x, y)$$

$$= \frac{1}{L(D_x, D_y)} (c e^{ax+by})$$

$$= \frac{1}{L(a, b)} (c e^{ax+by})$$

$$\textcircled{D} \quad L(a, b) \neq 0$$

$$L(a, b) \neq 0$$

$$\text{حيث } a, b \text{ ثوابت}$$

$$(D_x - D_y^2) Z = e^{2x+3y}$$

$$a = 2, \quad b = 3$$

$$L(a, b) = L(2, 3)$$

$$= 2 - (3)^2 = 2 - 9 = -7$$

$$Z_p = \frac{1}{L(a,b)} (C e^{ax+by})$$

$$Z_p = \frac{-1}{7} \cdot e^{2x+3y}$$

المثال (ب) إذا كانت

$$F(x,y) = C e^{ax+by}$$

فإذا كانت $L(a,b) = 0$

$$Z = w e^{ax+by} \quad \text{نفرض}$$

الاستقارة
مطلوب

بتحويل قيمة Z في المعادلة (ب) إلى

$$L(D_x, D_y) Z = C e^{ax+by}$$

$$\Rightarrow L(D_x + a, D_y + b) w e^{ax+by} = C e^{ax+by}$$

$$e^{ax+by} L(D_x + a, D_y + b) w = C e^{ax+by}$$

$$L(D_x + a, D_y + b) w = C$$

$$\therefore w = \frac{C}{L(D_x + a, D_y + b)} \quad (c)$$

وبتحويل قيمة w في المعادلة (ب) على الشكل التالي

$$Z_p$$

مثال: حل المسألة (*) $(D_x^2 - D_y)z = e^{x+y}$

$a=1, b=1, C=1$
 $L(a,b) = L(1,1)$
 $= 1^2 - 1 = 0$

نضع المسألة بالشكل (*)

$z_p = w e^{x+y}$

$w = \frac{1}{L(D_x+1, D_y+1)}$

$= \frac{1}{L(D_x+1, D_y+1)}$

$= \frac{1}{(D_x+1)^2 - (D_y+1)}$

$= \frac{1}{D_x^2 + 2D_x + 1 - D_y - 1}$

$= \frac{1}{D_x^2 + 2D_x - D_y}$

$= \frac{1}{-D_y} \cdot 1 = -y$

$\therefore z_p = -y e^{x+y}$

$$\text{Ex: } (D_x - D_y)z = xy$$

$$Z_p = \frac{1}{D_x - D_y} (xy)$$

$$= \frac{1}{D_x(1 - \frac{D_y}{D_x})} \cdot xy$$

$$= \frac{1}{D_x} (1 - \frac{D_y}{D_x})^{-1} \cdot (xy)$$

$$= \frac{1}{D_x} (1 + \frac{D_y}{D_x}) \cdot (xy)$$

$$= \frac{1}{D_x} (xy + \frac{1}{D_x} \cdot (x))$$

$$= \frac{1}{D_x} (xy + \frac{x^2}{2})$$

$$Z_p = \frac{x^2 y}{2} + \frac{x^3}{6}$$

الحالة الثالثة :-

$$F(x, y) = \cos(ax + by) \quad \text{إذا كانت}$$

$$\text{or} = \sin(ax + by)$$

يمكن إيجاد الحل الخاص بطريقة المعادلات التفاضلية
بأن نفرض

$$Z_p = C_1 \cos(ax + by) + C_2 \sin(ax + by)$$

وحيث C_1 و C_2 ثوابت

Ex:

حل المعادلة

$$(D_x^2 - D_y)Z = \cos(x - 2y) \quad \text{--- (1)}$$

$$a = 1, \quad b = -2$$

نفرض الحل الخاص لـ (1) هو

$$Z_p = C_1 \cos(x - 2y) + C_2 \sin(x - 2y) \quad \text{--- (2)}$$

$$D_x Z_p = -C_1 \sin(x - 2y) + C_2 \cos(x - 2y)$$

$$D_x^2 Z_p = -C_1 \cos(x - 2y) - C_2 \sin(x - 2y) \quad \text{--- (3)}$$

$$D_y Z_p = 2C_1 \sin(x - 2y) - 2C_2 \cos(x - 2y) \quad \text{--- (4)}$$

بتعويض (3) و (4) في المعادلة (1) نحصل على

$$-C_1 \cos(x - 2y) - C_2 \sin(x - 2y) - 2C_1 \sin(x - 2y) + 2C_2 \cos(x - 2y) = \cos(x - 2y)$$

$$(-C_1 + 2C_2) \cos(x - 2y) + (-2C_1 - C_2) \sin(x - 2y) = \cos(x - 2y)$$

$$-C_1 + 2C_2 = 1 \quad \text{--- (5)}$$

$$-2C_1 - C_2 = 0 \quad \text{--- (6)}$$

بفرض (١) و (٢) $-C_1 - 4C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{5}$

بفرض (٣) $\frac{1}{5} + 2C_2 = 1 \Rightarrow 2C_2 = \frac{4}{5}$
 $C_2 = \frac{2}{5}$

بفرض (٤) C_1 و C_2 بالحدود

$$Z_p = -\frac{1}{5} \cos(x-2y) + \frac{2}{5} \sin(x-2y) \text{ بالحدود}$$

$$(2D_x^2 - D_y^2)Z = 8 \sin(x+2y) \quad \text{--- (٥)}$$

بفرض (٥) $a=1, b=2$ $Z_p = C_1 \cos(x+2y) + C_2 \sin(x+2y) \quad \text{--- (٦)}$

$$D_x Z_p = -C_1 \sin(x+2y) + C_2 \cos(x+2y)$$

$$D_x^2 Z_p = -C_1 \cos(x+2y) - C_2 \sin(x+2y) \quad \text{--- (٧)}$$

$$D_y Z_p = -2C_1 \sin(x+2y) + 2C_2 \cos(x+2y) \quad \text{--- (٨)}$$

بفرض (٨) و (٧) بالحدود

$$\begin{aligned} -2C_1 \cos(x+2y) - 2C_2 \sin(x+2y) + 2C_1 \sin(x+2y) \\ - 2C_2 \cos(x+2y) = 8 \sin(x+2y) \end{aligned}$$

$$-2C_1 - 2C_2 = 0 \quad \text{--- (٩)}$$

$$-2C_2 + 2C_1 = 8 \quad \text{--- (١٠)}$$

$$-4C_2 = 8 \Rightarrow C_2 = -2$$

$$-2C_1 + 4 = 0 \quad \text{بفرض (٩)}$$

$$\Rightarrow 2C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 2$$

الاحتمال ان يكون $L(-a^2, -ab, -b^2) \neq 0$

$$L(-a^2, -ab, -b^2) \neq 0$$

بتعويض $a=2, b=-1$ في (1) نحصل على

$$Z_p = 2 \cos(x+2y) - 2 \sin(x+2y) \quad \text{الحل (3) هو}$$

ملاحظة:

$$L(D_x, D_y) Z = L(D_x^2, D_x D_y, D_y^2) Z \quad \text{اذا كانت}$$

$$= \cos(ax+by)$$

$$\text{or} = \sin(ax+by)$$

في الحل (3) هو

$$Z_p = \frac{1}{L(-a^2, -ab, -b^2)} \cos(ax+by) \quad \text{or} \sin(ax+by)$$

بشرط ان

$$L(-a^2, -ab, -b^2) \neq 0$$

$$D_x^2 - 3D_x D_y + 2D_y^2) Z = \sin(x-2y) \quad \text{الحل (3) هو}$$

$$a=1, b=-2$$

$$L(-a^2, -ab, -b^2) = L(-1, 2, -4)$$

$$= -1 - 3(2) + 2(-4)$$

$$= -1 - 6 - 8 = -15$$

$$\therefore Z_p = \frac{1}{L(-a^2, -ab, -b^2)} \sin(ax+by)$$

$$= \frac{-1}{15} \sin(x-2y)$$

$$(D_x^2 + D_y)(D_x - D_y - D_y^2)z = \sin(2x+y)$$

m

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$D_x^2 = -a^2 = -4, D_y^2 = -b^2 = -1, D_x D_y = -ab = -2$$

$$z_p = \frac{\sin(2x+y)}{(-4 + D_y)(D_x - D_y + 1)}$$

$$= \frac{\sin(2x+y)}{(-4D_x + 4D_y - 4 + D_y D_x - D_y^2 + D_y)}$$

$$= \frac{\sin(2x+y)}{(-4D_x + 5D_y - 4 - 2 + 1)}$$

$$= \frac{\sin(2x+y)}{(5D_y - 4D_x) - 5}$$

$$= \frac{5D_y - 4D_x + 5}{(5D_y - 4D_x)^2 - 25} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{5D_y - 4D_x + 5}{25D_y^2 - 40D_x D_y + 16D_x^2 - 25} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{5D_y - 4D_x + 5}{-25 + 80 - 64 - 25} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{5D_y - 4D_x + 5}{-34} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{-1}{34} (5 \cos(2x+y) - 8 \cos(2x+y) + 5 \sin(2x+y))$$

$$= \frac{-1}{34} (5 \sin(2x+y) - 3 \cos(2x+y))$$

المعادلات التفاضلية الجزئية للمعادلة لمعادلة أويلر

المعادلة العامة لهذا النوع من المعادلات هي:

$$L(xD_x, yD_y)z = \sum_{r,s} C_{rs} x^r y^s D_x^r D_y^s$$

$$= f(x, y)$$

حيث r, s رتبة x, y

C_{rs} constant

لدينا دالة عامة لهذه المعادلات تسمى

$$x = e^u, \quad y = e^v$$

$$\Rightarrow u = \ln x, \quad v = \ln y$$

وبذلك تتحول المعادلة الكمية معادلة ذات معاملات ثابتة بجوار

لذلك ويمكن حلها بالطرق السابقة

$$D_x z = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \quad (* x)$$

$$x D_x z = D_u z \quad \text{--- ①}$$

$$D_x^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

V_y

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} \quad (*x^2)$$

$$x^2 D_x^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u} = D_u^2 z - D_u z$$

$$= (D_u^2 - D_u) z$$

$$= D_u (D_u - 1) z$$

$$x^r D_x^r z = D_u (D_u - 1) (D_u - 2) \dots (D_u - (r-1)) z$$

Einfach anfang

$$y D_y z = D_v z$$

$$y^2 D_y^2 z = D_v (D_v - 1) z$$

$$y^s D_y^s z = D_v (D_v - 1) (D_v - 2) \dots (D_v - (s-1)) z$$

$$D_x D_y z = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right]$$

$$= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial u} \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial v} \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial v} z$$

$$= \frac{1}{xy} D_u D_v z \quad (*xy)$$

$$xy D_x D_y z = D_u D_v z$$

$$x^r y^s D_x^r D_y^s z = D_u (D_u - 1) (D_u - 2) \dots (D_u - (r-1)) D_v (D_v - 1) (D_v - 2) \dots (D_v - (s-1)) z$$

حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$(x^2 \Delta_x^2 - y^2 \Delta_y^2 + x \Delta_x - y \Delta_y) z = 0 \quad (*)$$

نفرض أن

$$x = e^u, \quad y = e^v$$

$$u = \ln x, \quad v = \ln y$$

تصبح المعادلة (*) بالشكل التالي

$$(D_u(D_u - 1) - D_v(D_v - 1) + D_u - D_v) z = 0$$

$$(D_u^2 - D_u - D_v^2 + D_v + D_u - D_v) z = 0$$

$$(D_u^2 - D_v^2) z = 0$$

$$(D_u - D_v)(D_u + D_v) z = 0$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = -1, \quad c_2 = 0$$

$$\therefore z = f_1(v + u) + f_2(v - u)$$

$$z = f_1(\ln y + \ln x) + f_2(\ln y - \ln x)$$

$$z = f_1(\ln yx) + f_2\left(\ln \frac{y}{x}\right)$$

$$(x^2 D_x^2 - 3xy D_x D_y + 2y^2 D_y^2 + x D_x + 2y D_y) z = 6xy^2$$

$$x = e^u, \quad y = e^v$$

$$u = \ln x, \quad v = \ln y$$

$$(D_u(D_u - 1) - 3D_u D_v + 2D_v(D_v - 1) + D_u + 2D_v) z = 6e^{u+2v}$$

$$(D_u^2 - D_u - 3D_u D_v + 2D_v^2 - 2D_v + D_u + 2D_v) z = 6e^{u+2v}$$

$$(D_u^2 - 3D_u D_v + 2D_v^2) z = 0$$

$$(D_u - 2D_v)(D_u - D_v) z = 0$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = 0$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 0$$

$$z_c = F_1(v + 2u) + F_2(v + u)$$

$$= F_1(\ln y + 2\ln x) + F_2(\ln y + \ln x)$$

$$= F_1(\ln y x^2) + F_2(\ln y x)$$

$$a = 1, \quad b = 2$$

$$L(a, b) = L(1, 2) = 1 - 6 + 2(2^2)$$

$$= 1 - 6 + 8$$

$$= 3 \neq 0$$

$$\therefore z_p = \frac{1}{3} \cdot 6 e^{u+2v} = 2 e^{u+2v} = 2xy^2$$

$$z = z_c + z_p$$

$$z = F_1(\ln y x^2) + F_2(\ln y x) + 2xy^2$$

المطلوب (2. = 3) 10

$$1) (2x^2 D_x^2 - 5xy D_x D_y + 2y^2 D_y^2 + 2x D_x + 2y D_y) Z = 5xy^3$$

$$x = e^u, \quad y = e^v$$

$$u = \ln x, \quad v = \ln y$$

$$(2D_u(D_u-1) - 5D_u D_v + 2D_v(D_v-1) + 2D_u + 2D_v) Z = 5e^{u+3v}$$

المطلوب (2. = 3) 10

$$(2D_u^2 - 2D_u - 5D_u D_v + 2D_v^2 - 2D_v + 2D_u + 2D_v) Z = 0$$

$$(2D_u^2 - 5D_u D_v + 2D_v^2) Z = 0$$

$$(2D_u - D_v)(D_u - 2D_v) Z = 0$$

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0$$

$$a_2 = 1, \quad b_2 = 2, \quad c_2 = 0$$

$$Z = F_1(2v+u) + F_2(v+2u)$$

$$= F_1(2\ln y + \ln x) + F_2(\ln y + 2\ln x)$$

$$= F_1(\ln y^2 x) + F_2(\ln y x^2)$$

المطلوب (2. = 3) 10

$$a = 1, \quad b = 3$$

$$L(a, b) = L(1, 3) = 2(1) - 5(3) + 2(3^2)$$

$$= 2 - 15 + 18 = 5$$

$$Z_p = \frac{1}{5} e^{u+3v} = e^{u+3v}$$

$$= x y^3$$

$$Z = Z_c + Z_p$$

$$= F_1(\ln y^2 x) + F_2(\ln y x^2) + x y^3$$

$$(x^2 D_x^2 - xy D_x D_y - 2y^2 D_y^2 + x D_x - 2y D_y) Z = 2 \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = e^u \Rightarrow u = \ln x$$

$$y = e^v \Rightarrow v = \ln y$$

$$= 2 \ln\left(\frac{e^v}{e^u}\right) \\ = 2 \ln\left(\frac{e^v}{e^u}\right)$$

$$[D_u(D_u-1) - D_u D_v - 2D_v(D_v-1) + D_u - 2D_v] Z = 2(v-u)$$

$$(D_u^2 - D_u - D_u D_v - 2D_v^2 + 2D_v + D_u - 2D_v) Z = 0$$

$$(D_u^2 - D_u D_v - 2D_v^2) Z = 0$$

$$(D_u + D_v)(D_u - 2D_v) Z = 0$$

$$a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = 0$$

$$a_2 = 1, b_2 = 2, c_2 = 0$$

$$Z_c = F_1(v-u) + F_2(v+2u)$$

$$Z_c = F_1(\ln y - \ln x) + F_2(\ln y + 2 \ln x)$$

$$= F_1\left(\ln \frac{y}{x}\right) + F_2(\ln y x^2)$$

نصف (3) و (3) و (3) و (3)

$$Z_p = \frac{1}{2(D_u D_v)} F(u, v)$$

$$Z_p = \frac{1}{(D_u + D_v) \cdot (D_u - 2D_v)} \cdot 2(V-u)$$

$$= \frac{1}{D_u(D_u - 2D_v)} \cdot \left(1 + \frac{D_v}{D_u}\right)^{-1} \cdot (2V - 2u)$$

$$= \frac{1}{D_u(D_u - 2D_v)} \cdot \left(1 - \frac{D_v}{D_u}\right) \cdot (2V - 2u)$$

$$= \frac{1}{D_u^2(1 - 2\frac{D_v}{D_u})} \cdot (2V - 2u - 2u)$$

$$= \frac{1}{D_u^2} \left(1 - 2\frac{D_v}{D_u}\right)^{-1} \cdot (2V - 4u)$$

$$= \frac{1}{D_u^2} \left(1 + \frac{2D_v}{D_u}\right) \cdot (2V - 4u)$$

$$= \frac{1}{D_u^2} (2V - 4u + 4u)$$

$$= \frac{1}{D_u^2} \cdot 2V = \frac{V u^2}{\ln y \cdot (\ln x)^2}$$

$$Z = Z_c + Z_p$$

$$Z = F_1\left(\ln \frac{y}{x}\right) + F_2(\ln y x^2) + \ln y \cdot (\ln x)^2$$

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات معاملات متغيرة
معادلات تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية ذات
معادلات متغيرة.

المهمة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية
ذات المعادلات المتغيرة وبمتغيرات x و y و z متغيرة مستقلة

$$Ax + By + Cz + D + E + Fz = f(x, y)$$

حيث أن

$$A, B, C, D, E, F, f$$

حوال في x و y و z وبشكل أن A, B, C ليسوا
مختلطين آنس واحد.

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

الحالة الأولى:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_1(x, y)$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_2(x, y) \quad \text{أو}$$

أو

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_3(x, y)$$

حل (2.9) التالي

$$r = 2x + y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2x + y$$

$$D_x^2 z = 2x + y$$

نكامل بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + yx + f_1(y)$$

نكامل بالنسبة لـ x

$$z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}yx^2 + x f_1(y) + f_2(y)$$

$$s = x - y$$

حل (2.9) التالي

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x - y$$

نكامل بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy - \frac{y^2}{2} + f_1(x)$$

نكامل بالنسبة لـ x

$$z = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + g_1(x) + g_2(y)$$

$$t = \frac{1}{x} + \ln x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x} + \ln x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x} + y \ln x + f_1(x)$$

نكامل بالنسبة لـ y

$$z = \frac{1}{2} \frac{y^2}{x} + \frac{1}{2} y^2 \ln x + y f_1(x) + f_2(x)$$

نكامل بالنسبة لـ x

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

أو ٨١

$$\frac{dx}{dy} + f(y)x = g(y)$$

الحالة الثانية:

$$Ax + DP = f_1(x, y) \quad \text{إذا كانت المعادلات جالسيك}$$

$$A \frac{\partial P}{\partial x} + DP = f_1(x, y)$$

$$BS + DP = f_2(x, y) \quad \text{أو}$$

$$B \frac{\partial P}{\partial y} + DP = f_2(x, y)$$

$$AS + EQ = f_3(x, y)$$

$$A \frac{\partial Q}{\partial x} + EQ = f_3(x, y)$$

$$CE + EQ = f_4(x, y) \quad \text{أو}$$

$$\Rightarrow C \frac{\partial Q}{\partial y} + EQ = f_4(x, y)$$

وهذه معادلات تفاضلية اعتيادية في المتغير الأول
حيث P أو Q متغير حرة

$$XS + Q = 4e^{2x-y}$$

حالة (٢-١-٢)

$$X \frac{\partial Q}{\partial x} + Q = 4e^{2x-y}$$

بـ X

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{1}{X} Q = \frac{4}{X} e^{2x-y}$$

مُتَعَدِّدٌ

$$\int \cdot F = e^{\int f(x,y) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\int d(x, y) = \int \frac{4}{x} e^{2x-y} \cdot x dx$$

$$x \cdot y = 2 e^{2x-y} + f_1(y)$$

$$y = \frac{2}{x} e^{2x-y} + \frac{1}{x} f_1(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x} e^{2x-y} + \frac{1}{x} f_1(y)$$

فكامل بالنسبة لـ y

$$z = -\frac{2}{x} e^{2x-y} + \frac{1}{x} g_1(y) + g_2(x)$$

اليمين

نحو اليمين

الحالة الثالثة:

إذا كانت المعادلة بالشكل

$$Ax + Dy + Gz = F(x, y) \quad \text{--- ①}$$

$$Cx + Ey + Gz = F(x, y) \quad \text{أو ②}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A \frac{\partial z}{\partial x} + Gz = F$$

$$A \frac{d^2 z}{dx^2} + D \frac{dz}{dx} + Gz = F$$

y ثابت

$$Cx + Ey + Gz = F(x, y) \quad \text{يمكن كتابتها المعادلة بالشكل}$$

$$C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Gz = F(x, y) \quad \text{حيث x ثابت}$$

وهذه معادلات تفاضلية ابتدائية من الرتبة الثانية في الإحداثيات
المستقلة (x ثابت) وفي المعادلة الثانية y مستقلة
(x ثابت)

حل الـ (2.2.2) التالي

$$y - 3y' + 2y^2 z = 2(y-2)e^{2x-y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x^2} - 3y \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^2 z = 2(y-2)e^{2x-y}$$

$$(D_x^2 - 3y D_x + 2y^2) z = 2(y-2)e^{2x-y}$$

أو لا نجد الحل المتجانس

$$(D_x^2 - 3y D_x + 2y^2) z = \dots$$

$$m^2 - 3ym + 2y^2 = 0$$

$$(m - 2y)(m - y) = 0$$

$$m_1 = 2y$$

$$m_2 = y$$

$$z_c = F_1(y) e^{2yx} + F_2(y) e^{yx}$$

$$z_c = c_1 e^{yx} + c_2 e^{2yx}$$

الحل المتجانس

$$z_p = \frac{1}{D_x^2 - 3y D_x + 2y^2} \cdot 2(y-2)e^{2x-y}$$

$$\therefore a = 2$$

$$= \frac{1}{2^2 - 3y(2) + 2y^2} \cdot 2(y-2)e^{2x-y}$$

$$= \frac{1}{4 - 6y + 2y^2} \cdot 2(y-2)e^{2x-y}$$

$$= \frac{1}{2(y^2 - 3y + 2)} \cdot 2(y-2) e^{2x-y}$$

$$= \frac{1}{(y-1)(y-2)} \cdot (y-2) e^{2x-y}$$

$$z_p = \frac{1}{y-1} e^{2x-y}$$

$$z = z_c + z_p$$

$$z = f_1(y) e^{2yx} + f_2(y) e^{yx} + \frac{1}{(y-1)} e^{2x-y}$$

الحالة الرابعة:

إذا كانت المعادلة بالشكل

$$A_x + B_s + D_p = f \quad (*)$$

$$C_t + B_s + E_f = f \quad (**)$$

يمكن كتابة المعادلة (*) بالصيغة الآتية

$$A \frac{\partial p}{\partial x} + B \frac{\partial p}{\partial y} + Dp = f \quad (1)$$

والمعادلة (**) بالصيغة الآتية

$$C \frac{\partial p}{\partial y} + B \frac{\partial p}{\partial x} + E p = f \quad (2)$$

وبكتابة المعادلة (1)

$$A \frac{\partial p}{\partial x} + B \frac{\partial p}{\partial y} = f - Dp \quad (1')$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (2) بالشكل

$$B \frac{\partial L}{\partial X} + C \frac{\partial L}{\partial Y} = F - EL \quad (11)$$

إن المعادلتين (11) و (2) معادلتان تفاضلية جزئية حيث النتيجة الأولى في P وفي عام التقييم و L و X متغيرات مستقلة. $\rightarrow$ طريقة لاكنغ

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$XY - yS + P = y^2$$

$$X \frac{\partial P}{\partial X} - y \frac{\partial P}{\partial y} + P = y^2$$

$$X \frac{\partial P}{\partial X} - y \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 - P$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{dy}{-y} = \frac{dP}{y^2 - P}$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{dy}{-y}$$

$$\ln X = -\ln y + \ln a$$

$$\ln X + \ln y = \ln a$$

$$\ln xy = \ln a$$

$$xy = a$$

$$\frac{dy}{-y} = \frac{dP}{y^2 - P}$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{y^2 - P}{-y}$$

$$\frac{dP}{dy} = -y + \frac{1}{y} P$$

$$\frac{dP}{dy} - \frac{1}{y} P = -y$$

$$I.F = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

$$\int d\left(\frac{1}{y} \cdot P\right) = \int -y dy$$

$$\frac{1}{y} P = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$\frac{1}{y} P + \frac{y}{2} = C \quad \text{--- (1)}$$

$$\phi(0, C) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(xy, \frac{1}{y} P + \frac{y}{2}) = 0$$

$$\frac{1}{y} P + \frac{y}{2} = f(xy)$$

$$P = y f(xy) - \frac{y^2}{2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = y f(xy) - \frac{y^2}{2}$$

$$Z = g_1(xy) - xy^2 + g_2(y)$$

حل المعادلات التفاضلية التالية

$$1) t = x e^y$$

حالة أولى

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x e^y$$

نحل المعادلة بالنسبة لـ y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x e^y + f_1(x)$$

نحل المعادلة بالنسبة لـ y

$$z = x e^y + y f_1(x) + f_2(x)$$

$$2) t + q = x^2 \cos(xy) + x \sin(xy) \quad \text{حالة ثانية}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} + q = x^2 \cos(xy) + x \sin(xy)$$

$$\int \cdot F = \int S dy = e^y \quad \times \text{معبر ثابت}$$

$$\int d(e^y \cdot q) = \int e^y (x^2 \cos(xy) + x \sin(xy)) dy$$

$$\int d(e^y \cdot q) = \int x (x e^y \cos(xy) + e^y \sin(xy)) dy$$

$$e^y \cdot q = x \int d(e^y \sin(xy)) dy$$

$$e^y q = x e^y \sin(xy) + f_1(x)$$

$$q = x \sin(xy) + e^{-y} f_1(x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \sin(xy) + e^{-y} f_1(x)$$

مشتق داخل الزاوية

$$Z = -\cos(Xy) - e^y f_1(X) + f_2(X)$$

$$3) \quad x + 5 = 4xy + 2y^2$$

حالة خاصة

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy + 2y^2$$

دالة

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dP}{4xy + 2y^2}$$

$$dx = dy$$

$$x = y + a \Rightarrow a = x - y$$

$$dy = \frac{dP}{4xy + 2y^2}$$

$$dy = \frac{dP}{4(y+a)y + 2y^2} \Rightarrow dy = \frac{dP}{4y^2 + 4ay + 2y^2}$$

$$(4y^2 + 4ay) dy = dP$$

$$2y^3 + 2ay^2 = P + b$$

$$b = 2y^3 + 2ay^2 - P$$

$$\phi(a, b) = 0$$

$$\phi(x-y, 2y^3 + 2ay^2 - P) = 0$$

$$F(x-y) = 2y^3 + 2ay^2 - P$$

$$P = 2y^3 + 2ay^2 - F(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y^3 + 2ay^2 - F(x-y)$$

$$z = 2xy^3 + 2axy^2 - g_1(x-y) + g_2(y)$$

لحريضة جانيه الحل

$$x + S = 4xy + 2y^2$$

$$(D_x^2 + D_x D_y)z = 0$$

$$D_x (D_x + D_y)z = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1, b_2 = -1, c_2 = 0$$

$$z_c = f_1(y) + f_2(y-x)$$

$$dy = \frac{dP}{4xy + 2y^2} \Rightarrow \frac{dP}{dy} = 4xy + 2y^2$$

$$\frac{dP}{dy} = 4xy + 2y^2$$

$$I \cdot F = e^{-4xy} = e^{-4xy}$$

$$d(e^{-4xy} \cdot P) = \int 2y^2 e^{-4xy}$$

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية والارتفاعات

الصيغة العامة لهذا النوع من المعادلات هي

$$Ax + By + Cz + R(x, y, z, P, Q) = 0 \quad (1)$$

حيث A, B, C دالة مستمرة في x و y
و R هي دالة جالسية لـ x و y و z و P و Q
دالة المشتقة الثانية مستمرة في المستوى xy

نحذف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية الى
درجتين انما هي

$$B^2 - 4AC > 0$$

(١) قطع زائد اذا كانت

$$B^2 - 4AC < 0$$

(٢) قطع خافض اذا كانت

$$B^2 - 4AC = 0$$

(٣) قطع حكا عرض اذا كانت

منوع المعادلات التفاضلية الجزئية التالية

$$1) \quad z_{xx} + z_{xy} - 2z_{yy} = 0 \quad (*)$$

$$x + y - 2z = 0$$

$$A = 1, B = 1, C = -2$$

$$B^2 - 4AC = 1^2 - 4(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

∴ المعادلة (*) هي معادلة قطع زائد.

$$2) \quad z_{xx} + 5z_{yy} - 2z_{xy} = 6 \quad (*)$$

نعيد كتابة المعادلة (*) بالمقارنة

$$A = 1, B = -2, C = 5$$

$$B^2 - 4AC = 4 - 20 = -16 < 0$$

∴ المعادلة (*) هي معادلة قطع ناقص.

$$3) z_{xx} - 4z_{xy} + 4z_{yy} = 2z_y \quad \text{--- ③}$$

$$z_{xx} - 4z_{xy} + 4z_{yy} - 2z_y = 0$$

$$A=1, B=-4, C=4$$

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$$

المعادلة ③ معادلة خطية متجانسة.

$$4) y z_{xx} + z_{yy} = 0 \Rightarrow \text{④}$$

$$A=y, B=0, C=1$$

$$B^2 - 4AC = 0 - 4y = -4y$$

$$\leftarrow -4y < 0 \leftarrow y > 0 \text{ إذا كانت } y > 0$$

$$B^2 - 4AC < 0$$

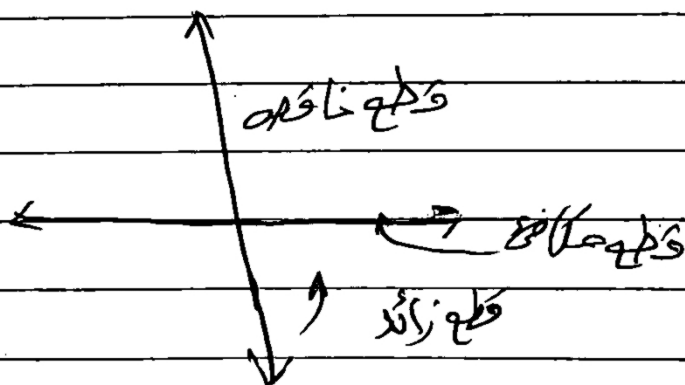
المعادلة ④ معادلة خطية غير متجانسة.

$$B^2 - 4AC > 0 \leftarrow -4y > 0 \leftarrow y < 0 \text{ إذا كانت } y < 0$$

المعادلة ④ معادلة خطية غير متجانسة.

$$B^2 - 4AC = 0 \leftarrow -4y = 0 \leftarrow y = 0 \text{ إذا كانت } y = 0$$

المعادلة ④ معادلة خطية متجانسة.



حلا مخرجه ..

المعادلة ① يمكن ان تأخذ الحالتين اللتين في وسطها تعريف
المعاملات A, B, C معتمدة على قيم x و y في ذلك المنطقة
أما اذا كانت A, B, C ثوابت فالمعادلة ① تأخذ إحدى الحالتين
فقط كجميع قيم x, y في المستوى .

$$\frac{z^2}{2x^2} + x^2 \frac{z^2}{2y^2} = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$A=1, \quad B=0, \quad C=x^2$$

$$B^2 - 4AC = 0 - 4x^2 = -4x^2$$

$$B^2 - 4AC < 0 \Leftrightarrow -4x^2 < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

إذا كانت $x > 0$ فالمعادلة $\otimes$ هي معادلة قطع ناقص

$$B^2 - 4AC < 0 \Leftrightarrow -4x^2 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

إذا كانت $x < 0$ فالمعادلة $\otimes$ هي معادلة قطع ناقص

$$B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow -4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

إذا كانت $x = 0$ فالمعادلة $\otimes$ هي معادلة خط فلكاني

(Fouries series)

سلسلة فورييه

يقال لمجموعة غير ختمية من الدوال الحقيقية $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots$ بأنها متعامدة في الفترة المفتوحة (a, b) إذا تحقق الشرط التالي

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \neq 0 & n = m \end{cases}$$

فمثلاً مجموعة الدوال التالية

$$\sin x, \sin(2x), \sin(3x), \dots$$

$$\cos x, \cos(2x), \cos(3x), \dots$$

تكون متعامدة في أي فترة بطول (2π) وبصورة أعم فإن مجموعة الدوال التالية

$$\sin \frac{\pi}{L} x, \sin \frac{2\pi}{L} x, \sin \frac{3\pi}{L} x, \dots$$

$$\cos \frac{\pi}{L} x, \cos \frac{2\pi}{L} x, \cos \frac{3\pi}{L} x, \dots$$

تكون متعامدة في أي فترة بطول $(2L)$

لنذكر التطبيقات (المطابقات) التالية

$$1) \sin(nx) \sin(mx) = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$$

$$2) \cos(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]$$

$$3) \sin(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} [\sin(n-m)x + \sin(n+m)x]$$

$$4) \sin(n \mp m)x = \sin nx \cos mx \mp \cos nx \sin mx$$

$$5) \cos(n \mp m)x = \cos nx \cos mx \pm \sin nx \sin mx$$

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos(x)$$

والآن نفرض حسابا بغيره كان كذلك

ليكن C عدد حقيقي و n, m عددان صحيحان موجبيان -

$$1) \int_C^{C+2\pi} \sin nx \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_C^{C+2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad n \neq m$$

الفترة $C+2\pi - C = 2\pi$

$$\text{Second way} \Rightarrow \int_C^{C+2\pi} \sin nx \, dx = \left. -\frac{1}{n} \cos nx \right|_C^{C+2\pi}$$

$$= -\frac{1}{n} (\cos n(C+2\pi) - \cos nC)$$

$$= -\frac{1}{n} (\cos nC - \cos nC)$$

$$= 0$$

$$2) \int_C^{C+2\pi} \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_C^{C+2\pi} \cos nx \, dx = \left. \frac{1}{n} \sin nx \right|_C^{C+2\pi}$$

$$= \frac{1}{n} [\sin n(C+2\pi) - \sin nC]$$

$$= \frac{1}{n} (\sin nC - \sin nC)$$

$$= 0$$

$$3) \int_c^{c+2\pi} \sin nx \cos mx = 0 \quad [m \neq n]$$

$$= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} [\sin(n-m)x + \sin(n+m)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \sin(n-m)x dx + \int_c^{c+2\pi} \sin(n+m)x dx$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$4) \int_c^{c+2\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad n \neq m \Rightarrow 16 \text{ 59}$$

$$= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \cos(n-m)x dx - \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \cos(n+m)x dx$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$5) \int_c^{c+2\pi} \sin nx \sin mx = \pi \quad n = m \Rightarrow 16 \text{ 59}$$

$$\int_c^{c+2\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} (1 - \cos 2nx) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right]_c^{c+2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(c+2\pi) - \frac{1}{2n} \sin 2n(c+2\pi) - c + \frac{1}{2n} \sin 2nc \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[2\pi - \frac{1}{2n} \sin 2nc + \frac{1}{2n} \sin 2nc \right]$$

$$= \pi$$

$$5) \int_c^{c+2\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 ; [n \neq m]$$

$$= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \cos(n-m)x dx + \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} \cos(n+m)x dx$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\int_c^{c+2\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad n=m \text{ e/b } \odot$$

$$= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} (1 + \cos 2nx) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin 2nx \right) \Big|_c^{c+2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left((c+2\pi) + \frac{1}{2n} \sin 2n(c+2\pi) - c - \frac{1}{2n} \sin 2nc \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{1}{2n} \sin 2nc - \frac{1}{2n} \sin 2nc \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

$$= \pi$$

الدوال الدورية (Periodic Functions)

تعريف: تكون دالة معرفة على فترة ذات طول 2π تسمى الدالة دورية ذات دورة p إذا تحقق الشرط التالي:

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

وهي المعتاد على الدوال الدورية ذات دورة 2π هي:

$$\sin(x)$$

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\begin{aligned} L.S &= \sin(x) \cos(2\pi) + \cos(x) \sin(2\pi) \\ &= \sin(x) + 0 \\ &= \sin(x) = R.S \end{aligned}$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

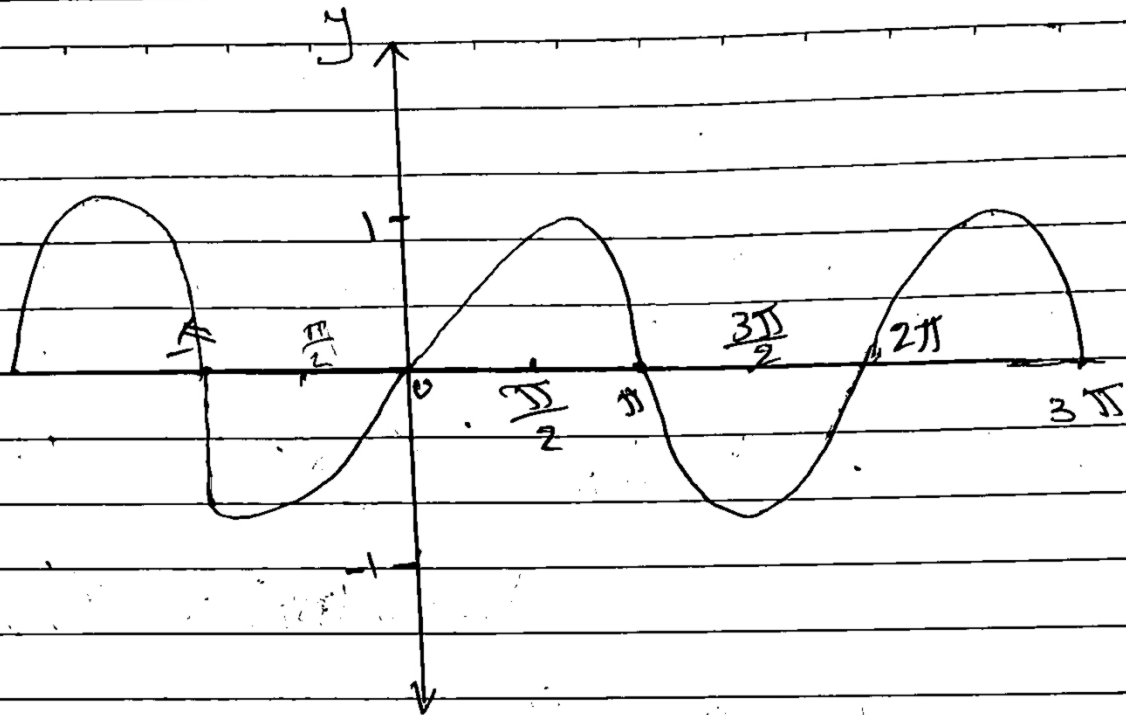
$$\begin{aligned} L.S &= \cos(x) \cos(2\pi) - \sin(x) \sin(2\pi) \\ &= \cos(x) + 0 \\ &= \cos(x) = R.S \end{aligned}$$

والدوال الدورية يمكن أن تكون (p) عدة دورات مثل:

$$f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = \dots = f(x+np)$$

$$\sin(x) = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \dots = \sin(x+2n\pi)$$

91



(Fourier Series)

سلسلة فورييه

إذا كانت f دالة دورية ذات دورة 2π وقابلة للتكامل
على الفترة $[-\pi, \pi]$ فإن f يمكن أن تمثل بدلالة سلسلة فورييه
تسمى سلسلة فورييه f كما يلي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (*)$$

وإن a_0, a_n, b_n تسمى معاملات فورييه

حيث أن:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$x \in [-\pi, \pi]$$

الشعافه خانونه a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

الشعافه: بغيره (المعادلة) $\cos(0x)$
 وبأخذ الكامل فيه $-\pi$ إلى π $\int_{-\pi}^{\pi}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) \cos(0x) + b_n \sin(nx) \cos(0x)] dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} (\pi + \pi)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} (2\pi)$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

إذا كانت f دالة دورية ذات دورة 2π معرفة بالصيغة

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

ما سلسلة فورييه (هذا الدالة) ؟

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - \pi^2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx$$

$$\text{let } u = x \quad dv = \cos(nx) dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left[uv \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} v du$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} x \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} (\pi \sin(n\pi) - (-\pi) \sin(-n\pi)) \right] + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi} (0 - 0) + \frac{1}{n^2\pi} (\cos(n\pi) - \cos(n\pi))$$

$$= \frac{1}{n^2\pi} \cdot 0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx$$

$$\text{let } u = x \quad dv = \sin(nx) dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{\cos(nx)}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[uv \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} v du \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} ((\pi \cos(n\pi) - (-\pi) \cos(-n\pi))) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} (\pi \cos(n\pi) + \pi \cos(n\pi)) + \frac{1}{n^2} (\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-2\pi \cos(n\pi)}{n} \right) + 0$$

$$= \frac{-2\pi (-1)^n}{\pi n} = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx)$$

$$= 2 \sin x - \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{2}{5} \sin 5x - \dots$$

إذا كانت f دالة دورية ذات دورة 2π معروفة بالصيغة

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

جد سلسلة فورييه لهذه الدالة

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx$$

$$= \frac{1}{\pi} x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (\pi - 0) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0$$

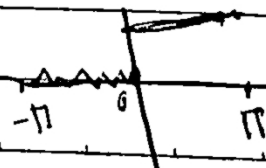
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

$$= \frac{-1}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{-1}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

$$\therefore F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin(nx)$$

الدالة ليست فردية ولا زوجية



دالة العترة (أكثر من عترة) لا يمكن تسمية زوجية أو فردية

الدوال الفردية والزوجية Odd and Even Function

تعريف: يقال للدالة f أنها فردية في العترة المغلقة $[-a, a]$ إذا حققت

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in [-a, a]$$

ويقال أنها زوجية في العترة المغلقة $[-a, a]$ إذا حققت

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in [-a, a]$$

أعطى الدوال $x, x^3, x^5, \dots, x^{2n-1}, n \in \mathbb{Z}^+$

هي فردية

وكذلك

$$\sin x$$

هي دالة فردية

$$f(x) = x^5 \quad \text{على خط}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$L.S = (-x)^5 = -x^5 = -f(x) = R.S$$

$$f(x) = \sin x$$

وكذلك

$$f(-x) = -f(x)$$

$$L.S \Rightarrow \sin(-x) = -\sin x = -f(x) = R.S$$

$\therefore \sin x$ دالة فردية

أحياناً: الدوال $x^2, x^4, \dots, x^{2n}, n \in \mathbb{Z}^+$ وكذلك $\cos x$ دالة زوجية.

$$F(x) = \sin x \cos x$$

$$F(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x = -F(x)$$

حل وملاحظات:

(١) تكامل الدالة فردية على فترة متماثلة يساوي صفر
أي أن:

$$\int_{-a}^a O(x) dx = 0$$

حيث أن $O(x)$ دالة فردية.

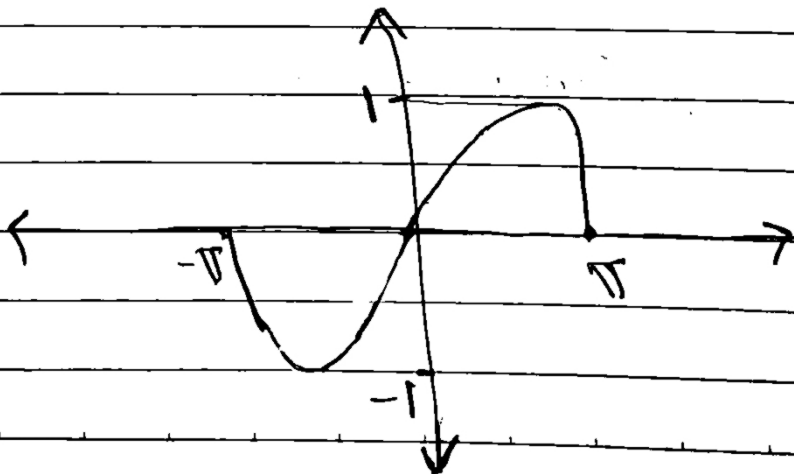
(٢) تكامل الدالة زوجية على فترة متماثلة يساوي
ضعف تكاملها نصف الفترة أي أن:

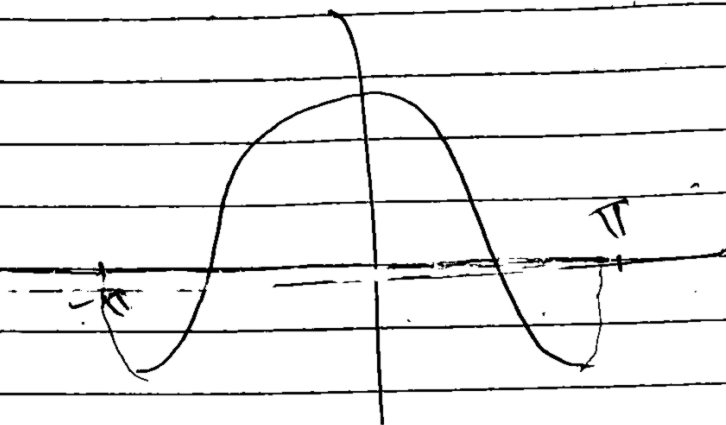
$$\int_{-a}^a E(x) dx = 2 \int_0^a E(x) dx$$

حيث أن $E(x)$ دالة زوجية.

(٣) إذا كانت الدالة f زوجية فإن منحنى الدالة يكون
متماثل حول المحور y وإذا كانت الدالة f فردية فإن
منحنى الدالة يكون متماثل حول نقطة الأصل.

$$F(x) = \sin(x) \quad ; \quad x \in [-\pi, \pi]$$



$\cos x$ 

(٤) كثير من الدوال ليست فردية ولا زوجية ولكن يمكن ان نكتبها
 عنها بشكل مجموع دالة فردية مع دالة زوجية

$$\text{الدالة } e^x \text{ ليست دالة زوجية ولا فردية}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} [F(x) + F(-x)] + \frac{1}{2} [F(x) - F(-x)]$$

$$e^x = \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}] + \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]$$

$$= \cosh x + \sinh x$$

$$F(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

$$\sin(x) + \cos(x) = \frac{1}{2} [\sin x + \cos x + \sin(-x) + \cos(-x)]$$

$$+ \frac{1}{2} [\sin(x) + \cos x - (\sin(-x) + \cos(-x))]$$

$$= \frac{1}{2} [\sin x + \cos x - \sin x + \cos x] + \frac{1}{2} [\sin x + \cos x + \sin x - \cos x]$$

$$= \frac{1}{2} [2 \sin x] + \frac{1}{2} [2 \cos x]$$

$$= \sin x + \cos x$$

زوجية + فردية

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad 1.7$$

ملاحظة: إذا كانت f دالة زوجية ودورية على الفترة $[-\pi, \pi]$ فإن سلسلة فورييه لها تكون

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{وأيضاً}$$

البرهان: f دالة زوجية
تخضع f لخاصية:
والآن نعرف الدالة التالية:

$$\phi(x) = f(x) \sin(nx)$$

$$\begin{aligned} \phi(-x) &= f(-x) \sin n(-x) \\ &= -f(x) \sin(nx) \\ &= -\phi(x) \end{aligned}$$

هل $\phi(x)$ دالة فردية؟

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore b_n = 0$$

والآن نعرف الدالة التالية

$$\psi(x) = f(x) \cos(nx)$$

$$\begin{aligned} \psi(-x) &= f(-x) \cos n(-x) \\ &= f(x) \cos(nx) = \psi(x) \end{aligned}$$

∴ دالة زوجية

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ \therefore a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

حالة خاصة

إذا كانت الدالة $f(x)$ متكافئة في خانة واحدة الدالة الفردية والزوج لا يتحقق (أي وفي هذه الحالة فإن الأفضلية هي للدالة

فورية فقط

المسلسلة فورية الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ \pi & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi dx \right]$$

$$= \int_{\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} + x \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \int_{\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - 0 \right) + (2\pi - \pi)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \cos(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi \cos(nx) dx \right]$$

$$\text{let } u = x, \quad dv = \cos(nx) dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi} \left[\left. \frac{1}{n} x \sin(nx) \right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) dx \right] \\ + \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$a_n = 0 + \frac{1}{n^2 \pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi \sin(nx) dx \right]$$

$$\text{let } u = x, \quad dv = \sin(nx) dx$$

$$du = dx \quad \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$$

1.9

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx \right] + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \pi \sin(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\pi}{n} \cos(n\pi) - 0 \right) + \frac{1}{n^2 \pi} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cos(nx) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\
 &= \frac{-1}{n} (-1)^n + 0 - \frac{1}{n} (\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)) \\
 &= \frac{-1}{n} (-1)^n - \frac{1}{n} (-1)^n + \frac{1}{n} (-1)^n \\
 &= \frac{-1}{n} (-1)^{2n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3}{4} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 \pi} (-1)^n - 1 \right] \cos(nx) - \frac{1}{n} (-1)^{2n} \sin(nx) \\
 &= \frac{3}{4} \pi - \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{1}{\pi} \sin x - \frac{1}{\pi} \sin 2x + \dots
 \end{aligned}$$

الدورة الأرضية ونشر نفوس المدة

Arbitrary period and half-range expansion.

إذا كانت f دالة دورية ذات دورة $(2L)$ على الفترة $[-L, L]$ فإن سلسلة فورييه المتكافئة للدالة f تعطى بالصيغة:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

مع // إذا كانت f دالة دورية ذات دورة $(2L)$ فإن سلسلة فورييه تعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

عبر عن الدالة f بدلالة سلسلة فورييه إذا كانت f ذات دورة

$$z = \frac{\pi}{L}x \Rightarrow dz = \frac{\pi}{L}dx$$

أفترض أن

$$L = \frac{\text{نهاية الفترة} - \text{بداية الفترة}}{2}$$

ملاحظة

111

$$L = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$$F(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases}$$

دالة

دالة زوجية

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]$$

$$L = 2$$

$$\text{الفترة} = 2 - (-2) = 4$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^0 -1 dx + \int_0^2 1 dx \right]$$

$$= -\frac{1}{2} x \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{2} x \Big|_0^2$$

$$= -\frac{1}{2} (0 - (-2)) + \frac{1}{2} (2 - 0)$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^0 -\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \Big|_{-2}^0 + \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \Big|_0^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi} (\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)) + \frac{1}{n\pi} (\sin(n\pi) - \sin(0))$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 -\sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \right) \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \right] \Big|_0^2 \\
 &= \frac{1}{n\pi} (\cos 0 - \cos(n\pi)) - \frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - \cos 0) \\
 &= \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) - \frac{1}{n\pi} ((-1)^n - 1) \\
 &= \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} (-1)^n - \frac{1}{n\pi} (-1)^n + \frac{1}{n\pi} \\
 &= \frac{2}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} (-1)^n = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \\
 \therefore f(x) &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \\
 &= \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) + \frac{4}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2} x\right) + \dots
 \end{aligned}$$

(0, 2L), (2L, 4L)

١٣

$$f(x) = |\sin \pi x|$$

تكون

دالة ذات دورة 1 على الفترة هنا فترة السلسلة فورييه

$$L = \frac{1}{2}, \quad 2L \leq 1 \Rightarrow L \leq \frac{1}{2}$$

الفترة $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$f(-x) = |\sin \pi(-x)| = |-\sin \pi x| = |\sin \pi x| = f(x)$$

∴ دالة زوجية

$$\therefore b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi x dx$$

$$= \frac{-4}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{-4}{\pi} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0)$$

$$= \frac{-4}{\pi} (0 - 1) = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi x \cdot \cos(n\pi x) dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi x \cos(2n\pi x) dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} [\sin(\pi - 2n\pi)x + \sin(\pi + 2n\pi)x] dx$$

$$= 2 \left[\frac{-1}{(\pi - 2n\pi)} \cos(\pi - 2n\pi)x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi + 2n\pi} \cos(\pi + 2n\pi)x \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{-1}{\pi - 2n\pi} (\cos 2(1 - 2n)\pi - \cos 0) - \frac{1}{\pi + 2n\pi} (\cos 2(1 + 2n)\pi - \cos 0) \right]$$

$$= \frac{-2}{\pi - 2n\pi} ((-1)^{2(1-2n)} - 1) - \frac{2}{\pi + 2n\pi} ((-1)^{2(1+2n)} - 1)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi x \cos(n\pi x) dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} [\sin(\pi - 2n\pi)x + \sin(\pi + 2n\pi)x]$$

$$= 2 \left[\frac{-1}{(\pi - 2n\pi)} \cos(\pi - 2n\pi)x - \frac{1}{(\pi + 2n\pi)} \cos(\pi + 2n\pi)x \right]$$

$$= -2 \left[\frac{(\pi + 2n\pi) \cos(\pi - 2n\pi)x + (\pi - 2n\pi) \cos(\pi + 2n\pi)x}{(\pi - 2n\pi)(\pi + 2n\pi)} \right]$$

$$= -2 \left[\frac{(\pi + 2n\pi) \cos\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) + (\pi - 2n\pi) \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{(\pi - 2n\pi)(\pi + 2n\pi)} \right]$$

$$= -2 \left[\frac{(\pi + 2n\pi) \left(\cos\frac{\pi}{2} \cos n\pi + \sin\frac{\pi}{2} \sin n\pi \right) + (\pi - 2n\pi) \left(\cos\frac{\pi}{2} \cos n\pi - \sin\frac{\pi}{2} \sin n\pi \right)}{(\pi - 2n\pi)(\pi + 2n\pi)} \right]$$

$$= -2 \left[\frac{0 - 2\pi}{\pi^2 (1 - 4n^2)} \right] = \frac{4}{\pi (1 - 4n^2)}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi (1 - 4n^2)} \cos 2n\pi x$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3\pi} \cos 2\pi x - \frac{1}{8\pi} \cos 4\pi x + \dots$$

التوسيع الدوري:

إذا كانت الدالة المعطاة f معرفة على الفترة $-L < x < L$
 فإنه يمكن أن ننشئ توسيع الدورية (2L)
 وذلك باستخدام التعريف التالي:

$$\bar{F}(x) = f(x) \quad \text{في} \quad -L < x < L$$

$$\bar{F}(x) = f(x-2L) \quad \text{في} \quad L < x < 3L$$

$$\bar{F}(x) = f(x+2L) \quad \text{في} \quad -3L < x < -L$$

$$-L < x-2L < L$$

$$L < x < 3L$$

$$-L < x+2L < L$$

$$-3L < x < -L$$

وإن معاملات فورييه تكون بالمثل التالي:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \bar{F}(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \bar{F}(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \bar{F}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

جد التوسيع الدوري للدالة :

$$f(x) = x, \quad -1 < x < 1$$

$$\therefore L=1$$

$$\bar{f}(x) = f(x) = x \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$$\bar{f}(x) = f(x-2) = x-2 \quad ; \quad 1 < x < 3$$

$$\bar{f}(x) = f(x+2) = x+2 \quad ; \quad -3 < x < -1$$

كما ان الدالة فردية $f(-x) = -x = -f(x)$, $a_0 = a_{2n} = 0$
 من اجل سلاسة فورييه.

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \bar{f}(x) dx = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \int_{-L}^L \bar{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \int_{-1}^1 x \sin(n\pi x) dx$$

$$\text{let } u = x, \quad dv = \sin(n\pi)x dx$$

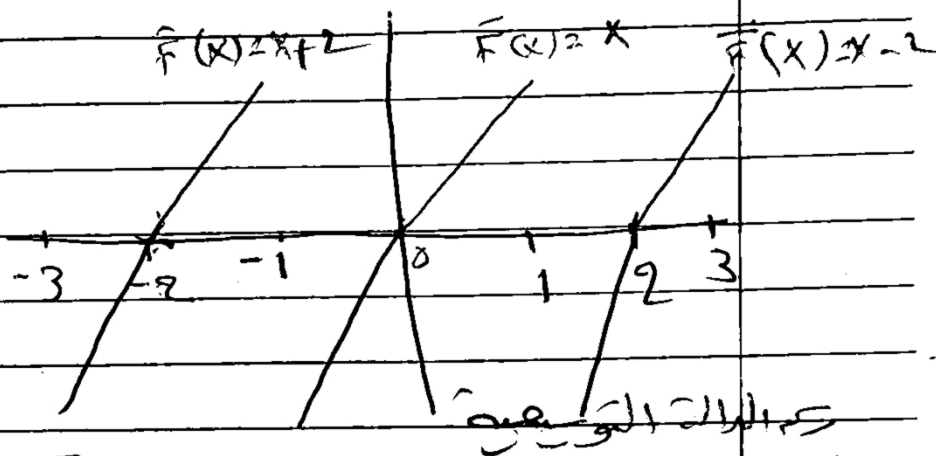
$$du = dx, \quad v = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi)x$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} x \cos(n\pi)x \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi)x dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi} [(-1)^n + (-1)^n] + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi)x \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + 0$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi)x$$

جد التوسيع الدوري للدالة $f(x) = \sin(x)$; $-\pi < x < \pi$
 ثم جد سلسلة فورييه (ب) ثم ارسم الدالة الموسعة (ب)

$$\bar{f}(x) = f(x) = \sin x, \quad -\pi < x < \pi$$

$$\bar{f}(x) = f(x - 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x, \quad \pi < x < 3\pi$$

$$\bar{f}(x) = f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad -3\pi < x < -\pi$$

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

الدالة فردية

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \bar{f}(x) \sin(n\pi x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin(n\pi x) dx$$

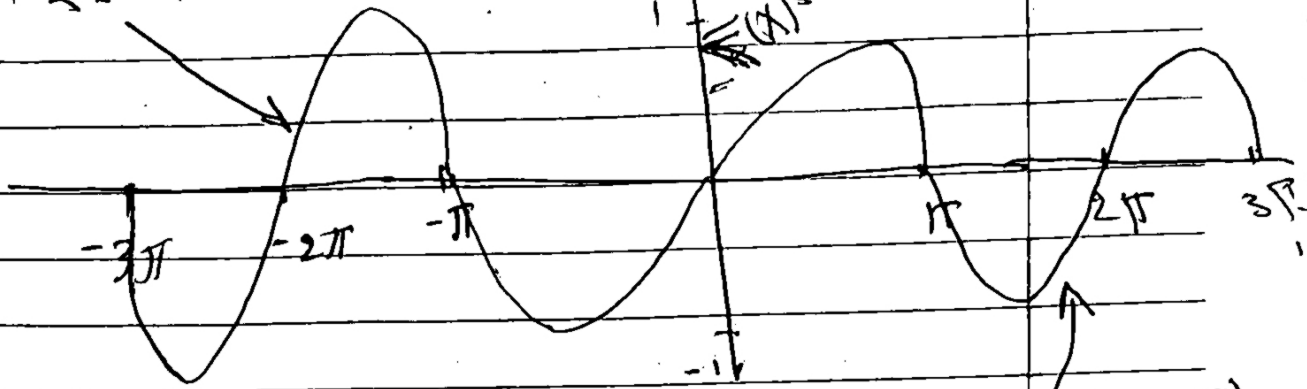
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(1-n)x - \cos(1+n)x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(1-n)x dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(1+n)x dx$$

$$= \frac{1}{(1-n)\pi} \sin(1-n)x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{(1+n)\pi} \sin(1+n)x \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{(1-n)\pi} [\sin x \cos nx - \cos x \sin nx] \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{(1+n)\pi} [\sin x \cos nx + \cos x \sin nx] \Big|_0^{\pi}$$

$$\bar{F}(x) = f(x+2\pi) \sin x$$



$$\bar{F}(x) = f(x-2\pi) \sin x$$

$$\text{If } n \neq 1 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin(nx) dx = 0$$

$$\text{If } n = 1 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} (\pi - 0) = 1$$

$$\therefore \bar{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi)x$$

$$= \sin x + \sin 2x + \dots$$

سلسلة فورييه ونشر نصف المدى له.
إذا كانت الدالة المعطاة f معرفة على الفترة المعطاة $0 < x < L$ فإنه يمكن تمثيلها بصيغة سلسلة فورييه وذلك بتوسيع الدالة المعطاة إلى دالة معرفة على الفترة المتناظرة $-L < x < L$ وذلك بجعل توسيع الدالة احاد زوجية أو فردية.

تعريف: لتكن f دالة معرفة على الفترة $(0 < x < L)$ فالتوسيع الفردي للدالة f على الفترة المتناظرة $(-L < x < L)$ يعطى

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

والتوسيع الزوجي للدالة f على الفترة المتناظرة $(-L < x < L)$ يعطى

$$F_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

فتكون معاملات فورييه للتوسيع الفردي بالشكل

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

وإن سلسلة فورييه المتناظرة لها هي

$$F_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{في} \quad -L < x < L$$

وتكون معاملات فورييه للتوسيع الزوجي بالشكل:

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f_e(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_e(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

وإن سلسلة فورييه المتناظرة لها هي:

$$F_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

جد التوسع الفوري والزوايا ثم ارسم الاشارة المطوية

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad (0 < x < \pi)$$

$$f_0(x) = -f(-x)$$

$$= -\sin(-x)$$

$$= \sin x$$

$$, \quad -\pi < x < \pi$$

$$f_0(x) = \begin{cases} \sin x & ; 0 < x < \pi \\ \sin(x) & ; -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx$$

$$\text{If } n \neq 1 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx = 0$$

$$\text{If } n = 1 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} (\pi - 0 - 0) = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

$$F_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi)x = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

التوسيع الزائدي للدالة f

$$F_e(x) = \begin{cases} f(x) & , 0 < x < \pi \\ f(-x) & , -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin x & , 0 < x < \pi \\ -\sin x & , -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (-1 - 1)$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(n\pi)x dx$$

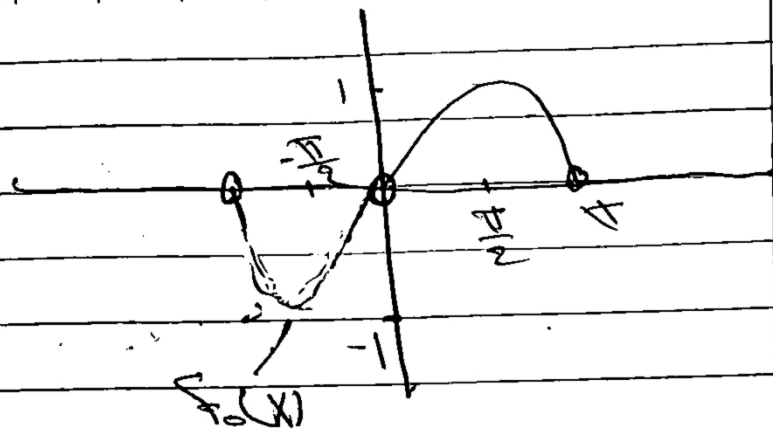
لا يمكن دمج الدالتين

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(1-n)x + \sin(1+n)x] dx$$

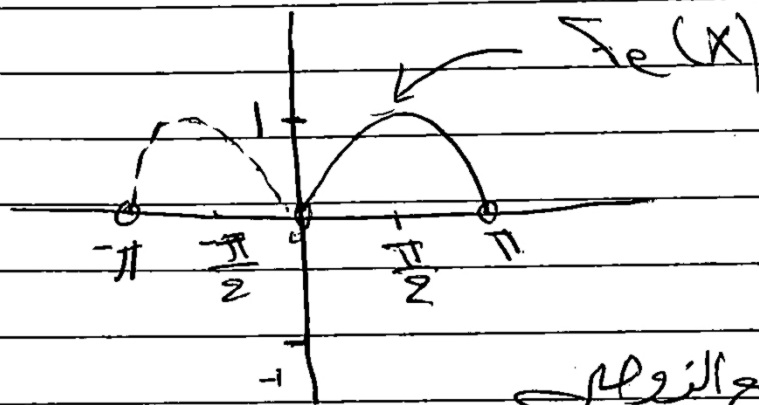
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-1}{(1-n)} \cos(1-n)x - \frac{1}{(1+n)} \cos(1+n)x \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-1}{(1-n)} ((-1)^{1-n} - 1) - \frac{1}{(1+n)} ((-1)^{1+n} - 1) \right]$$

$$\therefore F_e(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$



التوسع الغريب



التوسع الزوجي

الدالة المثلثية

(١) دالة متساوية مقداراً

(٢) المشتقة الأولى متساوية مقداراً

التوسيع الفردي

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x) & ; 0 < x < L \\ -f(-x) & ; -L < x < 0 \end{cases}$$

التوسيع الزوجي

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & , 0 < x < L \\ f(-x) & ; -L < x < 0 \end{cases}$$

تحويل لابلاس (Laplace Transformations) هو التحويل الخطي الذي يحول دالة $f(t)$ في المجال الزمني $t \geq 0$ إلى دالة $F(s)$ في المجال الترددي s . حيث s هو عدد مركب. $f(t)$ دالة مستمرة ومقطعية عند $t=0$ فتكون $t \geq 0$ $f(t)$ دالة مستمرة ومقطعية عند $t=0$ فتكون $t \geq 0$ $f(t)$ دالة مستمرة ومقطعية عند $t=0$ فتكون $t \geq 0$

$$L(f) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad ; \quad t \geq 0$$

مثال: تحويل لابلاس للدالة $f(t) = 1$

$$L(f) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (1) dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (0 - 1)$$

$$= \frac{1}{s}$$

$$\text{if } f(t) = s \Rightarrow L(s) = \frac{s}{s^2}$$

$$f(t) = a \Rightarrow L(a) = \frac{s}{a}$$

$$f(t) = e^{at}$$

$$L(f) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s-a} (0 - 1) = \frac{1}{s-a}$$

117

$$\therefore L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(t) = \sin(at) \quad , \quad L(\sin at) =$$

$$L(f) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(at) dt$$

1C✓

$$\cosh(at)$$

$$\sinh(at)$$

$$e^{bt} \sin(at)$$

$$t \cos(at) \xrightarrow{L} L(\cosh at) = L\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} L(at) + \frac{1}{2} L(-at)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a}$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2}$$

$$L[e^{bt} \sin(at)]$$

سینوس کو باس

$$= \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$L\left(\frac{3}{2} \cos 5t\right) = \frac{3}{2} L(\cos 5t)$$

$$s \frac{3}{2}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2-4}\right) = e^{2t} \cos t \quad \text{بالا کو باس}$$

1c1

$$① L(cf(t)) = c L(f(t))$$

$$2) L(f(t) + g(t)) = L(f(t)) + L(g(t))$$

$$L(5 \sin 2t)$$

$$= 5 L(\sin 2t)$$

$$= 5 \cdot \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{10}{s^2 + 4}$$

$$L(\cos 4t + e^t)$$

$$= \frac{s}{s^2 + 16} + \frac{1}{s - 2}$$

$$\begin{aligned}
 L(e^{bt} f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{bt} f(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(s-b)t} f(t) dt \\
 &= F(s-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L(f(t)) &= F(s) \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ex: } L(e^{2t} \sin 3t) & \quad \therefore b=2 \\
 &= \frac{3}{(s-2)^2 + 9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ex: } L(e^{-4t} \cos(3t)) & \quad \therefore b=-4 \\
 &= \frac{(s-b)}{(s-b)^2 + a^2} = \frac{3+4}{(s+4)^2 + 9}
 \end{aligned}$$

تطبيقات على المعادلات التفاضلية الجزئية
 عندما نطبق تحويلات لابلاس على المعادلات التفاضلية الجزئية
 نتعامل مع المتغيرات عدا المتغير (t) على أنها وسيطات
 وبالتالي فإن تحويل لابلاس $U(x, t)$ يحرف بـ

$$L(u(x, t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt$$

$$= U(x, s)$$

$$L(1) = \frac{1}{s}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-6}\right) = e^{6t}$$

$$L\left(\frac{5}{s^2-9}\right) = \frac{5}{3} L\left(\frac{3}{s^2-9}\right) = \frac{5}{3} \sinh(3t)$$

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dx}$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

$$L\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = \frac{\partial^n U}{\partial x^n} = \frac{d^n U}{dx^n}$$

انما تكون في هذه الحالة بالنسبة لـ t يمكن ايجاد
طريقة التكامل بالتجزئة عند $t=0$

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = s L(u(x, t)) - u(x, 0)$$

$$= s U(x, s) - u(x, 0)$$

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = s^2 U(x, s) - s u(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$$

$$L\left(\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right) = s^n U(x, s) - s^{n-1} u(x, 0) - s^{n-2} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - \dots - \frac{\partial^{n-1} u(x, 0)}{\partial t^{n-1}}$$

١٣٢

 $t \rightarrow s$
 $x \rightarrow X$

الاعداد تبقى لا تتحول

حل باستخدام تحويل لابلاس ومعطيات مسألة القيمة الحدودية التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 1$$

$$u(x, 0) = 1 + \sin \pi x$$

فأخذ تحويل لابلاس للحرفين المتبادلين * كالتالي

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 U}{d^2 X} = s U(x, s) - u(x, 0)$$

$$\frac{d^2 U}{d^2 X} - s U(x, s) = -(1 + \sin \pi x)$$

$$L(u(0, t)) = L(1)$$

$$U(0, s) = \frac{1}{s}$$

$$L(u(1, t)) = L(1)$$

$$U(1, s) = \frac{1}{s}$$

$$L(u(x, 0)) = L[1 + \sin \pi x]$$

$$U(x, 0) = \frac{1}{s} + \frac{\pi}{s^2 + \pi^2}$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - S U(x, S) = 0$$

$$(\Delta^2 - S) U = 0$$

$$m^2 - S = 0$$

$$m = \pm \sqrt{S}$$

$$U_c(x, S) = C_1 e^{\sqrt{S}x} + C_2 e^{-\sqrt{S}x}$$

$$U(x, S) = \frac{1}{S} + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{S + \pi^2} \quad \text{--- ①}$$

① جاذب معكوس لابلاس العادة

$$L^{-1}(U(x, S)) = L^{-1}\left[\frac{1}{S} + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{S + \pi^2}\right] \cdot \sin(\pi x)$$

تأثير لابلاس تحويل لابلاس فقط الى بنوي

$$U(x, t) = 1 + \sin(\pi x) \cdot e^{-\pi^2 t}$$

حل المسألة الأصلية

المسألة الأصلية

L

المسألة المحولة

L^{-1}

حل المسألة الأصلية
المحولة

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

تحويل لابلاس

$$\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1!}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{at}\} = \frac{2!}{(s-a)^3}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{at}\} = \frac{2!}{(s-a)^3}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \cos at\} = \frac{s - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-bt} \cos at\} = \frac{s + b}{(s + b)^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-bt} \sin at\} = \frac{a}{(s + b)^2 + a^2}$$

$$L[\sin at] = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at \, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{iat} \, dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-ia)t} \, dt$$

$$= \frac{-1}{(s-ia)} e^{-(s-ia)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{(s-ia)} (0 - 1) = \frac{1}{(s-ia)} \times \frac{s+ai}{s+ai}$$

$$= \frac{s+ai}{s^2 - a^2 i^2} = \frac{s+ai}{s^2 + a^2}$$

$$= \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{a}{s^2 + a^2} i$$

cos ωt $\rightarrow$

sin ωt $\rightarrow$

14V

$$L(t) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

$$\text{Let } u = t, \quad dv = e^{-st} dt$$

$$du = dt, \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} t e^{-st} = -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} dt$$

$$= 0 - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{s^2} (0 - 1) = \frac{1}{s^2}$$