

مفاهيم اساسية

طبيعة علم الإحصاء ١

إن كلمة الإحصاء في الماضي كانت تهدف إلى العد والحصر حيث سمي هذا العلم بعلم العد. وعليه فإن علم الإحصاء هو العلم الذي يقوم بجمع البيانات وتحليلها للوصول إلى النتائج.

يمكن تصنيف الإحصاء كأحد فروع علم الرياضيات كما أنه يدخل في مجالات العلوم الأخرى كعلم الاقتصاد والعلوم السياسية والاجتماعية و... الخ.

* ويمكن تقسيم علم الإحصاء بصورة عامة إلى قسمين رئيسيين:

① **الإحصاء الوصفي**: ويشمل الطرق الإحصائية المستخدمة في وصف مجموعة معينة من البيانات وتلخيص هذه الطرق الإحصائية بإلصاق جمع البيانات في صورة قياسات رقمية ثم تبويبها وتلخيصها وعرضها بشكل بسيط مفهوماً.

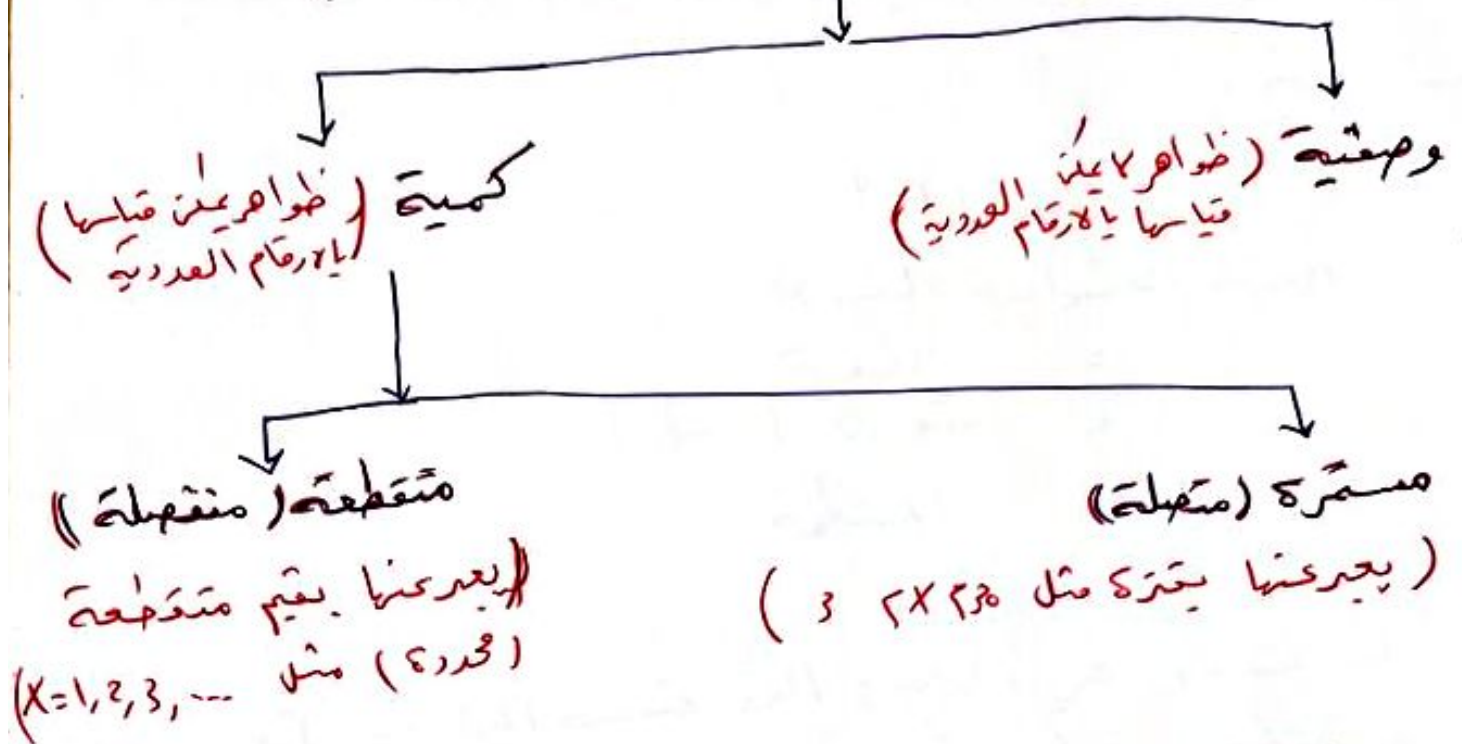
② **الإحصاء الاستدلالي**: ويشمل الطرق التي تهدف إلى استنتاجات أو استدلالات حول المصدر الذي جمعت منه البيانات.

* **المتغير**: هو أي ظاهرة تظهر اختلافات بين مفرقاتها ويرمز له بالحروف الكبيرة ($X, Y, Z, \dots$).

* **الملاحظة**: أو ما نسمي بالمفردة أو الملاحظة أو القيمة يرمز لها بالحروف الصغيرة ($x, y, z, \dots$).

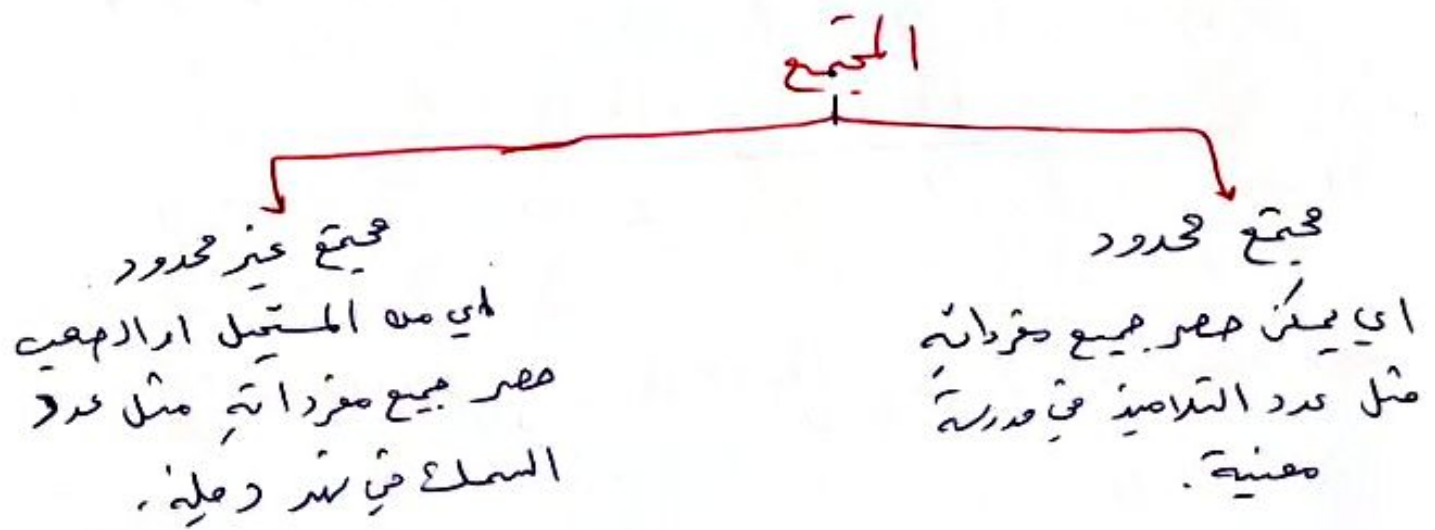
وتقسم المتغيرات الى :-

المتغيرات (variables)



* المجتمع والعينة :-

المجتمع (Population) : هو عبارة عن جميع مفردات الظاهرة والتي يمكن ان يأخذها المتغير مثلاً إجراء دراسة معينة على طلبة قسم الرياضيات في كلية التربية.



عينة (sample) :-

عبارة عن مجموعة جزئية من المجتمع ونسئل المسألات التي
اختلفت بطريقة ما من المجتمع ومادة ما يتم اختيار العينة بطريقة
عشوائية .

* انواع العينة العشوائية :-

- ١- العينة العشوائية البسيطة .
- ٢- = = = الطبيعية
- ٣- = = = متدرجة المراحل
- ٤- = = = المنتهية .

* الفئات :- هي المجاميع التي قسمت إليها قيم المتغير وكل
فئة تأخذ حداً معيناً من قيم المتغير :

حدود الفئات :- لكل فئة حدان حد أعلى وحد أدنى .

الحد الأدنى الحقيقي للفئة = الحد الأدنى للفئة - ٠.٥

الحد الأعلى الحقيقي للفئة = الحد الأعلى للفئة + ٠.٥

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2} \quad (y_i)$$

طول الفئة (c) = الحد الأعلى - الحد الأدنى

جدول التوزيع التكراري :-

هو جدول بسيط يتكون من عمودين الأول يسمى الفئات والثاني يسمى التكرارات (مفردات كل فئة) وهو على نوعين :-

- ① جدول التوزيع التكراري البسيط .
- ② جدول التوزيع التكراري المركب .

* خطوات جدول التوزيع التكراري

① حساب المدى (R) : $R = X_{\max} - X_{\min}$

② تحديد عدد الفئات m :

إذا كان عدد الملاحظات أقل من 100 $[n < 100]$ فإن

$$2 \leq m \leq 6$$

وإذا كانت $[n > 100]$ فإن :- $20 \leq m \leq 10$

③ حساب طول الفئة : - بحسب طول الفئة من العلاقة :

$$C = \frac{R}{m}$$

وتقرب إلى أقرب عدد صحيح . مثلاً :-

$$C = 8.2 \simeq 9$$

مثال: البيانات التالية تمثل درجات 80 طالب في مادة
الاسلامية في الصف السادس علي في مدرسة ما ، المطلوب
استعداد جدول التوزيع التكراري لدرجات هؤلاء الطلاب ؟

68	84	81	82	68	90	62	88	76	93
73	79	75	73	60	93	71	59	85	75
61	65	88	78	74	62	95	78	63	72
66	78	75	75	94	77	69	74	68	60
96	78	82	61	75	95	60	79	83	71
79	82	89	97	78	85	76	65	71	95
65	80	67	57	88	78	62	76	53	74
67	73	73	72	63	76	76	75	85	77

الحل:

$$① R = X_{max} - X_{min} = 97 - 53 = 44$$

$$② n = 80 < 100 , 6 \leq m \leq 12 , m = 10 \text{ (بالفرض)}$$

$$③ C = \frac{R}{m} = \frac{44}{10} = 4.4 \approx 5$$

④ اظهر قيمة بالدرجات هي 53 لذلك نبدأ بالرقم 50 ليشكل الحد الأدنى للفئة الأولى .

الفئات	التكرارات بالاشارة	f_i	الحدود الحقيقية	التردد النسبي
50 - 54	I	1	49.5 - 54.5	52
55 - 59	II	2	54.5 - 59.5	57
60 - 64	IIII IIII I	11	59.5 - 64.5	62
65 - 69	IIII IIII	10	64.5 - 69.5	67
70 - 74	IIII IIII II	12	69.5 - 74.5	72
75 - 79	IIII IIII IIII IIII I	21	74.5 - 79.5	77
80 - 84	IIII I	6	79.5 - 84.5	82
85 - 89	IIII II	7	84.5 - 89.5	87
90 - 94	IIII	4	89.5 - 94.5	92
95 - 99	IIII I	6	94.5 - 99.5	97

$\Sigma = 80$

* التوزيع التكراري النسبي

- التكرار النسبي :- هو تكرار الفئة مقسوم على التكرار الكلي لجميع الفئات وعادة يعبر عنه كنسبة مئوية . اي انه :-

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار تلك الفئة}}{\text{المجموع الكلي للتكرارات}} * 100 = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} * 100$$

$i = 1, 2, \dots, n$

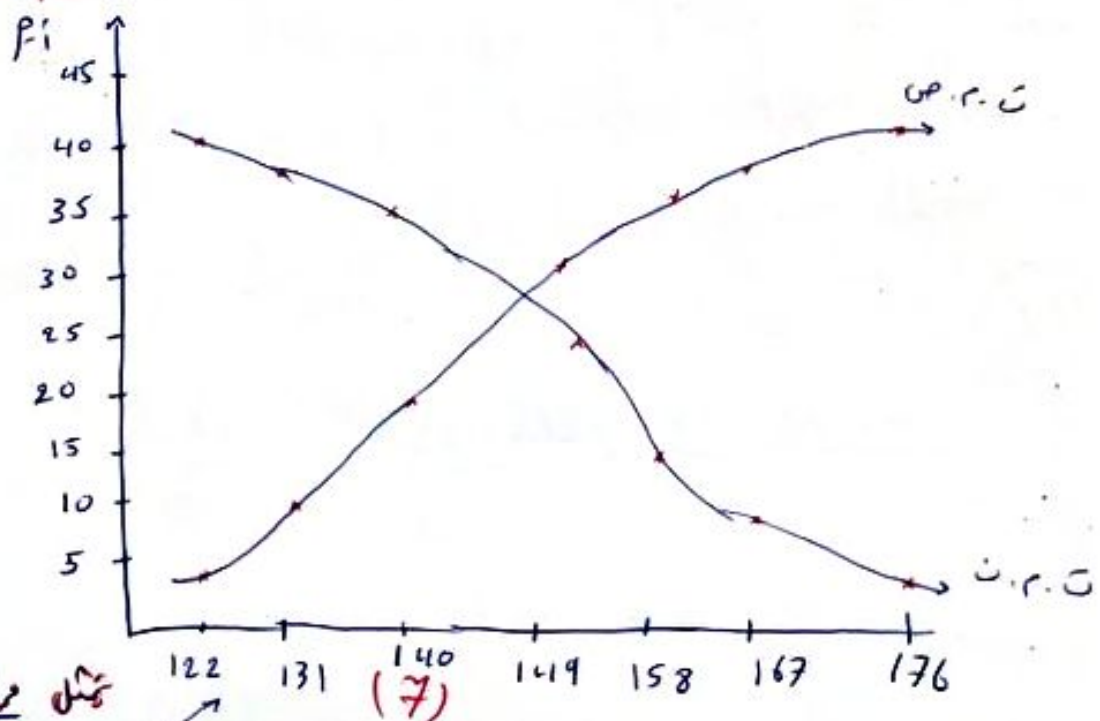
- التكرار المجمع المتراكم :- هو التكرار المتراكم الذي يبدأ من اصغر فئة الى اكبر فئة ويمثل عدد المرات التي تقل او تساوي حد معين .

التكرار المجمع النازل :- هو التكرار المتراكم الذي يبدأ من أكبر فئة الكماهير فئة ويصل عدد المقدرات التي تزيد أو ستارب حد معين .

مثال :- لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :- احسب التكرار النسبي لكل فئة والتكرار المجمع الصاعد والنازل مع الرسم ؟

الفئات	f_i	التكرار النسبي	الحدود الحقيقية	ت.م.ص	ت.م.ن
118 - 126	3	7.5 %	117.5 - 126.5	3	40
127 - 135	5	12.5 %	126.5 - 135.5	8	37
136 - 144	9	22.5 %	135.5 - 144.5	17	32
145 - 153	12	30.0 %	144.5 - 153.5	29	23
154 - 162	5	12.5 %	153.5 - 162.5	34	11
163 - 171	4	10.0 %	162.5 - 171.5	38	6
172 - 180	2	5.0 %	171.5 - 180.5	40	2

$\Sigma = 40$



مثال مراكز الفئات

مقاييس النزعة المركزية

تشتمل مقاييس النزعة المركزية على ما يلي :-

① الوسط الحسابي (المعدل)

② الوسيط

③ المنوال

④ الوسط التوافقي

① الوسط الحسابي :-

④ للبيانات غير المبوبة (بدون جدول توزيع تكراري)

افرض ان $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مجموعة من المشاهدات فإن

الوسط الحسابي $\bar{X}$ بحسب من القانون الآتي :-

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

عدد المشاهدات : n

مثال :- البيانات الآتية تمثل كمية المطر التي هطلت على مدينة
المرسل خلال 5 سنوات (520, 350, 450, 380, 400)
فما معدل سقوط المطر خلال تلك السنوات (ودة القياس mm)

(الحل)

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{520 + 350 + 450 + 380 + 400}{5}$$

المعدل

$$= 420 \text{ mm}$$

١١) للبيانات المبوبة (جدول توزيع تكراري)

افترض ان $y_1, y_2, \dots, y_n$ تمثل مراكز الفئات مع تكراراتها
في الترتيب $f_1, f_2, \dots, f_n$ فإن الوسط الحسابي (المعدل)
يُحسب من القانون الآتي :-

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i y_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة} \times \text{تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

وان مركز الفئة y_i حسب من العلاقة :-

$$y_i = \frac{\text{الحدا الأعلى} + \text{الحدا الأدنى}}{2}$$

مثال :- استخرج الوسط الحسابي لاهوال النباتات من الجدول
التوزيع التكراري الآتي :-

الفئات	f_i (التكرارات)	مركز الفئة y_i	$f_i y_i$
31 - 40	1	35.5	35.5
41 - 50	2	45.5	91
51 - 60	5	55.5	277.5
61 - 70	15	65.5	982.5
71 - 80	25	75.5	1887.5
81 - 90	20	85.5	1710.0
91 - 100	12	95.5	1146.0
	$\sum f_i = 80$		$\sum f_i y_i = 6130$

$$\therefore \bar{X} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{6130}{80} = 76.625 \text{ cm}$$

(9)

الوسيط (Median)

① للبيانات غير الميوية (بدون جدول توزيع تكراري)

هو القيمة التي تقع في منتصف مجموعة البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً.

أمثلة: $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجموعة من المشاهدات. إذا كانت n عدد فردي فإنه الوسيط بحسب من الأصغر الآتية:

$$\tilde{X} = X_{\frac{n+1}{2}} \quad \text{أي المشاهدات التي ترتيبها } \frac{n+1}{2} \text{ بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً}$$

مثال: احسب الوسيط لمجموعة البيانات الآتية
3, 4, 4, 5, 10, 8, 9, 11, 10

② ترتيب البيانات ترتيباً تصاعدياً
3, 4, 4, 5, 8, 9, 10, 10, 11

$$\because n \text{ (فردي)} \Rightarrow \tilde{X} = X_{\frac{n+1}{2}} = X_{\frac{10}{2}} = X_5 = 8$$

أما إذا كانت n عدد زوجي فإنه الوسيط بحسب من الأصغر الآتية:

$$\tilde{X} = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

احسب الوسيط لمجموعة البيانات التالية -

18, 15, 9, 7, 5, 5, 12, 11

(الكل) ترتيب البيانات ترتيب تصاعدي

5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18

$$\therefore n \text{ (زوجي)} \Rightarrow \tilde{X} = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

$$\Rightarrow \tilde{X} = \frac{X_4 + X_5}{2} = \frac{9 + 11}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

ب) البيانات المبوبة (جدول توزيع تكراري)

إذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ تمثل مراكز الفئات وتكراراتها
على الترتيب $f_1, f_2, \dots, f_n$ فإن الوسيط يحسب من الصيغة
الآتية -

$$\tilde{X} = L_1 + \left[\frac{\frac{\sum f_i}{2} - f_i}{f_i} \right] \times w$$

إذا كان -

L_1 : الحد الأدنى الحقيقي لفئة الوسيط (التي تمتلك الحد الأدنى - 0.5)

$\sum f_i$: مجموع التكرارات

f_i : التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة الوسطية

f_i : تكرار فئة الوسيط = التكرار المجمع الصاعد - التكرار المجمع الصاعد
عند بداية فئة الوسيط عند نهاية فئة الوسيط

w : طول فئة الوسيط = الحد الأعلى - الحد الأدنى + 1

(11)

جد الوسط من جدول التوزيع التكراري الآتي :-

الفئات	f_i	F_i
60 - 62	5	5
63 - 65	18	23
66 - 68	42	65
69 - 71	27	92
72 - 74	8	100
$\Sigma f_i = 100$		

فئة الوسط هي تلك الفئة التي يكون تكرارها التجميعي الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{\Sigma f_i}{2}$

$$\therefore \frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

وعليه فإن فئة الوسط ستكون (66 - 68)

$$L_1 = 66 - 0.5 = 65.5$$

الحد الأدنى للفئة
التي يمتلك الميزون

$$F_i = 23, f_i = 42, w = 68 - 66 + 1 = 3$$

$$\tilde{X} = 65.5 + \left[\frac{50 - 23}{42} \right] * 3$$

$$\tilde{X} = 67.428$$

الموالات (mode)

للبيانات غير الميوية (بدون جدول توزيع تكراري)

هي الفئة الأكثر تكراراً ويرمز لها بالرمز X_0 .

مثال :- جد الموالات لمجموعة البيانات التالية :

① $2, \underline{3}, 2, 4, \underline{3}, 5, \underline{3}, 6$

$X_0 = 3$ الفئة الأكثر تكراراً

الكل

② $2, \underline{5}, 4, \underline{5}, 6, \underline{5}, 4, 9, \underline{4}$

$X_0 = 4, 5$

ب) للبيانات الميوية (جدول توزيع تكراري)

لايجاد الموالات بجدول توزيع تكراري نستخدم القانون الآتي :-

$$X_0 = L_1 + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right] * w$$

إذا كان :-

L_1 : الحد الأدنى لفئة الموالات - 0.5

d_1 : الفرق بين تكرار فئة الموالات و الفئة السابقة لها.

d_2 : الفرق بين تكرار فئة الموالات و الفئة التالية لها.

w : طول فئة الموالات = (الحد الأعلى - الحد الأدنى) + 1

فئة الموالات هي الفئة التي تمتلك أكبر تكرار .

الحساب المتوال بجدول توزيع تكراري .

الفئات	f_i
60-62	5
63-65	18
66-68	42
69-71	27
72-74	8
$\sum f_i = 100$	

نلاحظ ان أكبر تكرار هو 42

∴ فئة المتوال هي (66 - 68)

$$\Rightarrow L_1 = 66 - 0.5 = 65.5$$

$$d_1 = 42 - 18 = 24$$

تكرار
الفئة
السابقة

$$d_2 = 42 - 27 = 15$$

تكرار الفئة
اللاحقة

$$w = 68 - 66 + 1 = 3$$

$$\therefore X_0 = 65.5 + \left[\frac{24}{24 + 15} \right] * 3$$

$$X_0 = 67.346$$

٥ الوسط التوافقي H

٥) للبيانات غير الميوية (بدون جدول توزيع تكراري) ^{مقلوب القيم}
 هو عبارة عن مقلوب الوسط الحسابي (المعدل) أو يرمز
 له بالرمز H ، أي أنه إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_n$ تمثل
 قيم المتغير مددها n فإن الوسط التوافقي هو :

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

مثال - احسب الوسط التوافقي للقيم التالية -

3, 5, 6, 6, 7, 10, 12

(الحل)

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} = \frac{7}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 5.87$$

٦) للبيانات الميوية (جدول توزيع تكراري)

إذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ تمثل مراكز الفئات مع تكراراتها
 هي الترتيب $f_1, f_2, \dots, f_n$ ، فإن الوسط التوافقي بحسب هذه
 الصيغة الآتية :-

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{y_i}}$$

للحساب الوسط التوافقي لجداول التوزيع التكراري

الفئات	f_i	مركز الفئة y_i
60 - 62	5	61
63 - 65	18	64
66 - 68	42	67
69 - 71	27	70
72 - 74	8	73
	$\Sigma f_i = 100$	

$$H = \frac{\Sigma f_i}{\Sigma \frac{f_i}{y_i}} = \frac{100}{\frac{5}{61} + \frac{18}{64} + \frac{42}{67} + \frac{27}{70} + \frac{8}{73}}$$

$$H = 67.3$$

مميزات الوسط التوافقي :-

- ① يستخدم جميع القيم في حسابه
- ② يتأثر قليلاً بالقيم المتطرفة
- ③ لا يستخدم في الجداول المفتوحة

يقصد بالتشتت الباعدين بين القيم أو التفاوت بينهما وكما
حان الباعدين كثيراً كان مقدار التشتت كبيراً.

وسيشمل التشتت على ما يلي :-

- ① المدى
- ② الانحراف الربيعي
- ③ البياحي
- ④ الانحراف المعياري

⑤ المدى (Range)

معارضة عن الفرق بين القيم وأقل مشاهدة في حالة
البيانات غير المبوية ويرمز له بالرمز R

$$R = X_{max} - X_{min}$$

أما في حالة البيانات المبوية فإنه المدى :-

$$R = \begin{matrix} \text{الحد الأدنى الحقيقي} \\ \text{للغنة الأدنى} \end{matrix} - \begin{matrix} \text{الحد الأعلى الحقيقي} \\ \text{للغنة الأعلى} \end{matrix}$$

ملاحظة - لا يعتمد دائماً على المدى في حساب التشتت لأنه
يكون أحياناً مضللاً بسبب اعتماد على الحد الأدنى وأقل
مشاهدة.

الانحراف الربيعي (Quartile of Deviation)

حسب الانحراف الربيعي من القانون الآتي :-

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

(في حالة البيانات غير المبوية)

اذ ان :-

Q_1 : يمثل الربيع الاول (الارثي)

Q_3 : يمثل الربيع الثالث (الاعلى)

الربيع الاول Q_1 : هو الملاحظة التي يسبقها في الترتيب ربع الملاحظة ويليهما ثلاثة ارباع الملاحظة على فرض ان هذه البيانات مرتبة ترتيبياً تدهادياً.

الربيع الثالث Q_3 : هو الملاحظة التي يسبقها في الترتيب ثلاثة ارباع الملاحظة ويليهما ربع الملاحظة وعلى فرض ان هذه البيانات مرتبة ترتيبياً تدهادياً.

ولاحظ ايجاد الانحراف الربيعي نتبع الخطوات التالية :-

(1) ترتيب البيانات تدهادياً.

(2) تحديد الوسيط للبيانات.

(3) تحديد الوسيط للقسم الاول من هذه البيانات وهذا القسم من البيانات يسبق الوسيط فيكون هذا الوسيط هو Q_1 .

(4) تحديد الوسيط للقسم الثاني من البيانات وهذا القسم من البيانات يلي الوسيط فيكون هذا الوسيط هو Q_3 .

(5) تطبيق القانون.

٢٤- جد الانحراف الربيعي للبيانات الآتية :-

9, 12, 10, 8, 2, 4, 7, 5

(الحل) نرتب البيانات تصاعدياً =
2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12

$$\tilde{X} = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{7+8}{2} = 12.5 \quad (\text{الربيع})$$

$$Q_1 = \frac{4+5}{2} = 4.5, \quad Q_3 = \frac{9+10}{2} = 9.5$$

$$Q = \frac{9.5 - 4.5}{2} = 2.5 \quad (\text{الانحراف الربيعي})$$

٢٥- في حالة البيانات الميوية :-

$$Q_1 = L_1 + \left(\frac{\frac{1}{4} \sum f_i - F_1}{f_1} \right) * C$$

$$Q_3 = L_3 + \left(\frac{\frac{3}{4} \sum f_i - F_3}{f_3} \right) * C$$

إذا أمكن

F_1 : التكرار المتجمع المهاد للفترة التي تسبق فئة الربيع الأول مباشرة.

L_1 : الحد الأدنى الحقيقي لفترة الربيع الأول.

وفئة الربيع الأول هي تلك الفترة التي تكرارها التجميع المهاد أكبر أو يساوي $\frac{\sum f_i}{4}$

د: تمثل تكرار فئة الربيع الاول .

ج: طول الفئة .

د: التكرار المجمع الصاعد للفئة التي تسبق فئة الربيع الثالث مباشرة .

د: الحد الادنى الحقيقي لفئة الربيع الثالث .

فئة الربيع الثالث هي تلك الفئة التي تكرارها التجميعي الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{2f_i}{3}$.

د: تكرار فئة الربيع الثالث .

د: بعده الحد Q_1 و Q_3 نطبق القانون $Q_2 = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

مثال ٥: احسب الانحراف الربيعي لجداول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	f_i
50 - 59	8
60 - 69	10
70 - 79	16
80 - 89	15
90 - 99	10
100 - 109	5
110 - 119	3
120 - 129	3

المادة 7

التباين (Variance)

⑤ للبيانات غير الميوية

التباين: عبارة عن متوسط مربعات الانحرافات القيم عن وسطها الحسابي أي أن إذا كانت المشاهدات $X_1, X_2, \dots, X_n$ عددها n ووسطها الحسابي $\bar{X}$ فإن التباين يحسب مناد صيغة الآتية:-

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}, \quad n < 60$$

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}, \quad n \geq 60$$

وبالمكانه اعادة كتابة المعادلة اعلاه بـاد صيغة الآتية:-

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}, \quad n < 60$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n}, \quad n \geq 60$$

مثال:- اوجد التباين للبيانات الآتية:-

9, 8, 6, 5, 7

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{9+8+6+5+7}{5} = 7$$

الكل

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
9	$9 - 7 = 2$	4
8	$8 - 7 = 1$	1
6	$6 - 7 = -1$	1
5	$5 - 7 = -2$	4
7	$7 - 7 = 0$	0
$\Sigma = \text{zero}$		$\Sigma = 10$

$$s^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$= \frac{10}{5-1} = \frac{10}{4} = 2.5$$

(ب) البيانات الطولية (جدول توزيع تكراري)

إذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ تمثل مراكز الفئات مع تكرارها $f_1, f_2, \dots, f_n$ فإن البيانات يكتب بالشكل الآتي -

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n f_i - 1}$$

or

$$s^2 = \frac{\sum f_i y_i^2 - \frac{(\sum f_i y_i)^2}{\sum f_i}}{\sum f_i - 1}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i}$$

مثال - جد البيانات من جدول التوزيع التكراري

الفئات	التكرار	y_i	$f_i y_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$f_i (y_i - \bar{y})^2$
60 - 62	5	61	305	$(61 - 67.45)^2 = 41.60$	208.0125
63 - 65	18	64	1152	11.9025	214.245
66 - 68	42	67	2814	0.2025	8.505
69 - 71	27	70	1890	6.5025	175.7675
72 - 74	8	73	584	30.8025	246.42
$\sum_{i=1}^n f_i = 100$			$\Sigma = 6745$		$\Sigma = 852.75$

$$\bar{y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$s^2 = \frac{852.75}{99} = 8.6$$

(29)

الاختلاف المعياري (Standard Deviation)

هو القيمة الموجبة كجذر البيانات أي أن :

$$S = \sqrt{S^2}$$

↑
الاختلاف
المعياري

مثال: حيد الاختلاف المعياري (الفترات) للبيانات الآتية:

2, 8, 3, 7, 6, 4

الكل

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}, \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{30}{6} = 5$$

$$S^2 = \frac{178 - 6(5)^2}{5} = 5.6 \quad (\text{البيانات})$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{5.6} = 2.37 \quad (\text{الاختلاف المعياري})$$

ملاحظة: هناك مقاييس مشتركة بين مقاييس الترتيب

المرتكبة ومقاييس التشتت

١- معامل الاختلاف (C. V.)

٢- الدرجة المعيارية

٣- الالتواء

$$C.V. = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100 \%$$

مثال: إذا كانت قيم الانحراف المعياري (المعياري) والوسط الحسابي لمادتي الاحصاء والرياضيات كالآتي:

	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري
الاحصاء	78	8
الرياضيات	73	7.6

احسب اي من المادتين لها اقل تشتت.

(الحل)

$$C.V. (\text{الاحصاء}) = \frac{8}{78} \times 100\% = 10.25 \%$$

$$C.V. (\text{للرياضيات}) = \frac{7.6}{73} \times 100\% = 10.41 \%$$

$$C.V. (\text{للرياضيات}) > C.V. (\text{الاحصاء})$$

∴ تشتت مادة الرياضيات اكبر من تشتت مادة الاحصاء.

الدرجة المعيارية

تعرف الدرجة المعيارية بالقانون الآتي :-

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$$

وتستخدم هذه الدرجة المعيارية لمقارنة موضوع واحد لشخصين في مجموعتين أو موضوعين لشخص واحد. والذي تكون درجته المعيارية أكبر يكون هو الأفضل.

مثال :- حمل طالب على درجتين (84) في مادة الرياضيات حيث كان متوسط الدرجات ($\bar{X}_m = 76$) والانحراف المعياري ($S_m = 10$)

وحمل على درجتين (90) في مادة الفيزياء حيث كان متوسط الدرجات ($\bar{X}_n = 82$) والانحراف المعياري ($S_n = 16$) في أي موضوع كانت درجته استيعابه أفضل.

$$Z_m = \frac{X_m - \bar{X}_m}{S_m} = \frac{84 - 76}{10} = 0.8$$

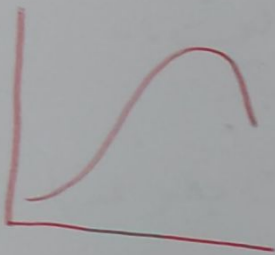
الكل

$$Z_n = \frac{X_n - \bar{X}_n}{S_n} = \frac{90 - 82}{10} = 0.5$$

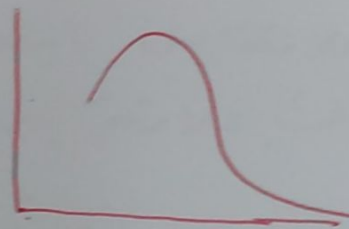
∴ في مادة الرياضيات كانت درجته استيعابه أكبر.

الانحراف (skewness)

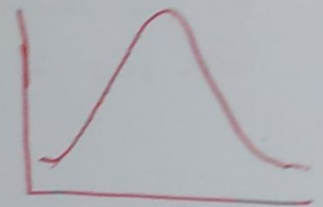
هو مقياس لدرجة القرب أو البعد عن التماثل للتوزيع. فإذا كان المنحنى التكراري للتوزيع له ذيل أكبر إلى اليمين يسمى التوزيع بانه ملتوي إلى اليمين أو موجب الانحراف. أما إذا كان العكس صحيح فيقال بانه التوزيع ملتوي إلى اليسار أو سالب الانحراف.



الانحراف سالب
أو اليسار



الانحراف موجب
أو اليمين



متماثل
لا يوجد انحراف
(الانحراف = صفر)

هناك عدة مقاييس لحساب معامل الانحراف منها :-

$$S_k = \frac{\bar{X} - \bar{X}_0}{S}$$

إذا علمنا

$\bar{X}$: الوسط الحسابي

$\bar{X}_0$: المتوسط

S : الانحراف المعياري (المعياري)

الارتباط والانحدار (Correlation & Regression)

تعريف: إذا كان لكل قيمة من قيم المتغير X يوجد قيمة

مقابلة لمتغير آخر Y فإنه الزوج المرتب (X, Y)

متغير ذاتي بعين. فمثلاً إذا كان لدينا بيانات على طلبة الجامعة
مثل علامة الرياض في السادة ومعدل تحصيله.

* يمكن دراسة هذه البيانات للاجابة على السؤالين:-

(أ) هل هناك علاقة بين المتغيرين.

(ب) إذا كان هناك علاقة بين المتغيرين فكيف يغير عنها بغيره.

* الارتباط الكمي:-

إذا كان لدينا n ملاحظات $X_1, \dots, X_n$ و

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ وكانت قيم الوسط الحسابي لهما هي $\bar{X}$ و $\bar{Y}$

على التوالي فإنه معامل الارتباط يرمز له بالرمز r هو

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

or

$$r_{xy} = \frac{\sum X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sqrt{(\sum X_i^2 - n \bar{X}^2)(\sum Y_i^2 - n \bar{Y}^2)}}$$

أهم خواص معامل الارتباط

① $r_{x,y} = 1$ ، $r_{y,x} = 1$

② $r = 1$: غاية الارتباط موجب (عالي جداً) (مثري)

$r = -1$: غاية الارتباط سالب (عالي جداً) (مكسب)

$r = 0$: لا يوجد ارتباط (X مستقل عن Y)

مثال: البيانات التالية تمثل كمية المعروضة من سلعة معينة وسعر الوحدة الواحدة منها، احسب معامل الارتباط بين الكمية المعروضة والسعر:

X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$
2	3	-2	-4	4	16	8
2	5	-2	-2	4	4	4
5	7	1	0	1	0	0
4	8	0	1	0	1	0
5	9	1	2	1	4	2
6	11	2	4	4	16	8
3	6	-1	-1	1	1	1
5	8	1	1	1	1	1
4	6	0	-1	0	1	0
$\Sigma X_i = 36$	$\Sigma Y_i = 63$			$\Sigma = 16$	$\Sigma = 44$	$\Sigma = 24$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{36}{9} = 4$$

$$r_{x,y} = \frac{24}{\sqrt{(16)(44)}} = 0.91$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y_i}{n} = \frac{63}{9} = 7$$

هناك علاقة قوية بين X و Y (علاقة طردية) (28)

انحدار (Regression)

هو أسلوب يتم فيه التنبؤ بمتوسط متغير عشوائي أو عدة متغيرات عشوائية اعتماداً على قيم مقاييس متغيرات عشوائية أخرى، له عدة أنواع مثل:-

- ① الانحدار الخطي البسيط :- يعني انه المتغير التابع (الاستجابة) Y يعتمد على متغير عشوائي X واحد، وتكون العلاقة بينهم علاقة خطية.
- ② الانحدار الخطي المتعدد :- يعني انه المتغير Y يعتمد على أكثر من متغير عشوائي مستقل (التوضيحي) X .
- ③ الانحدار غير الخطي :- اذا كانت العلاقة بين Y والمتغير المستقل X غير خطية كأن تكون من الدرجة الثانية أو علاقة أسية أو دوال مثلثية.
- ④ الانحدار اللوجستي.
- ⑤ انحدار بواسون.
- ⑥ الانحدار اللامعلي.
- ⑦ الانحدار شبه المعلي.

يتم في الدراسة احتمال الانحدار الخطي البسيط.

الانحدار الخطي البسيط :-

بعد تمثيل الأزواج العددية بالمستوى الاحداثي فصل على شكل الانشطار للبيانات فإذا كان الشكل خط مستقيم نقوم بتقدير خط انحدار Y على X بواسطة العلاقة :-

$$\hat{y} = a + b x$$

حيث $\hat{y}$ تمثل القيمة المتنبأ بها عندما تكون x معلومة.

و a تمثل المعلة المقدره بطريقة المربعات ادمون ك
خاصية الاصدار.

b تمثل المعلة المقدره بطريقة المربعات ادمون ك
ميل خط الاصدار.

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad , \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

مثال :- اذا كان لدينا الجدول الآتي :-

X	y	Xy	X ²
10	6	60	100
13	8	104	169
15	9	135	225
14	8	112	196
9	7	63	81
7	6	42	49
6	5	30	36
6	6	36	36
5	5	25	25
5	5	25	25
<u>Σ=90</u>	<u>Σ=65</u>	<u>Σ=632</u>	<u>Σ=942</u>

$$\hat{y} = a + b x$$

$$b = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{(10)(632) - (90)(65)}{(10)(942) - (90)^2}$$

$$= 0.36 = b$$

$$a = \frac{\sum \hat{y}_i - b \sum \hat{x}_i}{n} = \frac{65 - (0.36)(10)}{10}$$

$$= 3.26 = a$$

$$\hat{y} = 3.26 + 0.36x$$

تمثل معادلة خط
البيانات البسيط

إذا علمت أن قيمة $x = 16$ أوجد القيمة المتنبأ بها y

$$\hat{y} = 3.26 + 0.36(16)$$

$$= 9.02$$

واجب يس
البيانات لديك الجدول الآتي :-

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	13	12	10	7	8	6	5	2

المطلوب :-

① إيجاد معادلة خط البيانات البسيط

② تنبأ بقيمة y عندما $x = 3$ و $x = 15$

المعاملة

في العدد .

مضروب (مضروب العدد)

إذا كان n عدد صحيح غير سالب (n عدد طبيعي)، فإن

مضروب العدد (مضروب العدد) يرمز له بالرمز $n!$ أو L_n وحسب كالأتي.

$$L_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (1)$$

ex: L_6

$$L_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = ?$$

$$L_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = ?$$

هناك سبع عين القويض $n!$ حسب الحالة في الحل :

$$n! = n(n-1)! \quad \text{ex} \Rightarrow 6! = 6 \cdot 5!$$

$$n! = n(n-1)(n-2)! \quad \text{ex} \Rightarrow 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4!$$

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)} \quad \text{ex} \Rightarrow 6! = \frac{7!}{7} = \frac{7 \cdot 6!}{7} = 6!$$

ex: $0! = L_0 = 1$ ، ^{برهن ذلك} Prove that.

من خلال العلاقة $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$ فإن

$$0! = \frac{1!}{1} = 1$$

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 56$$

(الحل)

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$$

مثال: إذا كان $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$ فما هي قيمة n ؟

(الحل)

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 6 \Rightarrow n^2 - n = 6$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (n+2)(n-3) = 0$$

$$n = -2$$

$$n = 3$$

نلاحظ هنا
أن $n = -2$ ليس
محتملاً لأن عدد المراتب
لا يمكن أن يكون سالباً

للتحقق من ذلك

$$n = 3$$

$$\frac{3!}{(3-2)!} \Rightarrow \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

تبديل (Permutation)

هو عدد طرق الاختيار المرتبة التي يمكن تكوينها من عدد
اشياء بأخذ كلها او بعضها ويرمز له بالرمز $P(n, r)$
او P_r^n اي تبديل r عنصر من n من العناصر، وهو
صيغاً من صيغ العدد يستعمل كالمعامل التي يكون
نظام الترتيب مهم و التكرار غير مسموح وهناك حالات يكون التكرار
مسموح.

ليكن $r, n \in \mathbb{N}$ وان $r \leq n$ فان تبديل r
مأخوذة من n يكتب بالشكل الآتي:-

$$P_r^n = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال:- ما هو عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من كلمة ربح

$$P_3^3 = P(3, 3) = \frac{3!}{0!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

(الكل)

والكلمات هي (ربح ، ربح ، بحر ، حرب ، حبر ، ربح) .

مثال:- ما عدد طرق توزيع 5 اشخاص على 5 وظائف مختلفة
حيث لكل واحد منهم وظيفة واحدة.

$$P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1!} = 120$$

عدد الطرق الممكنة للتوزيع
(34)

بالإضافة - عدد قيم n إذا كان $P_2^n = 42$

$$P_2^n = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{(\cancel{n-2})!}$$

الكل

$$\therefore P_2^n = n(n-1) = 42$$

$$n^2 - n = 42 \Rightarrow n^2 - n - 42 = 0$$

$$(n-7)(n+6) = 0$$

$$\text{أو } n = 7$$

$$\text{أو } n = -6 \quad (\text{تجاهل كونها سالبة})$$

للتحقق

$$P_2^7 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = \underline{\underline{42}}$$

واجب بين

H.W. أ - ما هو عدد المركبات المختلفة المكونة من حرفين يمين

تشكيلها من هذه المركبة ABCD

Combination

التوافيق (التركيب)

تعرف بأنها عدد الطرق التي يتم فيها اختيار مجموعة جزئية من مجموعة كلية بغير النظر عن الترتيب (الترتيب غير مهم). والتكرار مسموح وتعتبر مبدأ من مبادئ العدد. رياضياً تحسب التوافيق وفقاً للعلاقة الآتية:-

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!} \text{ و } r \leq n$$

إذاً:-

n :- عدد أفراد المجموعة.
 r :- كيفية اخذ أفراد المجموعة.
 r, n كلاهما أعداد طبيعية.

مثال ١: نفرض لدينا هندوق يحتوي على أربع كرات ملونه همداء ، سوداء ، صفراء ، زرقاء ونريد سحب كرتين معاً من الهندوق معاً ماهي الحالات الممكنة؟

$n = 4$ (عدد الكرات)
 $r = 2$ (سحب كرتين)
 والترتيب غير مهم

$$C_r^n = C_2^4 = \frac{4!}{2! (4-2)!} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2!} = 6$$

الحالات الممكنة هي: (هراء، سوداء)
 (هراء، صفراء)
 (هراء، زرقاء)
 (سوداء، صفراء)
 (سوداء، زرقاء)
 (صفراء، زرقاء)

(حيث هنا لا يوجد أهمية للترتيب كون الكرتين يسعيان معاً)

مثال ١ - ما هي عدد الطرق الممكنة لاختيار ٣ أشخاص من أصل ١٠ أشخاص لشغل ٣ وظائف بحيث ان الشخص يمكن ان يشغل أكثر من وظيفة.

(الترتيب غير مهم) $r = 3$, $n = 10$

$$C_3^{10} = \frac{10!}{3! (10-3)!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{7!}} = 120 \text{ طريقة}$$

ملاحظة -

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

$$\frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)! (\cancel{n} - \cancel{n} + r)!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

ل ٣- إذا كان لدينا $C_2^n = 3$ ماهي قيمة الـ n

$$\frac{n!}{2! (n-2)!} = 3 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \cdot 1 (n-2)!} = 3$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 6 \Rightarrow n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) = 0$$

إما

$$n = 3$$

أو

$$n = -2 \text{ (تسهل لأنها سالبة)}$$

كون الـ n عدد صحيح موجب

وللتحقق من ذلك

$$C_2^3 = \frac{3!}{2! (3-2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2! \cdot 1!} = \underline{\underline{3}}$$

واجب ① :- ما عدد الأعداد التي رمز كل منها مكون من أربع مراتب مأخوذة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ بحيث

(a) التكرار مسموح في مراتب العدد .

(b) التكرار غير مسموح في مراتب العدد .

② برهن أن :-

$$\frac{C_r^n}{C_{r-1}^n} = \frac{(n-r+1)}{r} \quad (38)$$

الاحتمالية: هي عبارة عن مقياس لعدم مؤكدية وقوع حدث ما ، يُقاس الاحتمال بانه رقم بين الصفر والواحد

0 1/4 1/2 1

يسير الصفر الى الاحتمال الواحد يسير الى التأكيد كلما زاد احتمال الحدث زادت امكانيه وقوعه
مثال على ذلك: رمي العملة المعدنية (صورة، كتابة)

التجربة العشوائية: هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها قبل امرارها ويمكن تعرف بشكل

مسبق جميع النتائج الممكنة. مثال: رمي العملة المعدنية تعرف قبل امرار الرمي فان النتيجة إما صورة او كتابة.

فضاء العينة (الحالة) : sample (state) space

هو كل (جميع) النتائج الممكنة في التجربة. ويرمز لها بالرمز S

مثال: بالرمز الى العملة المعدنية فان فضاء الحالة هي:

$$S = \{ H, T \} \quad \begin{array}{l} H : \text{صورة} \\ T : \text{كتابة} \end{array}$$

حدث (Event) : هي عنصر اربعة عناصر
 في فضاء العينة (الحالة) أو مجموعة فرعية من فضاء العينة
 مثال:- رمي حجر النرد فإن فضاء العينة (الحالة)
 هي $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الحدث

وان الحدث يكون على سبيل المثال:-

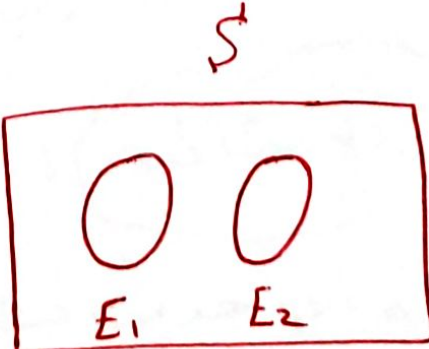
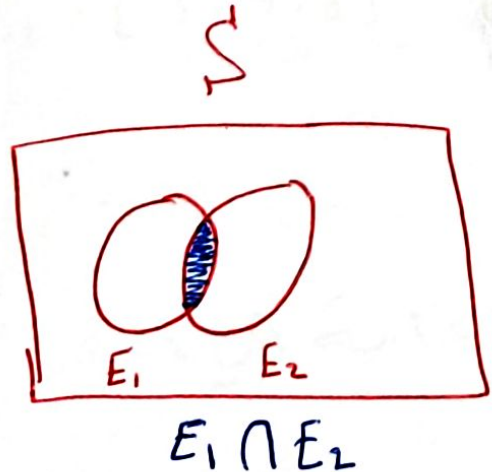
$A = \{1, 4, 5\}$ or $A = \{5\}$
 او عدة عناصر عنصر

انواع الكوارث :-

Mutually Exclusive

① الكوارث المتنافية :- وهي الكوارث التي لا يمكن
 وقوعها في آن واحد لان وقوع احدها يمنع وقوع
 الكوارث الاخرى

مثال:- يقال ان الحادثتين (E_1, E_2) باسرها حادثتين
 متنافيتين اذا استحال حدوثها معاً.



تعبير مجموعة خالية

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ وعليه يمكن القول بأن الحادثتين E_1, E_2 حادثتين متافيتين.

⑤ **الحوادث المستقلة** :- يقال بأن الحادثتين (E_1, E_2) بأنهما مستقلتان إذا كان حدوث أحدهما لا يعتمد على حدوث الآخر.

٣- **الحوادث غير المستقلة (المتعمدة)** :-
يقال بأن الحادثتين (E_1, E_2) بأنهما معتمدتان إذا كان حدوث أحدهما يعتمد على حدوث الآخر.

ملاحظة :- الحدث الذي يتكون من عنصر واحد يسمى بالحدث البسيط .
 $E_1 = \{ 5 \}$ ، حدث بسيط : E_1

• الحدث الذي يتكون من عنصرين أو أكثر يسمى بالحدث المركب .
حدث مركب : $E_2 = \{ 3, 4, 8 \}$

* **قوانين الاحتمالية** :-

احتمالية أي حدث بظهوره عامة هي :-

$$P(E) = \frac{n \xrightarrow{\text{الجزء}}}{N \xrightarrow{\text{الكل}}} = \frac{n(E)}{S} = \frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث } E}{\text{فضاء الحالة الكلي}}$$

$P \Rightarrow$ الاحتمال (Probability)

$E \Rightarrow$ الحدث (Event)

$S \Rightarrow$ فضاء الحالة (اللوحة) (sample (state) space)

وبصورة عامة فإن:

$$0 \leq P_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

مثال ١ - رميت قطعة نقود معدنية مرة واحدة احسب احتمال ان يكون الوجه الظاهر كتابة (T). فضاء الحالة

$$S = \{ \underset{\text{صورة}}{H}, \underset{\text{كتابة}}{T} \}$$

$$P(T) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الوجه كتابة}}{\text{فضاء الحالة}} = \frac{n}{N} = \frac{1}{2}$$

⑤ احتمال ان يكون الوجه الظاهر صورة (H)

طريقة أولى

$$P(H) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الوجه صورة}}{\text{فضاء الحالة}} = \frac{n}{N} = \frac{1}{2}$$

طريقة ثانية

بما ان مجموع الاحتمال الحوادث يساوي واحد فإن:

$$P(T) + P(H) = 1 \Rightarrow P(H) = 1 - P(T) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(42)

١٤٣٥ :- رُمِّيتَ قِطْعَةٌ نَفَقَةٍ مَعْدِينِهِ مَرَّتَيْنِ . احسب
احتمال

- ١- ان يكون الوجه الظاهر صورة .
- ٢- ان يحتوي على كتابة .
- ٣- ان يحتوي على صورتين .

(الحل)

لنمثل فضاء الحالة (العينة) نستخدم مخطط الشجرة
(Tree Diagrams)



$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

فترض ان E_1 : يمثل حدث ان يكون الوجه الظاهر صورة H .

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الوجه صورة H}}{S} = \frac{1}{4}$$

E_2 : يمثل حدث انه يحتوي على كتابة T .

$$P(E_2) = \frac{2}{4}$$

E_3 : يمثل حدث ان يحتوي على صورتين .

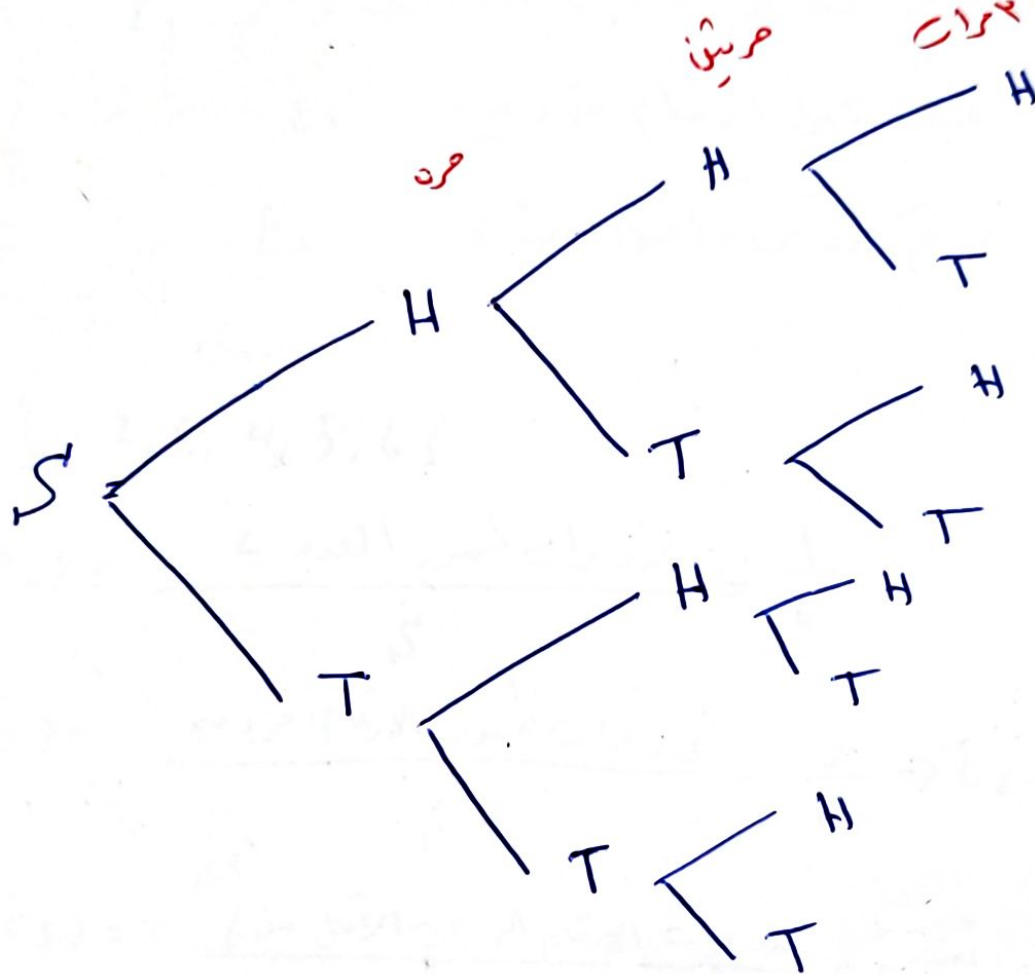
$$P(E_3) = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i=1}^3 P(E_i) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \\ = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

(343)

- ١٣- رميت قطعة نقود ثلاث مرات. احسب احتمال
- ١- ان يكون الوجه الظاهر كتابة E_1
 - ٢- ان يحتوي على الاقل صورتين E_2
 - ٣- ان يحتوي على صورة واحدة E_3

(الحل) لتمثيل فضاء الحالة (العينة) تقدم مخطط الشجرة.



$$S' = \{ (H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T) \}$$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الوجه كتابة}}{S} = \frac{E_1 = (T, T, T)}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P(E_2) = \frac{4}{8} \Rightarrow E_2 = \{ (H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H) \}$$

$$P(E_3) = \frac{3}{8} \Rightarrow E_3 = \{(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T)\}$$

$$\sum_{i=1}^3 P(E_i) = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

مثال ٤ :- رمي زهر الذر مرة واحدة. احسب احتمال :

١- ان يكون الرقم الظاهر عبارة عن العدد ٢ . E_1

٢- ان يكون الرقم الظاهر عبارة عن ارقام فردية . E_2

٣- ان يكون الرقم الظاهر عبارة عن ارقام زوجية . E_3

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(الكل)

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد مرات ظهور العدد 2}}{S} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_2) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الأرقام فردية}}{S} = \frac{3}{6} \Rightarrow E_2 = \{1, 3, 5\}$$

$$P(E_3) = \frac{\text{عدد مرات ظهور الأرقام الزوجية}}{S} = \frac{2}{6} \Rightarrow E_3 = \{2, 4, 6\}$$

واجب يسأل (١) - رمي زهر الذر مرتين احسب احتمال ان يكون مجموع الرقمين يساوي عدد فردي .

(٢) اذا كان فضاء الحاله $S = \{0, 1, 2, 3\}$ وان

$$P(0) = \frac{1}{2}, \quad P(1) = \frac{1}{4}, \quad P(2) = \frac{1}{8}$$

نفرض ان $F = \{0, 3\}$, $E = \{2, 3\}$ احسب

$$P(E), P(E \cap F)$$

(٤٥)

قوانين الاحتمالات

1- $P(\emptyset) = 0$

2- For every event A , $0 \leq P(A) \leq 1$ لا يمكن ان تكون
سالبة

3- $P(S) = 1$

4- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اذا ان A, B حادثات

اذا كانت

مصادف متنافية

5- if A and B are mutually exclusive events, then:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(\emptyset)$$

$$= P(A) + P(B) - 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

اذا كانت

مصادف مستقلة

6- if A and B are independent events, then

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - [P(A) \cdot P(B)]$$

7. ^{اذا كانت} if A and B are ^{مترتبة} dependent events, then ^{مصادرات}

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ P(A|B) \cdot P(B) & P(B|A) \cdot P(A) \end{array}$$

8. ^{اذا كانت} if $A_1, A_2, A_3, \dots$ are ^{من سلسلة} sequence of mutually ^{مترتبة} exclusive events, then:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

$$- \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{\text{zero}} - \underbrace{P(A_1 \cap A_3)}_{\text{zero}} - \dots$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

9. for every event $A \subset S$

$$\underline{P(A^c) = 1 - P(A) \text{ or } P(A') = 1 - P(A)}$$

قانون المبر (المكمل) complement law

$$A \cup A^c = S$$

$$P(A) + P(A^c) = P(S)$$

$$\therefore P(S) = 1$$

$$P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

10.

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c)$$

$$P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B)$$

الاحتمالية الشرطية Conditional probability

إذا كانت A, B حادثتين معرفتين في فضاء العينة S
فإن احتمالية حدوث الحادثة A بشرط أن الحادثة B قد
حدثت تعبراً (تسمى الاحتمالية الشرطية لحدوث الحادثة A
معطى أن الحادثة B قد حدثت) وكتب بحالات

$A|B$

معطى دائماً
(معلوم)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

دائماً نقسم على المعلوم (أي ما بعد |)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

حتميات الاحتمالية الشرطية:

$$1. 0 \leq P(A|B) \leq 1 \text{ or } P(B|A)$$

$$2. P(\Omega|B) = 1$$

حوادث متنافية

3. if A and B are mutually exclusive events

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = 0$$

حوادث مستقلة

4. if A and B are independent events

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

5. $P(A|B) + P(A^c|B) = 1$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

البرهان
نأخذ الطرف
اليسار

$$\Rightarrow \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

Since A and B are independent events, ^{صوالت مستقلة} Then

$$\frac{P(A) \cdot P(B) + P(A^c) \cdot P(B)}{P(B)}$$

$\therefore P(A^c) = 1 - P(A)$, ^{فإن} then

$$\frac{P(A) \cdot P(B) + [1 - P(A)] \cdot P(B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{P(A)} \cdot \cancel{P(B)} + \cancel{P(B)} - \cancel{P(A)} \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = 1$$

نظرية ١

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)}$$

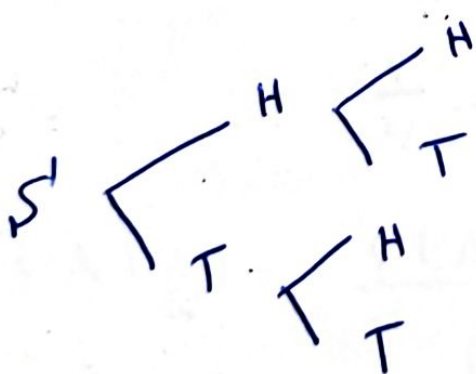
$$\Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B) \cup P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

مثال: رمي شطرنج قطعة نقود مرتين، فإذا علمت أنه الشطرنج قد حصل على الأقل صورية واحدة، ما هو احتمال أن يكون الشطرنج قد حصل على صوريين



$$S' = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

$$A = \{(H, H), (H, T), (T, H)\}$$

$$B = \{(H, H)\}$$

$$P(A) = P(H, H) + P(H, T) + P(T, H)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = P(H, H) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(H, H) = \frac{1}{4}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}}{\cancel{\frac{1}{4}}} = 1$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

المطلوب الاسئلة
بالسؤال

* قوانين متعلقة عن المبدأ (المثل)

$$P(A^c | B) = 1 - P(A | B)$$

$$P(A^c | B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= 1 - P(A | B)$$

$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$$

مثال - يعمل لدى إحدى الشركات ٥٠ سائق ، والمعدل
إتجاه يسير فئات اعمار السواق وعدد المخالفات
المردية لسنة كاملة ، فإذا علمنا ان A_i تمثل الفئة
العمرية للسائق حيث ($i = 1, 2, \dots, 5$) وان B تمثل المخالفات
المردية التي ارتكبها السائق i ، احسب الاحتمالات
الآتية :

$$① P(A_i \cap B)$$

$$② P(B)$$

$$③ P(A_i | B)$$

	β			
	المجموع	غير مخالف	مخالف	المخالفات الإحصائية
$\Sigma A_1 \rightarrow$	12	8	4	أقل من 25 سنة A_1
$\Sigma A_2 \rightarrow$	33	24	9	أقل من 45 سنة A_2
$\Sigma A_3 \rightarrow$	15	14	1	أكثر من 45 سنة A_3

المجموع الكلي 60

$\Sigma = 46$
غير مخالف

$\Sigma = 14$
مخالف ΣB

$$P(A_1) = \frac{12}{60}$$

$$P(A_2) = \frac{33}{60}, P(A_3) = \frac{15}{60}$$

الحل

$$\textcircled{1} P(A_i \cap B) \Rightarrow P(A_1 \cap B) = \frac{4}{60}$$

$$P(A_2 \cap B) = \frac{9}{60}$$

$$P(A_3 \cap B) = \frac{1}{60}$$

$$\textcircled{2} P(B) = \frac{14}{60} \quad \text{or} \quad P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

$$\frac{4}{60} + \frac{9}{60} + \frac{1}{60} = \frac{14}{60}$$

مطلوب المضامض

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{60} = \frac{60 - 14}{60} = \frac{46}{60}$$

غير مخالف

$$\text{or} = \frac{\Sigma \text{غير مخالف}}{60} = \frac{46}{60}$$

$$\textcircled{3} \quad P(A_i | B)$$

$$\Rightarrow P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{\cancel{60}}}{\frac{14}{\cancel{60}}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow P(A_2 | B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{\cancel{60}}}{\frac{14}{\cancel{60}}} = \frac{9}{14}$$

$$\Rightarrow P(A_3 | B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{\cancel{60}}}{\frac{14}{\cancel{60}}} = \frac{1}{14}$$

* مطالب إضافية لهذا الدرس:

$$P(A_i^c)$$

$$\Rightarrow P(A_1^c) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{12}{60} = \frac{48}{60}$$

$$\Rightarrow P(A_2^c) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{33}{60} = \frac{27}{60}$$

$$\Rightarrow P(A_3^c) = 1 - P(A_3) = 1 - \frac{15}{60} = \frac{45}{60}$$

$$P(A_i \cup B)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A_1 \cup B) &= P(A_1) + P(B) - P(A_1 \cap B) \\ &= \frac{12}{60} + \frac{14}{60} - \frac{4}{60} = \frac{22}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A_2 \cup B) &= P(A_2) + P(B) - P(A_2 \cap B) \\ &= \frac{33}{60} + \frac{14}{60} - \frac{9}{60} = \frac{38}{60} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A_3 \cup B) = P(A_3) + P(B) - P(A_3 \cap B)$$

$$= \frac{15}{60} + \frac{14}{60} - \frac{1}{60} = \frac{28}{60}$$

$$P(A_i^c | B)$$

$$\Rightarrow P(A_1^c | B) = 1 - P(A_1 | B)$$

$$= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow P(A_2^c | B) = 1 - P(A_2 | B)$$

$$= 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow P(A_3^c | B) = 1 - P(A_3 | B)$$

$$= 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

Bayes Theorem (نظرية بايز)

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ حوادث معرفة في فضاء
الحالة Ω وكانت B اي حادثة اخرى في فضاء
الحالة Ω فإن :-

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{P(B | A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B | A_n) \cdot P(A_n)}$$

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)}$$

مثال :- ثرثرة صناديق تحتوي على كرات بالشكل
الآتي :

الصندوق A يحتوي على ٢ كرات حمراء و ٥ كرات بيضاء
الصندوق B يحتوي على ٢ كرات حمراء و ١ كرة بيضاء
الصندوق C يحتوي على ٢ كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء
فإذا سحبت كرة عشوائية وكانت حمراء ما هو احتمال
ان تكون من الصندوق A

3	R
5	W

A

2	R
1	W

B

2	R
3	W

C

(کل)

احتمال اختیار ای مشرق ہو :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(A | R) = \frac{P(R | A) \cdot P(A)}{P(R | A) \cdot P(A) + P(R | B) \cdot P(B) + P(R | C) \cdot P(C)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \underline{\underline{0.26}}$$

مطلوبہ اضافی ① اذا سحبت كره عشوائيه وكانت بيضاء ما هو احتمال ان تكون من المجموعة C .

$$P(C | W) = \frac{P(W | C) \cdot P(C)}{P(W | A) \cdot P(A) + P(W | B) \cdot P(B) + P(W | C) \cdot P(C)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \underline{\underline{0.38}}$$

اذا سميت كرة عشوائية وكانت هراء حاسر احتمال ان تكون
من الصفقة B.

$$P(B|R) = \frac{P(R|B) \cdot P(B)}{P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) + P(R|C) \cdot P(C)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \underline{\underline{0.46}}$$

مثال ١ - صندوقين تحتوي على كرات بالشكل التالي:

4 black
6 white

A

3 b
7 w

B

- ① ما هو احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء .
② اذا سميت كرة عشوائية وكانت سوداء ، ما هو احتمال ان
تكون من الصندوق B .

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

الكل

$$\textcircled{1} P(w) = P(w \cap A) + P(w \cap B)$$

$$= P(w|A) \cdot P(A) + P(w|B) \cdot P(B)$$

(59)

$$\Rightarrow \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} = \underline{0.65}$$

$$\textcircled{2} P(B|b) = \frac{P(b|B) \cdot P(B)}{\underbrace{P(b|A) \cdot P(A) + P(b|B) \cdot P(B)}_{P(b)}}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{0.15}{0.35} = \underline{0.43}$$

$$P(w^c)$$

مطلوبه اجابتي :-

$$P(w^c) = 1 - P(w) \Rightarrow 1 - 0.65 = \underline{0.35} = P(b)$$

$$P(B^c|b)$$

$$P(B^c|b) = 1 - P(B|b) \\ = 1 - 0.43 = 0.57$$

١. شركة احذية لها ثلاثة مصانع انتاجية وهي كالاتي :-
 ① المصنع الاول ينتج $\frac{1}{4}$ من انتاج الشركة وفيه $\frac{1}{2}$ معيب
 ② المصنع الثاني ينتج $\frac{1}{3}$ من انتاج الشركة وفيه $\frac{1}{4}$ معيب
 ③ المصنع الثالث ينتج $\frac{1}{4}$ من انتاج الشركة وفيه $\frac{1}{4}$ معيب
 فإذا اشترى حذاء من انتاج هذه الشركة فما هو احتمال ان يكون ① معيب .

② غير معيب
 ③ اذا كان الحذاء معيب ما هو احتمال ان يكون قد صنع في المصنع الاول او الثاني او الثالث .

الحل

ترمز للبطانة المعيبة بـ D
 ترمز للبطانة غير المعيبة بـ D' أو D^c

المصنع الاول D'

$$P(A_1) = 0.40$$

$$P(A_2) = 0.35$$

المصنع الثاني

$$P(A_3) = 0.25$$

المصنع الثالث

$$P(D|A_1) = 0.02, \quad P(D|A_2) = 0.01$$

$$P(D|A_3) = 0.04$$

$$\therefore P(D) = P(D|A_1) \cdot P(A_1) + P(D|A_2) \cdot P(A_2) + P(D|A_3) \cdot P(A_3)$$

$$= (0.02)(0.40) + (0.01)(0.35) + (0.04)(0.25)$$

$$\Rightarrow P(D) = 0.0125$$

احتمالية العيب

② احتمالية غير العيب

$$\therefore P(D) + P(D^c) = 1$$

$$\therefore P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - 0.0125 = 0.9875$$

③

$$P(A_1|D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A_1) \cdot P(A_1)}{P(D)}$$

$$= \frac{(0.02)(0.40)}{0.0125} = 0.64$$

$$P(A_2|D) = \frac{P(D|A_2) \cdot P(A_2)}{P(D)}$$

$$= \frac{(0.01)(0.35)}{0.0125} = 0.28$$

(6.2)

$$P(A_3|D) = \frac{P(D|A_3) \cdot P(A_3)}{P(D)} = \frac{(0.04)(0.25)}{0.0125} = 0.465$$

(الملاحظة ١٨)

المتغير العشوائي (Random variable (r.v.))

يعرف على أنه قيم حقيقية معرفة في فضاء الحالة (العينة) (Ω) ويُقسم إلى نوعين :-

① المتغير العشوائي المتقطع (Discrete random variable)

② المتغير العشوائي المستمر (Continuous random variable)

* المتغير العشوائي المتقطع :

يسمى المتغير العشوائي بالمقطع إذا كانت القيم

محددة وقابلة للعد (countable) مثال :

$$X = 1, 2, 3, \dots$$

(H, T) العملة المعدنية أو

(1, 2, ..., 6) سيارتي فراري

* المتغير العشوائي المستمر :

يسمى المتغير العشوائي (r.v.) بالمستمر إذا كانت

القيم غير محددة وغير قابلة للعد مثال :

$$-\infty < X < \infty$$

من فترة

مبدأ التردد ، ٤٧°

(63)

* دالة الكتلة الاحتمالية (Probability mass function)

إذا كان المتغير العشوائي متقطع فإن الدالة الاحتمالية تسمى بدالة الكتلة الاحتمالية (P.m.f) خصائصها:

$$f(x) = P(X=x), \quad x \in S'$$

$$i. f(x) = P(X=x) \geq 0$$

$$ii. \sum_{\text{all } x} f(x) = \sum_{\text{all } x} P(X=x) = 1$$

* دالة الكثافة الاحتمالية (Probability density function)

إذا كان المتغير العشوائي مستمر فإن الدالة الاحتمالية تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية (P.d.f)

$$i. f(x) = P(X=x) \geq 0$$

$$ii. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

مثال ١: افترض ان X متغير عشوائي بالقيم

$R = \{1, 2, 3, \dots\}$ وان دالة الكتلة الاحتمالية (P.m.f)

X هي كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x \in R \\ 0 & \text{و.ع.} \end{cases}$$

إذا كانت $A = \{X: 1, 3, 5, \dots\}$ ، حدد $P(X \in A)$

الكل

$$P(X \in A) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots \right]$$

متوالية هندسية غير منتهية

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{2}{3}$$

مثال ٤: بالرجوع الى مثال رمي العملة المعدنية مرتين

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

تعرض ان X عبارة عن متغير عشوائي يقيم ايجارده من فلال ك
ومحالاته :-

عدم ظهور
الصورة

$$X=0 = \{TT\}$$

ظهور الصورة
مرة

$$X=1 = \{HT, TH\}$$

ظهور الصورة
مرتين

$$X=2 = \{HH\}$$

وعلیه قیام دالة الكتلة الاحتمالية (P.m.f) هي كالآتي :-

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{4} & X=0 \\ \frac{1}{2} & X=1 \\ \frac{1}{4} & X=2 \end{cases}, \sum_{X=0}^2 P(X) = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

مثال ٢- بالرمز الى مثال رمي حجر الترد مرة واحدة

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

وبافتراض X عبارة عن متغير عشوائي يتم ايجاده من خلال
كم وعلیه قیام

$$P(X)$$

$$X=1 \quad \frac{1}{6}$$

$$X=2 \quad \frac{1}{6}$$

$$X=3 \quad \frac{1}{6}$$

$$X=4 \quad \frac{1}{6}$$

$$X=5 \quad \frac{1}{6}$$

$$X=6 \quad \frac{1}{6}$$

دالة الكتلة الاحتمالية لـ X هي
كالآتي :-

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & X=1 \\ \frac{1}{6} & X=2 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{6} & X=6 \end{cases}$$

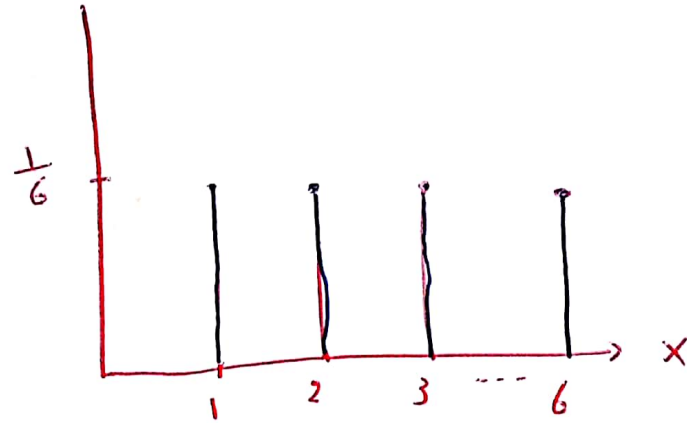
or

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & X=1, \dots, 6 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

(66)

بعلية فانه شكل دالة الكتلة الاحتمالية تكون كالآتي:-

$$P(x_i) = P(X=x_i)$$



مثال ٤:- المتغير العشوائي X له تردد مرتين، افترض ان X متغير عشوائي

يتمثل مجموع الرصيد الظاهري اي ان $X(a,b)=a+b$ وافرض

ان Y يمثل متغير عشوائي يمثل القيمة الفعلية للرصيد الظاهري
 $Y(a,b)=\max(a,b)$ المطلوب: ايجاد دالة الكتلة الاحتمالية
 $(P.M.F)$ للمتغيرين العشوائيين X, Y وارسمهما.

الحل
 من خلال حفظ الشجرة نجد فضاء الحالة (Ω) ، وعليه فانه
 فضاء الحالة (Ω) يكون كالآتي:-

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

(6.7)

$$X(\overset{a}{1}, \overset{b}{1}) = \overset{a+b}{2}, \dots, X(\overset{a}{6}, \overset{b}{6}) = \overset{a+b}{12}$$

$$\therefore R_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$f(2) = P(X=2) = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$f(3) = P(X=3) = P\{(1,2), (2,1)\} = \frac{2}{36}$$

$$f(4) = P(X=4) = P\{(3,1), (1,3), (2,2)\} = \frac{3}{36}$$

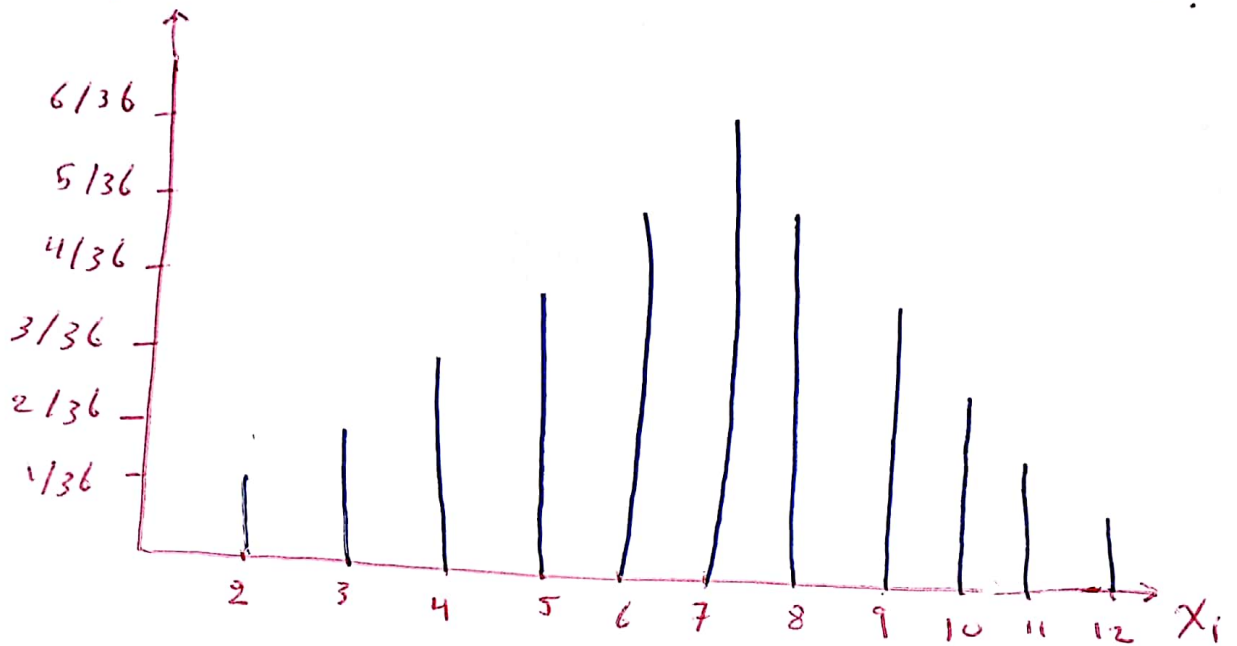
$$f(5) = P(X=5) = P\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} = \frac{4}{36}$$

$$f(6) = \frac{5}{36}, f(7) = \frac{6}{36}, \dots, f(12) = \frac{1}{36}$$

وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X تكون كالآتي :-

$$f(x_i) = P(X=x_i) = \begin{cases} \frac{1}{36} & X=2 \\ \frac{2}{36} & X=3 \\ \frac{3}{36} & X=4 \\ \frac{4}{36} & X=5 \\ \frac{5}{36} & X=6 \\ \frac{6}{36} & X=7 \\ \frac{5}{36} & X=8 \\ \frac{4}{36} & X=9 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{36} & X=12 \end{cases} \quad (68)$$

سنگم دالة الكتلة الاحتمالية لـ X هي :-



$$Y(a, b) = \max(a, b) \quad \dots \quad Y(a, b) = \max(a, b)$$

$$R_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$f(1) = P(Y=1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$f(2) = P(Y=2) = P(\{(1,2), (2,1), (2,2)\}) = \frac{3}{36}$$

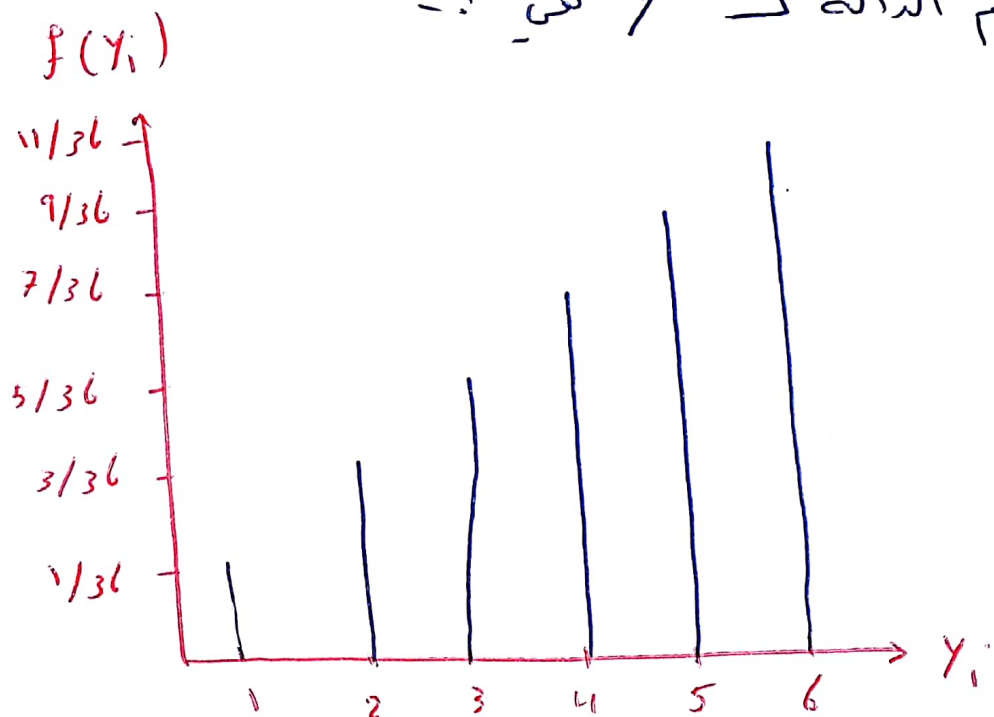
$$f(3) = P(Y=3) = P(\{(1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2)\}) = \frac{5}{36}$$

$$f(4) = P(Y=4) = \frac{7}{36}, \quad f(5) = \frac{9}{36}, \quad f(6) = \frac{11}{36}$$

وعليه فإن دالة الكتلة الاحتمالية لـ Y تكون كالآتي :-

$$f(y_i) = p(Y=y_i) = \begin{cases} \frac{1}{36} & y_i = 1 \\ \frac{3}{36} & y_i = 2 \\ \frac{5}{36} & y_i = 3 \\ \frac{7}{36} & y_i = 4 \\ \frac{9}{36} & y_i = 5 \\ \frac{11}{36} & y_i = 6 \end{cases}$$

رسم الدالة لـ y هي :-



مثال: إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X

$$f(x) = c^{x+1}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < c < 1$$

المطلوب جد قيمة c .

(الكل) لا يحد قيمة الثابت c من استخدام الخاصية الآتية:

$$\sum_{\text{all } x} f(x) = 1$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} c^{x+1} = 1 \Rightarrow c^{0+1} + c^{1+1} + c^{2+1} + \dots = 1$$

$$\Rightarrow c + c^2 + c^3 + \dots = 1 \Rightarrow c [1 + c + c^2 + \dots] = 1$$

متوالية هندسية غير منتهية

$$\Rightarrow c \times \left[\frac{1}{1-c} \right] = 1$$

$$\Rightarrow c = 1 - c \Rightarrow c + c = 1 \Rightarrow 2c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

مثال ٢ - إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي كالآتي :-

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{23}$

المطلوب إيجاد كل من $P(X \leq 1)$ و $P(1 < X \leq 3)$

الكل

$$P(1 < X \leq 3) = \sum_{x=2}^3 f(x)$$

$$= f(2) + f(3) = \frac{5}{23} + \frac{2}{23} = \frac{7}{23}$$

$$P(X \leq 1) = \sum_{x=-4}^1 f(x)$$

$$= f(-4) + f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1)$$

$$= \frac{1}{23} + \frac{2}{23} + \frac{2}{23} + \frac{3}{23} + \frac{3}{23} + \frac{4}{23}$$

$$= \frac{15}{23}$$

طريقة ثانية
أو

$$P(X \leq 1) = 1 - P(X > 1)$$

$$= 1 - \sum_{x=2}^4 f(x) \Rightarrow 1 - [f(2) + f(3) + f(4)]$$

$$\Rightarrow 1 - \left[\frac{5}{23} + \frac{2}{23} + \frac{1}{23} \right]$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{8}{23} = \frac{15}{23}$$

(72)

أمثلة مستوى عن المتغير العشوائي المستمر
مثال: إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي كالآتي:-

$$f(x) = \begin{cases} c x(2-x) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{و.و.} \end{cases}$$

المطلوب ① إيجاد قيمة c ② $P(X > 1)$

الحل ① $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 c x(2-x) dx = 1$

$$\Rightarrow c \int_0^2 (2x - x^2) dx \Rightarrow c \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow c \left[\left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 \right] = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

وعليه فإن دالة $(p.d.f)$ لـ X تكون كالآتي:-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} x(2-x) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{و.و.} \end{cases}$$

② $P(X > 1)$

$$\int_1^2 f(x) dx \Rightarrow \frac{3}{4} \int_1^2 (2x - x^2) dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \Rightarrow \frac{3}{4} \left[\left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right]$$

(73)

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right] \Rightarrow \frac{3}{4} \left[\frac{2}{3} \right] = \left(\frac{1}{2} \right)$$

واجب H.W. إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X هي -

$$f(x) = \begin{cases} k x e^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & \text{و.ه.} \end{cases}$$

المطلوب ① اوجد قيمة الثابت k ② احس $P(X < 3)$

ملاحظة إذا كان المتغير العشوائي مستمر فإياه المساواة تكون غير مهمة في حدود الاحتمالية أي يعني

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

مثال - إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{8} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{و.ه.} \end{cases}$$

المطلوب ① هل الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية؟

② اوجد احتمال

$$P(X < 3.5)$$

$$P(2.4 < X < 3.5)$$

جواب

الحل

$$\textcircled{1} \int_2^4 f(x) dx = ?$$

$$\Rightarrow \int_2^4 \left(\frac{x+1}{8}\right) dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{16} + \frac{x}{8} \right]_2^4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{16}{16} + \frac{4}{8} \right) - \left(\frac{4}{16} + \frac{2}{8} \right)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$\therefore f(x)$ is p.d.f دالة كثافة احتمالية.

$$\textcircled{2} P(X < 3.5)$$

$$\int_2^{3.5} \left(\frac{x+1}{8}\right) dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{16} + \frac{x}{8} \right]_2^{3.5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{12.25}{16} + \frac{3.5}{8} \right) - \left(\frac{4}{16} + \frac{2}{8} \right)$$

$$\Rightarrow (0.77 + 0.44) - 0.5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{0.71}}$$

(75)

مثال: نفرض ان المتغير العشوائي X له دالة كثافة احتمالية معرفة كالتالي:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 1 < x < \infty$$

or $x > 1$

$$A = \{x : 3 < x < 9\}$$

$$B = \{x : 5 < x < 12\}$$

تبادلاً على ان:

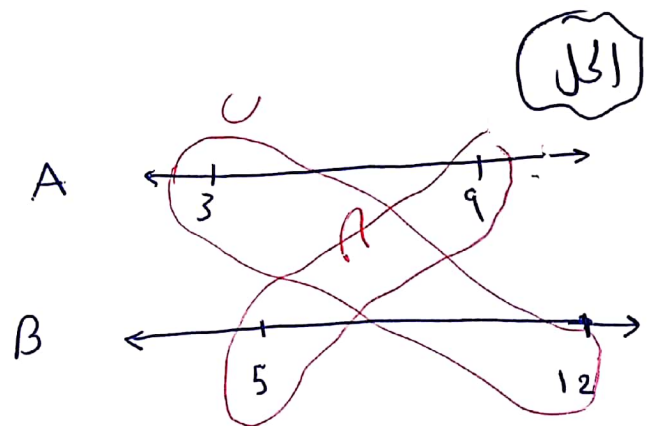
احسب $P(B)$ ، $P(A)$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(5 < x < 9)$$

$$P(A \cup B) = P(3 < x < 12)$$

$$P(A) = P(3 < x < 9)$$

$$P(B) = P(5 < x < 12)$$



$$P(A \cap B) = \int_5^9 \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{x} \Big|_5^9 \Rightarrow -\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \underline{0.089}$$

$$P(A \cup B) = \int_7^{12} \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{x} \Big|_7^{12} = -\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{7}\right]$$

$$P(A) = \int_7^9 \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{x} \Big|_7^9 = \underline{0.22} \quad = 0.25$$

$$P(B) = \int_5^{12} \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{x} \Big|_5^{12} = \underline{0.11}$$

المخاطبة ٢

دالة التوزيع التراكمية (التجميعية)
Cumulative distribution function (c.d.f.)

تعرف هذه الدالة بأنها قيمة الاحتمال المتراكم لغاية
قيمة معطاة من قيم المتغير العشوائي X ، المعرف على
فضاء الحالة (العينة) Ω ويرمز لهذه الدالة بالشكل
 $F(x)$ وتعرف رياضياً كما يلي :-

$$F(x) = \Pr(\underbrace{X}_{r.v.} \leq x)$$

* خواص دالة التوزيع التراكمية (التجميعية) (c.d.f.)

● عبارة عن دالة غير متناقصة (مستمرة بالتزايد)

أي أنه إذا كانت $a \leq b$ فإن $F(a) \leq F(b)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad \text{or} \quad F(\infty) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{or} \quad F(-\infty) = 0$$

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad \text{وهذا يعني أن}$$

ملاحظة - إذا كان المتغير العشوائي X متقطع له
دالة الكتلة الاحتمالية (p.m.f) (f) فإن الدالة التراكمية
 F تعرف كالآتي :-

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

$$\text{or } \sum_{t=-\infty}^x f(t)$$

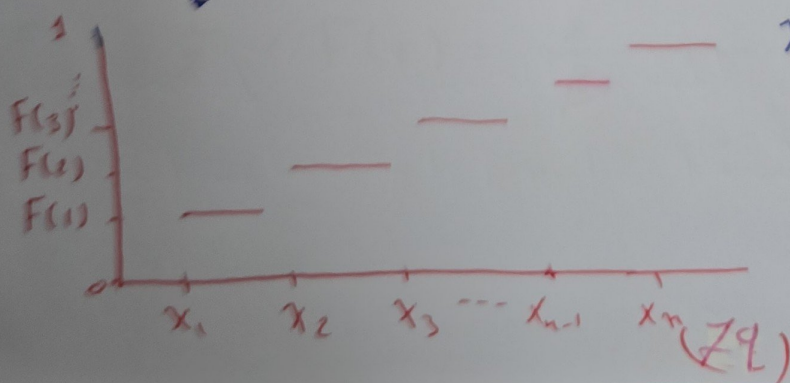
وإذا كان المتغير العشوائي X مستمر له دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) f فإن الدالة التراكمية F تعرف كالآتي :-

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

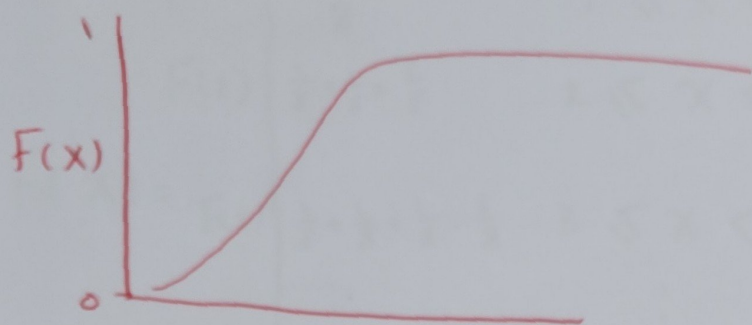
وعليه فإن شكل الدالة $F(x)$ في حالة المتغير العشوائي المتقطع يكون على شكل درج (مدرج) وصولاً إلى القيمة $F(x)$ المساوية للواحد ($F(x) = 1$) ، مثال : افرض لدينا

دالة الكتلة الاحتمالية (p.m.f) اوجد $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) & x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & x_n \leq x < \infty \end{cases}$$



المتغير العشوائي X مستمر فإن دالة التوزيع التراكمية (c.d.f.) تباين عن صحتي وحالاته.



① $Pr(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

* أقلية توفيقية.

مثال ١ - إذا كان X متغير عشوائي له دالة الكتلة الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = 1, 2, 3, \dots, 8 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

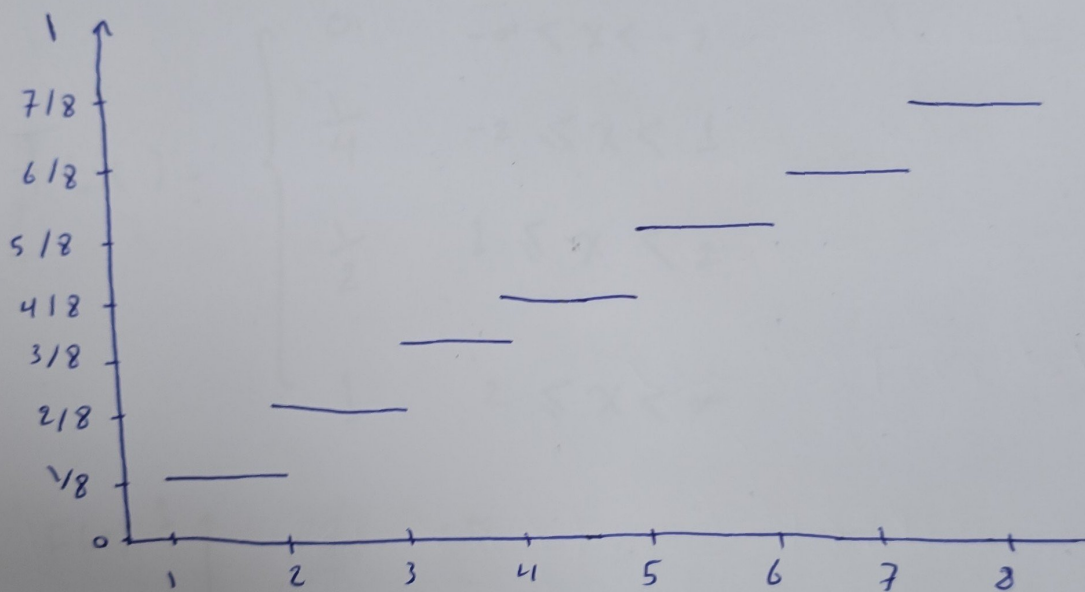
المطلوب: إيجاد $F(x)$ ورسمها.

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^x f(t) = \frac{1}{8} x$$

$$F(1) = \frac{1}{8}, F(2) = \frac{2}{8}, \dots, F(8) = \frac{8}{8} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{8} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} & 3 \leq x < 4 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 8 \leq x < \infty \end{cases}$$



مثال - إذا كان لدينا دالة الكتلة الاحتمالية بالشكل الآتي -

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & x = -2 \\ 2/8 & x = 1 \\ 1/2 & x = 2 \\ 0 & \text{و.و.} \end{cases}$$

أوجد: الدالة التوزيع التراكمية (c.d.f.) لها.

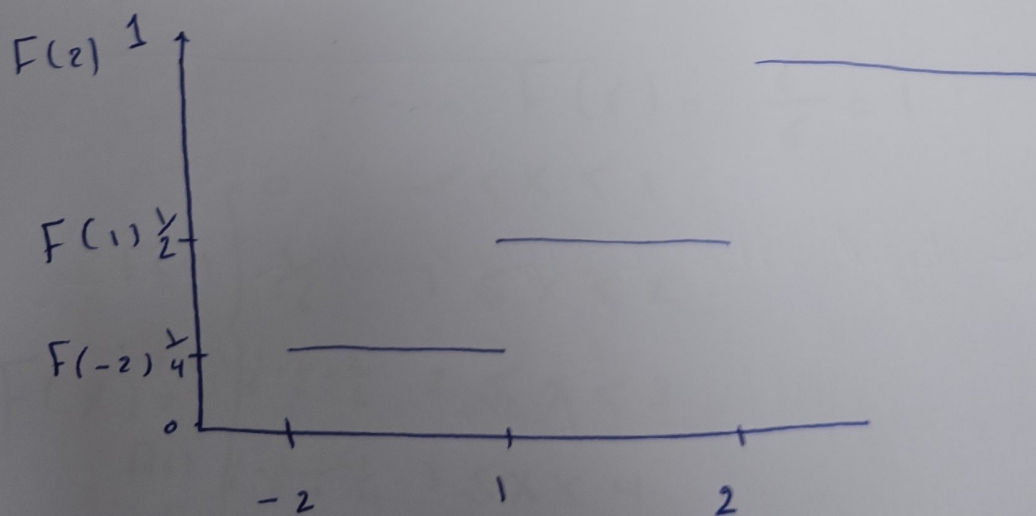
$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

$$F(-2) = \Pr(X \leq -2) = \sum_{t=-2}^{-2} f(t) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = \Pr(X \leq 1) = \sum_{t \leq 1} f(t) = f(1) + f(-2) = \frac{2}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = \Pr(X \leq 2) = \sum_{t \leq 2} f(t) = f(2) + f(1) + f(-2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ \frac{1}{4} & -2 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$



- بالرجوع الى مثال رمي حجر الزر مرة واحدة .
 اوجد دالة التوزيع التراكمية (c.d.f.)

كل

$$S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x=1 \\ \frac{1}{6} & x=2 \\ \frac{1}{6} & x=3 \\ \frac{1}{6} & x=4 \\ \frac{1}{6} & x=5 \\ \frac{1}{6} & x=6 \end{cases}$$

$$\text{or } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x=1, \dots, 6 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) = \frac{x}{6}$$

$$F(1) = \frac{1}{6}, \quad F(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}, \quad F(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$\dots F(6) = \frac{6}{6} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & 6 \leq x < \infty \end{cases}$$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k} & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{و...} \end{cases}$

المطلوب: ① إيجاد قيمة التباين σ^2 .
 ② إيجاد دالة التوزيع التراكمية (التي هي دالة التوزيع).

مثال: إذا كان X متغير عشوائي له دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) كالآتي:

$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{و...} \end{cases}$

المطلوب: ① اوجد $F(x)$ وارسمها.

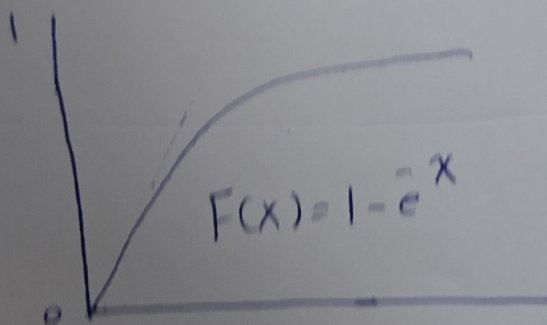
② $P_r(1.5 \leq x \leq 3)$ ، $F(5)$ ، $F(3)$

الحل

① $F(x) = P_r(X \leq x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$

$= \int_{t=0}^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^x$

$= -[e^{-x} - e^{-0}] = 1 - e^{-x}$



②

$$F(3) = P_r(X \leq 3) = \int_0^3 e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^3$$

$$= \underline{\underline{1 - e^{-3}}} = ?$$

$$F(5) = P_r(X \leq 5) = \int_0^5 e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^5 = \underline{\underline{1 - e^{-5}}} = ?$$

$$P_r(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-1})$$

$$= \underline{\underline{e^{-1} - e^{-3}}} = 0.318$$

ثوابت: لتكن دالة

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{و.س} \end{cases}$$

احسب $F(x)$ خارجها .

توقع الرياضيات (Mathematical Expectation)

يُعتبر مفهوم التوقع الرياضي من المفاهيم الأساسية في
نظرية الاحتمال، إذا أن التوقع الرياضي لمُتغير عشوائي يعطي التوقع
النظري للسلوك المستقبلي للمُتغير. ويرمز لهذه العملية بالرمز
 $E(X)$: **توقع** μ_x إذا أن :

$E(X)$: يسمى بالتوقع الرياضي أو متوسط المُتغير العشوائي X

• التوقع الرياضي في حالة المُتغيرات العشوائية المنقطعة :

إذا كان لدينا مُتغير عشوائي منقطع X وله دالة كتلة احتمالية
فإن التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) للمُتغير العشوائي X يكون
كالآتي :-

$$E(X) = \sum_{all\ x} x \cdot f(x) = \mu_x$$

وبصورة عامة إذا كان لدينا مُتغير عشوائي منقطع وليكن $u(x)$ فإن :-

$$E(u(x)) = \sum u(x) \cdot f(x)$$

• التوقع الرياضي في حالة المُتغيرات العشوائية المستمرة :

نفترض لدينا مُتغير عشوائي مستمر X وله دالة كثافة احتمالية
فإن التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) للمُتغير العشوائي X يكون
كالآتي :-

$$E(x) = \int_{all\ x} x \cdot f(x) \cdot dx$$

عامة اذا كان لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن $u(x)$

$$E(u(x)) = \int u(x) \cdot f(x) dx$$

* الخصائص الأساسية للتوقع الرياضي:

١- اذا كانت لدينا ثابتة وليكن K فإن:

$$E(K) = K$$

٢- اذا كانت لدينا ثابتة K ومتغير عشوائي X فإن:

$$E(K - X) = K - E(X)$$

٣- اذا كان لدينا ثابتين K_1 و K_2 ومتغيرين عشوائيين X و Y فإنه:

$$E(K_1 X + K_2 Y) = K_1 E(X) + K_2 E(Y)$$

* أمثلة توضيحية للتوقع الرياضي في حالة المتغير العشوائي المتقطع والمستم.

مثال ١: في تجربة رمي حجر الترد مرة واحدة وبفرض ان X يمثل عدد النقاط على وجه الحجر بعد استقراره اوجد التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) لـ X .

الحل

$$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \\ 0 \end{cases}$$

$$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

و... و...

$$E(X) = \sum_{x=1}^6 x \cdot f(x)$$

$$= (1) \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + (2) \left(\frac{1}{6}\right) + (3) \left(\frac{1}{6}\right) + \dots + (6) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 3.5$$

مطلوب احتمالي لنسالة $E(X^2)$ اوجد

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^6 x^2 \cdot f(x)$$

$$= (1)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + (2)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + (3)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + (4)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + (5)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + (6)^2 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= ?$$

مثال ٤ - اذا كان لدينا دالة الكتلة الاحتمالية بالشكل الآتي:

X	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

المطلوب ، $E(X)$ ، $E(X^2)$ ، $E(3X^3)$
H.W.

$E(3+X)$
H.W.

الكل

$$E(X) = \sum_{x=0}^3 x \cdot f(x)$$

$$= (0) \left(\frac{1}{4}\right) + (1) (0) + (2) \left(\frac{1}{4}\right) + (3) \left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{2}}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^3 x^2 \cdot f(x)$$

$$E(X^2) = (0)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + (1)^2 (0) + (2)^2 \left(\frac{1}{4}\right) + (3)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

مثال ٢ افرض ان X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية التالية :-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 2 < x < 8 \\ 0 & \text{و.س} \end{cases}$$

اوجد $E(X)$, $E(X^3)$

$$E(X) = \int_2^8 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{6} \int_2^8 x \cdot dx$$

الحل

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^8 \Rightarrow \frac{1}{6} \left[\frac{64}{2} - \frac{4}{2} \right] = \underline{\underline{5}}$$

$$E(X^3) = \int_2^8 x^3 \cdot f(x) dx = \frac{1}{6} \int_2^8 x^3 dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^8$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{4096}{4} - \frac{16}{4} \right] = \underline{\underline{170}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 < x < 5 \\ 0 & \text{و.م.} \end{cases}$$

تقرضاته

المطلوب إيجاد $E(X(5-X))$

$$E(\overbrace{X(5-X)}) = E(5X - X^2)$$

الحل

بواسطة التوقع الرياضي فإنه

$$E(5X - X^2) = \underbrace{5 E(X)}_{\text{الحد الأول}} - \underbrace{E(X^2)}_{\text{الحد الثاني}}$$

الحد الأول

$$5 E(X) = 5 \cdot \int_0^5 X \cdot f(x) dx$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{5} \int_0^5 X dx = \left[\frac{X^2}{2} \right]_0^5 = \boxed{\frac{25}{2}}$$

الحد الثاني

$$E(X^2) = \int_0^5 X^2 f(x) dx = \frac{1}{5} \int_0^5 X^2 dx$$

$$= \frac{1}{5} \left[\frac{X^3}{3} \right]_0^5 = \frac{1}{5} \left[\frac{125}{3} \right] = \frac{25}{3}$$

$$\therefore E(5X - X^2) = \frac{25}{2} - \frac{25}{3} = 25 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right]$$

$$= 25 \left[\frac{3-2}{6} \right] = \boxed{\frac{25}{6}}$$

التباين (Variance)

عبارة عن توقع مربع الانحراف عن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X . ويرمز لهذه العملية بالرمز $V(X)$ أو σ^2 أو σ_x^2

الصيغة الرياضية للتباين هي كالآتي:-

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

$$= E(X - \mu_x)^2$$

إذا كان X متغير عشوائي متقطع فإن:-

$$V(X) = \sum_{all\ X} (X - \mu_x)^2 \cdot f(X) = \sigma^2$$

$\mu_x = E(X)$

إذا كان X متغير عشوائي مستمر فإن:-

$$V(X) = \int_{all\ X} (X - \mu_x)^2 \cdot f(X) dX = \sigma^2$$

$\mu_x = E(X)$

نظرية: إذا كان X متغير عشوائي متوقع μ_x وله دالة الاحتمال $f(x)$ فإن $V(X)$ تكون كالآتي:-

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$

$$V(X) = E(X - \mu_x)^2$$

$$= E(X^2 - 2X\mu_x + \mu_x^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu_x E(X) + \mu_x^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu_x^2 + \mu_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$

ملفظة - الاختراصة المعيارية، هو الجذر الموجب للسبائي ويرمز له
بارمز σ ($\sigma = \sqrt{\sigma^2}$)

* خواص السبائي

(1) اذا كان X متغير عشوائي وكانت لدينا $a, b, c, \dots$ اعداد
حقيقية فإن $\downarrow$

$$V(k) = 0 \Rightarrow V(k) = E(k^2) - (E(k))^2$$

$$= k^2 - k^2 = 0$$

صيفناض
التوقع ارياضي.

$$2) V(kX) = k^2 V(X)$$

$$V(kX) = E(k^2 X^2) - \underbrace{E(kX)^2}_{(E(kX))^2}$$

$$= k^2 E(X^2) - k^2 E^2(X)$$

$$= k^2 [E(X^2) - \underbrace{E^2(X)}_{(E(X))^2}]$$

$$= k^2 V(X)$$

$$3) V(aX + b) = a^2 V(X)$$

ثابت

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E(aX+b)^2 - (E(aX+b))^2 \\ &= E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - (a E(X+b))^2 \\ &= a^2 E(X^2) + 2ab E(X) + b^2 - (a^2 (E(X))^2 + 2ab E(X) + b^2) \\ &= a^2 E(X^2) + 2ab E(X) + b^2 - a^2 (E(X))^2 - 2ab E(X) - b^2 \\ &= a^2 [E(X^2) - (E(X))^2] = a^2 V(X) \end{aligned}$$

مثال ١ :- الفيت قفلة نفود ثلاث مرات. اوجد التوقع والبياني لعدد مرات ظهور الصورة ؟

$$S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$$

$$X = 0, 1, 2, 3$$

$$X=0 \quad \{T, T, T\}$$

عدم ظهور الصورة

$$X=1 \quad \{(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)\}$$

ظهور الصورة مرة واحدة

$$X=2 \quad \{(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)\}$$

ظهور الصورة مرتين

$$X=3 \quad \{(H, H, H)\}$$

ظهور الصورة ثلاث مرات

(93.)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \sum_{X=0}^3 X \cdot P(X)$$

$$= (0)\left(\frac{1}{8}\right) + (1)\left(\frac{3}{8}\right) + (2)\left(\frac{3}{8}\right) + (3)\left(\frac{1}{8}\right) = \underline{\underline{1.5}}$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = E(X)^2 - (E(X))^2$$

$$E(X)^2 = \sum_{X=0}^3 X^2 \cdot P(X)$$

$$= (0)^2\left(\frac{1}{8}\right) + (1)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (2)^2\left(\frac{3}{8}\right) + (3)^2\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\sigma_X^2 = 3 - (1.5)^2 = 0.75$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.75} = 0.866$$

الانحراف
المعياري

إذا كان X متغير عشوائي له دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{و.س.} \end{cases}, \quad \text{دعنا نريد } X$$

$$V(X) = E(X)^2 - (E(X))^2$$

$$E(X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^1 x^3 \, dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \mu_x = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^1 x^2 \, dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{3} - 0 \right] = \frac{2}{3}$$

$$\therefore V(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

مثال ١١ - ١٢: إذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية الآتية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{و.س.} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد
التحرف المعياري لـ X

③ إذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية الآتية

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{و.س.} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد
التحرف المعياري لـ X

التوزيع الاحتمالي المشترك (Joint Probability Distribution)

يعرف التوزيع الاحتمالي المشترك بأنه دالة احتمالية تجمع بين متغيرين أو أكثر من المتغيرات العشوائية في آن واحد. مثلاً إذا كان لدينا X, Y متغيران عشوائيان فإن الدالة الاحتمالية التي تعبر عن سلوك هذين المتغيرين معاً تسمى بدالة التوزيع الاحتمالي المشترك. ويمكن تحديد نوعين رئيسيين من التوزيعات الاحتمالية المشتركة استناداً إلى نوع المتغيرات سواء كانت متغيرات متقطعة أو مستمرة.

أمثلة متنوعة عن المتغيرات العشوائية المشتركة.

١- عند اختيار طالب من أحد الصفوف وافترضنا أن (X) يمثل طول الطالب و (Y) يمثل وزنه فإن الزوج المرتب (X, Y) يمثل متغير عشوائي ذو بعدين.

٢- عند رمي قهصين تعود مرة واحدة وافترضنا أن (X) تمثل النتائج التي تظهر على قطعة القود الأولى و (Y) تمثل النتيجة التي تظهر على القطعة الثانية فإن الزوج المرتب (X, Y) يمثل متغير عشوائي ذو بعدين.

الكتلة الاحتمالية المشتركة Joint Probability Mass Function

افرضنا x, y متغيران عشوائيان من النوع المتقطع

حيث ان (فضاء x) فترة المتغير $x \leftarrow \mathcal{R}_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

(فضاء y) فترة المتغير $y \leftarrow \mathcal{R}_y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

عندئذ فكل دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة التي تعبر عن سلوك هذين المتغيرين هي :-

$$f(x_i, y_j) = \Pr(x = x_i, y = y_j)$$

ان دالة الكتلة الاحتمالية $f(x_i, y_j)$ تحقق الشرطين الآتيين :-

$$\textcircled{1} f(x_i, y_j) \geq 0$$

$$\textcircled{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) = 1$$

* دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة

Joint Probability density function

افرضنا x, y متغيران عشوائيان من النوع المستمر وفرضنا x هو $\mathcal{R}_x$ و y هو $\mathcal{R}_y$ فانه دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة

تتحقق الشرطين الآتيين :-

$$\textcircled{1} f(x_i, y_j) \geq 0$$

$$\textcircled{2} \iint_{\mathcal{R}_x \mathcal{R}_y} f(x_i, y_j) dx dy = 1$$

(97)

١٠- دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة ذات البعد k .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k)$$

المشتركة

① $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq 0$

② $\sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 1$

تعريف ١٠-١ دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة ذات البعد k .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \Pr(X = x_1, \dots, X_k = x_k)$$

المشتركة

① $f(x_1, \dots, x_k) \geq 0$

② $\int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_k \dots dx_1 = 1$

* التوزيع الاحتمالي الهامشي (الحدي)
Marginal probability distribution

إذا كانت $f(x, y)$ دالة احتمالية مشتركة للمتغيرين x, y
فإن الدالة الهامشية (الحدية) لكل من x, y تعرف
حالياً هي -

كان X, Y متغيراه عشوائيه من التوزيع المتقطع
فقررت الدالة الهامسية او التوزيع الهامسي (الحدري)

كما يلي :-

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j)$$

$$f(y_j) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_j)$$

٩ اذا كان X, Y متغيراه عشوائيان من التوزيع المستمر
فقررت الدالة الهامسية او التوزيع الهامسي (الحدري)

$$f(x_i) = \int_{R_y} f(x_i, y_j) dy$$

$$f(y_j) = \int_{R_x} f(x_i, y_j) dx$$

في حالة كون X, Y متغيراه من التوزيع المتقطع نوضح
($f(x_i, y_j)$ و $f(x_i)$ و $f(y_j)$) في جدول وكالاتي :-

$X \backslash Y$	y_1	y_2	---	y_m	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	---	$f(x_1, y_m)$	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	---	$f(x_2, y_m)$	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
x_n	$f(x_n, y_1)$	$f(x_n, y_2)$	---	$f(x_n, y_m)$	$f(x_n)$
$f(y_j)$	$f(y_1)$	$f(y_2)$	---	$f(y_m)$	1

أقلية توفيقية عن التوزيع الاحتمالي المشترك

① القى جري ترد مرة واحدة وامرنا انه X متغير عشوائي يمثل المجموع للرقمين اي انه $X(a,b) = a+b$ وافرضنا انه Y متغير عشوائي يمثل القيمة العظمى للرقمين اي انه $Y(a,b) = \max(a,b)$ ، حيث انه a, b يمثل الرقمان الظاهرين على الحجر الاول والحجر الثاني على التوالي ، المطلوب ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة والدالة الهامسية (الحدية) لكل من المتغيرين العشوائيين X, Y .

الحل:

$$X(a,b) = a+b, \quad Y(a,b) = \max(a,b)$$

$$X = \{2, 3, \dots, 12\} \quad Y = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$P(2,1) = Pr(X=2, Y=1) = Pr(\{1,1\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(2,2) = Pr(X=2, Y=2) = Pr(\{\emptyset\}) = 0$$

$$P(2,3) = Pr(X=2, Y=3) = Pr(\{\emptyset\}) = 0$$

$$P(3,1) = Pr(X=3, Y=1) = Pr(\{\emptyset\}) = 0$$

$$P(3,2) = Pr(X=3, Y=2) = Pr\{(1,2), (2,1)\} = \frac{2}{36}$$

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{7}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
$f(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

ج إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة الاحتمال المشتركة التالية

$$f(X, Y) = \begin{cases} c(2X + Y) & X = 0, 1, 2, \quad Y = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

المطلوب: - ① إيجاد قيمة الثابت c .

② إيجاد التوزيع الهامشي لـ X و Y .

$$Pr(X \geq 1, Y \leq 2)$$

$$Pr(X=2, Y=1)$$

الكل

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$f(x)$
0	0	C	$2C$	$3C$	$6C$
1	$2C$	$3C$	$4C$	$5C$	$14C$
2	$4C$	$5C$	$6C$	$7C$	$22C$
$f(y)$	$6C$	$9C$	$12C$	$15C$	1

① To find C

$$\sum f(x) = 1 \Rightarrow 6C + 14C + 22C = 1$$

$$\Rightarrow 42C = 1 \Rightarrow C = \boxed{\frac{1}{42}}$$

② التوزيع الحدي لـ X

X	0	1	2
$f(x)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{14}{42}$	$\frac{22}{42}$

التوزيع الحدي لـ Y

Y	0	1	2	3
$f(y)$	$\frac{6}{42}$	$\frac{9}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{15}{42}$

$$\textcircled{3} \Pr(X \geq 1, Y \leq 2) = \Pr(X=1, Y=0) + \Pr(X=1, Y=1)$$

$$+ \Pr(X=2, Y=2) + \Pr(X=2, Y=0)$$

$$+ \Pr(X=2, Y=1) + \Pr(X=2, Y=2)$$

$$= \frac{2}{42} + \frac{3}{42} + \frac{4}{42} + \frac{4}{42} + \frac{5}{42} + \frac{6}{42} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

(1.3)

$$\textcircled{11} \Pr(X=2, Y=1) = \frac{5}{42}$$

ق اذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة بالشكل الآتي :-

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 + 2x_2}{45} & \begin{matrix} x_1 = 0, 1, 2 \\ x_2 = 1, 2, 3 \end{matrix} \\ 0 & \text{و.و.} \end{cases}$$

المطلوب ايجاد (1)

(2)

$$\Pr(X_1=1, X_2 \leq 2)$$

$$\textcircled{1} \Pr(X_1 \geq 1, X_2=3)$$

$$\Rightarrow \Pr(X_1=1, X_2=3) + \Pr(X_1=2, X_2=3)$$

$$= \frac{1 + 2(3)}{45} + \frac{2 + 2(3)}{45} = \frac{15}{45}$$

$$\textcircled{2} \Pr(X_1=1, X_2 \leq 2)$$

$$\Rightarrow \Pr(X_1=1, X_2=1) + \Pr(X_1=1, X_2=2)$$

$$= \frac{1 + 2(1)}{45} + \frac{1 + 2(2)}{45} = \frac{8}{45}$$

(1-2)

الحل

بما أن X, Y متغيرين عشوائيين لهما دالة التوزيع المشتركة

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & 0 < x < 4, 1 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

المطلوب ١- (1) إيجاد قيمة الثابت c

(2) $f(x)$, $f(y)$

(3) $Pr(1 < x < 2, 2 \leq y \leq 3)$

(4) $Pr(x \geq 3, y \leq 2)$

(1) $\int_1^5 \int_0^4 cxy \, dx \, dy = 1$

اكمل

$$c \int_1^5 y \int_0^4 x \, dx \, dy = 1$$

$$c \int_1^5 y \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^4 \, dy = 1$$

$$c \int_1^5 y \cdot [8] \, dy = 1 \Rightarrow 8c \int_1^5 y \, dy = 1$$

$$\Rightarrow 8c \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_1^5 = 1 \Rightarrow 8c \left[\frac{25}{2} - \frac{1}{2} \right] = 1$$

$$\Rightarrow 8c \left[\frac{24}{2} \right] = 1 \Rightarrow 96c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{96}}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{96} xy & 0 < x < 4, 1 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \int_y f(x, y) dy$$

$$= \frac{1}{96} x \int_1^5 y dy$$

$$= \frac{1}{96} x \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^5 \Rightarrow \frac{1}{96} x \left[\frac{25}{2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{12}{8 \cdot 96} x = \frac{x}{8}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f(y) = \int_x f(x, y) dx$$

$$= \frac{1}{96} y \int_0^4 x dx \Rightarrow \frac{1}{96} y \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{1}{96} y [8]$$

$$= \frac{y}{12}$$

$$\therefore f(y) = \begin{cases} \frac{y}{12} & 1 < y < 5 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad \Pr(1 < x < 2, 2 < y < 3) = \int_2^3 \int_1^2 f(x, y) dx dy$$

$$= \frac{1}{96} \int_2^3 y \int_1^2 x dx dy \Rightarrow \frac{1}{96} \int_2^3 y \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{96} \int_2^3 y \cdot \left[2 - \frac{1}{2} \right] dy$$

(1.7)

$$\Rightarrow \frac{1}{96} \cdot \frac{3}{2} \int_2^3 y \, dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{96} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_2^3 \Rightarrow \frac{3}{(2)(96)} \left[\frac{9}{2} - \frac{4}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(2)(96)} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{128}$$

$$\textcircled{4} \Pr(X > 3, Y \leq 2) = \int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{96} xy \, dx \, dy$$

$$\frac{1}{96} \int_1^2 y \int_3^4 x \, dx \, dy$$

$$\frac{1}{96} \int_1^2 y \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_3^4 \, dy = \frac{1}{(96)(2)} \int_1^2 y \cdot [16 - 9] \, dy$$

$$= \frac{7}{(96)(2)} \cdot \left. \frac{y^2}{2} \right|_1^2 = \frac{7}{128}$$

واجب بيتي :-

① إذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة بالشكل

$$f(x, y) = \begin{cases} 9x^2y^2 & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

التي :-

المطلوب : ① إيجاد التوزيع الحدي (الهامشي) لكل من x و y .

$$\Pr(X \leq \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}) \quad \textcircled{2}$$

② إذا كان لدينا

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1 + x_2)} & 0 < x_1, x_2 < \infty \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

برهن أنه أن $f(x_1, x_2)$ هي دالة كثافة احتمالية مشتركة ؟

توزيع الاحتمالي الشرطي conditional probability distribution

ان مفهوم التوزيع الاحتمالي الشرطي يقترب بمفهوم الاحتمال الشرطي لأي حدثين E_1 و E_2 فإن احتمال وقوع الحادث E_1 بشرط ان الحادث B قد وقعت هو:-

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad , \quad P(E_2) > 0$$

أي انه حاصل قسمة الاحتمال المشترك على الاحتمال الهامشي (الحدي)، وبمفهوم المتغيرات العشوائية نفرض ان X و Y متغيرات عشوائية لهما التوزيع الاحتمالي المشترك $f(X, Y)$ ودالة الاحتمال الهامشي (الحدية) $f(X)$ ، $f(Y)$ على التوالي، وعليه فإنه لا يحد التوزيع الاحتمالي لـ X عندما تكون Y معطاة صفيًا أي انه بشرط ان تكون Y معلومة فإن التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ X يعرف كالتالي:-

$$f(X | Y) = \frac{f(X, Y)}{f(Y)}$$

والتوزيع الاحتمالي الشرطي لـ Y يعرف كالتالي:-

$$f(Y | X) = \frac{f(X, Y)}{f(X)}$$

د x, y متغيرات عشوائيات من التوزيع المتقطع
 و $f(x|y)$ تسمى بدالة الكتلة الاحتمالية الشرطية
 لـ x عندما y معلومة وتحقق الشرطين الآتيين:-

$$\textcircled{1} f(x|y) \geq 0$$

$$\textcircled{2} \sum_x f(x|y) = 1$$

واذا كان x, y من التوزيع المستمر فإن $f(x|y)$
 تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية الشرطية لـ x عندما
 y معلومة وتحقق الشرطين الآتيين:-

$$\textcircled{1} f(x|y) \geq 0$$

$$\textcircled{2} \int_x f(x|y) dx = 1$$

مثال:- نفترض من لدينا دالة الكتلة الاحتمالية المشتركة

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
$f(x, y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

إيجاد $\textcircled{1}$ التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ x
 $\textcircled{2}$ التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ y

$$\textcircled{1} \quad P(X|Y) = \frac{P(X,Y)}{P(Y)}$$

$$P(Y) = \sum_x P(X,Y)$$

X \ Y	0	1	P(X)
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
P(Y)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

التوزيع الحدي لـ Y

Y	0	1
P(Y)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

التوزيع الحدي لـ X

X	0	1
P(X)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$P(X|Y=0)$$

X	0	1
P(X Y=0)	$\frac{P(0,0)}{P(0)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$	$\frac{P(1,0)}{P(0)} = \frac{0}{\frac{1}{3}} = 0$

$$P(X|Y=1)$$

X	0	1
P(X Y=1)	$\frac{P(0,1)}{P(1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$	$\frac{P(1,1)}{P(1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

= ٤٦

إذا كان X, Y متغيران عشوائيان لهما دالة الكثافة المشتركة المشتركة الآتية -

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{و.م.} \end{cases}$$

أوجد التوزيع الاحتمالي الشرطي لـ Y .

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy = e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy$$

$$= -e^{-x} [e^{-y}]_0^{\infty} \Rightarrow -e^{-x} [0 - 1] = e^{-x}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{و.م.} \end{cases}$$

$$f(y|x) = \frac{\cancel{e^{-x}} e^{-y}}{\cancel{e^{-x}}} = e^{-y}$$

$$\therefore f(y|x) = \begin{cases} e^{-y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{و.م.} \end{cases}$$

الشرطي : Conditional expectation

لدينا $f(x, y)$ الدالة الاحتمالية المشتركة للتغيرين العشوائيين X, Y ، الدالة الاحتمالية الشرطية $f(x|y)$ عندما Y معلومة عندئذ يعرف التوقع الشرطي $E(X|Y)$ عندما Y معلومة كالتالي :

$$E(X|Y) = \sum_x x \cdot f(x|y) \quad x \text{ متقطع}$$

$$E(X|Y) = \int x \cdot f(x|y) dx \quad x \text{ مستمر}$$

التوقع الشرطي $E(Y|X)$ عندما X معلومة يكون كالتالي :

$$E(Y|X) = \sum_y y \cdot f(y|x) \quad y \text{ متقطع}$$

$$E(Y|X) = \int y \cdot f(y|x) dy \quad y \text{ مستمر}$$

مثال :- بالرجوع الى مثال ١ بافتراض لدينا دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
$P(X, Y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- المطلوب ① إيجاد التوقع الشرطي $E(X|Y)$ عندما $Y=0, 1$
 ② التوقع الشرطي $E(Y|X)$ عندما $X=0$

①

$$E(X \mid Y=1) = \sum_{X=0}^1 X \cdot P(X \mid Y=1)$$

X	0	1
$P(X \mid Y=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X \mid Y=1) = (0) * (\frac{1}{2}) + (1) * (\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$E(X \mid Y=0) = \sum_{X=0}^1 X \cdot P(X \mid Y=0)$$

X	0	1
$P(X \mid Y=0)$	1	0

$$E(X \mid Y=0) = (0)(1) + (1)(0) = \underline{\underline{0}}$$

مثال ٢ - بالرجوع الى مثال ١:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x, y < \infty \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

المطلوب إيجاد التوقع الشرطي لـ Y

$$E(Y|X) = \int_Y Y \cdot f(Y|X) dY$$

$$f(Y|X) = \frac{f(X, Y)}{f(X)}$$

$$f(X) = \begin{cases} e^{-X} & X > 0 \\ 0 & 0 < X \end{cases}$$

$$f(Y|X) = \frac{\cancel{e^{-X}} e^{-Y}}{\cancel{e^{-X}}} = e^{-Y}$$

$$\therefore E(Y|X) = \int_0^{\infty} Y e^{-Y} dY$$

يُحسب بالتجزئة

Let

$$u = Y \quad du = dY$$

$$dv = e^{-Y} \quad v = -e^{-Y}$$

$$uv - \int v du$$

$$\underbrace{-Y e^{-Y}}_{\text{Zero}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-Y} dY \Rightarrow -e^{-Y} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow -[0 - 1] = \underline{\underline{1}}$$

$$\therefore E(Y|X) = \underline{\underline{1}}$$

التغاير والارتباط بين المتغيرات العشوائية

التغاير :- إذا كان لدينا X , Y متغيران عشوائيان والالة الاحتمالية المشتركة لهما $f(x,y)$ وتوقع كل متغير μ_x , μ_y على الترتيب

فإن التغاير (covariance) بين X , Y يرمز له بالرمز $\text{cov}(X,Y)$ ويعرف كالآتي :-

$$\text{cov}(X,Y) = E \left(\underset{E(X)}{X - \mu_x} \right) \left(\underset{E(Y)}{Y - \mu_y} \right)$$

إذا كان المتغيرات X , Y متغيرات عشوائية متقطعة فإن :-

$$\text{cov}(X,Y) = \sum_x \sum_y (x - \mu_x) (y - \mu_y) f(x,y)$$

وإذا كان X , Y متغيرات عشوائية مستمرة فإن :-

$$\text{cov}(X,Y) = \int_y \int_x (x - \mu_x) (y - \mu_y) f(x,y) dx dy$$

تفريفة :- إذا كان X , Y متغيران عشوائيان توقع كل منهما μ_x , μ_y على الترتيب فإن

$$\begin{aligned} \text{cov}(X,Y) &= E(XY) - \mu_x \mu_y \\ &= E(XY) - E(X) E(Y) \end{aligned}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$$

$$= E[XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X\mu_Y]$$

$$= E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(Y) + \mu_X\mu_Y$$

$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_X/\mu_Y + \mu_X/\mu_Y$$

$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

وهذا المطلوب اثباته .

(مبرهنه): اذا كان X, Y متغيران عشوائيان مستقلان (independence) فان

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \quad , \quad \text{cov}(X, Y) = 0$$

البرهان:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

وبما ان X, Y مستقلان فان

$$\text{cov}(X, Y) = E(X) \cdot E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

* خواص التغاير

اذا كان X, Y متغيران عشوائيان a, b, c ثوابت فان

$$1) \text{cov}(c, X) = 0$$

$$2) \text{cov}(X, X) = \text{var}(X) = v(X) = \sigma_X^2$$

$$3) \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$4) \text{cov}(X, Y) = 0 \quad (X, Y \text{ are independent})$$

$$5) \text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$$

البرهان:

$$\begin{aligned} 1) \text{cov}(c, X) &= E(cX) - E(c) \cdot E(X) \\ &= c E(X) - c E(X) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{cov}(X, X) &= E(X^2) - E(X) \cdot E(X) \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 = v(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \\ &= E(YX) - E(Y) \cdot E(X) = \text{cov}(Y, X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \\ &= E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 \end{aligned}$$

ملاحظة: X, Y مستقلان

$$\begin{aligned} 5) \text{cov}(aX, bY) &= E(abXY) - E(aX) \cdot E(bY) \\ &= ab E(XY) - ab E(X) \cdot E(Y) \\ &= ab [E(XY) - E(X) \cdot E(Y)] = ab \text{cov}(X, Y) \end{aligned}$$

ثبات ١-٢٠٨
 إذا كان X, Y متغيران عشوائيان فإن

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

البرهان

$$V(X+Y) = E(X+Y)^2 - [E(X+Y)]^2$$

$$\Rightarrow E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - E^2(X) - 2E(X)E(Y) - E^2(Y)$$

$$\Rightarrow \underbrace{E(X^2) - E^2(X)}_{\operatorname{var}[E(X)]^2} + \underbrace{E(Y^2) - E^2(Y)}_{\operatorname{var}[E(Y)]^2} + 2 \underbrace{[E(XY) - E(X)E(Y)]}_{\operatorname{cov}(X, Y)}$$

$$\Rightarrow V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

وهذا المطلوب

ثبات ١-٢١-١١-١٢
 إذا كان X, Y متغيران عشوائيان أثبت أنه

$$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

من معامل الارتباط - ١

① $\rho(x, y) = -1$

إذا كان :

$\rho = 1$ (ارتباط تام موجب)

$\rho = -1$ (ارتباط تام عكسي)

$\rho = 0$ (لا يوجد ارتباط)

وهذا يفسر من حالة إذا كان x, y متغيرين
مستقلين.

② $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

$$\frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{cov}(y, x)}{\sigma_y \sigma_x}$$

③ $\rho(x, x) = 1$

$$\frac{\text{cov}(x, x)}{\sigma_x \sigma_x} = \frac{v(x)}{\sigma_x^2} = \frac{\cancel{\sigma_x^2}}{\cancel{\sigma_x^2}} = 1$$

④ ^{H.W.} $\rho(x, -x) = -1$

⑤ $\rho(x, y) = 0$ إذا كان x, y متقلين

$$\frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0}{\sigma_x \sigma_y} = 0$$

(1.2.1)

نوضح عن التغير والارتباط

إذا كان لدينا دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

المطلوب (٥) إيجاد التغير بين (x, y)

(٦) إيجاد الارتباط بين (x, y)

و.أ. الكل

① $\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$

$$E(xy) = \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (2x + y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + xy^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[2y \frac{x^3}{3} + y^2 \frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^1 dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}y^2 \right) dy$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)$$

(١٧) $\therefore E(xy) = \frac{1}{2}$

كل من $E(x)$ و $E(y)$ لا بد من إيجاد التوزيع الهامشي

من x و y على الترتيب كما يأتي :-

$$f(x) = \int_0^1 (2x + y) dy$$

$$= 2xy + \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \Rightarrow 2x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4x + 1) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{و.م.} \end{cases}$$

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot (4x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[4 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{11}{12}}$$

$$E(Y) = \int_0^1 Y \cdot f(Y) dY$$

$$f(Y) = \int_0^1 (2X + Y) dX$$

$$= \left(2 \frac{X^2}{2} + XY \right) \Big|_0^1 = (1 + Y)$$

$$\therefore f(Y) = \begin{cases} (1+Y) & 0 < Y < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_0^1 Y(1+Y) dY$$

$$= \left[\frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore \text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{11}{12} \right) \left(\frac{5}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{55}{72} = \underline{\underline{-0.26}}$$

$$\textcircled{2} \rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Ans.

(174)

دالة المولدة للعزوم Moment Generating Function (m.g.f.)

افرض ان X متغير عشوائي له دالة احتمالية $f(x)$ وان
(t) متغير اخر و μ عدد موجب بحيث انه $-r < t < r$

ووفق هذه المعطيات نعرف الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي
 X والتي يرمز لها بالرمز $\mu_x(t)$ بأنها القيمة المتوقعة للدالة
(e^{tx}) اي ان :-

$$\mu_x(t) = E e^{tx} = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) & \text{اذا كان } X \text{ متغيراً منقطعاً} \\ \int_x e^{tx} f(x) dx & \text{اذا كان } X \text{ متغيراً مستمر} \end{cases}$$

وكيفية الحصول على عزوم المتغير العشوائي X من الدالة
المولدة للعزوم هي :-

① نشتق الدالة المولدة للعزوم نسبة الى t مشتقة اولى ومصادره
($t=0$) فنصل الى $E(x)$.

② نشتق الدالة المولدة للعزوم نسبة الى t مشتقة ثانية ومصادره
($t=0$) فنصل الى $E(x^2)$ (١٢٤)

$$\left. \frac{\partial \mu_x(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = E(X) = \mu'_x(t)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \mu_x(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = E(X^2) = \mu''_x(t)$$

$$\left. \frac{\partial^r \mu_x(t)}{\partial t^r} \right|_{t=0} = E(X^r) = \mu_x^{(r)}(t)$$

مثال: امراضات X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية مباشرة
التي هي -

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & 0 \leq x < \infty \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

المطلوب ① إيجاد الدالة المولدة للقدرم ؟

② التوقع الرياضي

من خلال الدالة المولدة للقدرم .

الحل

$$\textcircled{1} \mu_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot 2e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\infty} e^{-x(2-t)} dx$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{(2-t)} \cdot e^{-x(2-t)} \Big|_0^\infty$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2-t} [0 - 1] = \left(\frac{2}{2-t} \right) = \mu_x(t) = 2(2-t)$$

$$\textcircled{2} \quad E(x) = \mu_x(t) = \frac{\partial \mu_x(t)}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

$$= -2(2-t)^{-2} \cdot (-1) = \frac{2}{(2-t)^2} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = E(x)$$

$$V(x) = \underline{E x^2} - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \mu_x^2(t) = \frac{\partial^2 \mu_x(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0}$$

$$= -4(2-t)^{-3} \cdot (-1) = \frac{4}{(2-t)^3} \Big|_{t=0} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore V(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ت مهمة بني الدالة المولدة للفردم .

1- $\mu_{ax}(t) = \mu_x(at)$, (a) ثابت

2- $\mu_{ax+b}(t) = \mu_x(at) \cdot e^{bt}$ (a, b) ثابت

3- $\mu_{\frac{x+a}{b}}(t) = e^{\frac{a}{b}t} \cdot \mu_x\left(\frac{t}{b}\right)$

ملاحظة - سهولة عامة قبات الدالة الأسية لأي متغير هي :

$$e^{tx} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tx)^r}{r!}$$

$$= 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \dots$$

توزيع الاحتمالية المتقطعة (Discrete probability distribution)

التوزيع المنتظم المتقطع (discrete uniform distribution)

تتصف نتائج التوزيع المنتظم المتقطع بكونها ذات نفس الفرصة في الظهور على سبيل المثال حالة سحب كنية عشوائية من جميع محدد.

افرض ان X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم المتقطع والذي يوصف بالشكل الآتي :-

$$X \sim Ud(k)$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية لـ X هي :-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & x = 1, \dots, k \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

وان :-

$$E(X) = \frac{k+1}{2}, \quad \text{var}(X) = \frac{k^2-1}{12}, \quad F(x) = \frac{x}{k}$$

الرفاه

$$E(X) = \sum_{x=1}^k x \cdot f(x) = \sum_{x=1}^k x \cdot \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{x=1}^k x \Rightarrow \frac{1}{k} [1+2+3+\dots+k]$$

$$E(X) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^k x^2 \cdot f(x) \Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{x=1}^k x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\therefore V(X) = \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k+1)^2}{4} = \frac{k^2-1}{12}$$

$$F(x) = \sum_{t=1}^x f(t) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^x 1 = \frac{1}{k} x$$

$\downarrow$
 $\text{Pr}(X \leq x)$

⑤ توزيع برنولي (Bernoulli distribution)

يستخدم هذا التوزيع في التجارب التي تتخذ نتائجها
حاليًا فقط هي حالة النجاح التي تظهر باحتمالية مقدارها (p)

وحالة الفشل التي تظهر باحتمالية مقدارها $(q=1-p)$

على سبيل المثال عند فحص بطارية حافة لبيان مطابقة المواصفات

المحدد، مع قبل الكمية المنتجة، واضح أن نتيجة الفحص هي

أما أن تكون البطارية مطابقة للمواصفات أم غير مطابقة للمواصفات

فإذا كان المتغير العشوائي (X) يشير إلى مطابقة البطارية

للمواصفات باحتمالية نجاح المحاولة مقدارها (p) (احتمال

مطابقة البطارية للمواصفات) واحتمال الفشل مقدارها (q)

وعليه يمكن تخمين قيمتين للمتغير العشوائي (X) هما:

(عند نجاح المحاولة و $(X=0)$ عند فشل المحاولة . اي

$$P(X=1) = p, \quad P(X=0) = q = (1-p)$$

افرض ان (X) متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي والذي يوصف
بالشكل الآتي :

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

وان دالة الكثافة الاحصائية لـ X هي :-

$$P(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x=0, 1 \\ 0 & \text{و.و.} \end{cases}$$

بما ان (p) تمثل معلمة التوزيع ، $0 < p < 1$ وان

$$p + q = 1$$

$$E(X) = p, \quad \text{var}(X) = pq = \sigma_x^2 \quad \text{وان :-}$$

$$\mu_x(t) = pe^t + q$$

البرهان

$$E(X) = \sum_{x=0}^1 x \cdot p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= (0)p^0 q^1 + (1)p^1 q^0 = \underline{\underline{p}}$$

$v(x)$ H.W.

$$\mu_x(t) = E e^{tx} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot p^x q^{1-x}$$

$$\Rightarrow e^0 p^0 q^1 + e^t p^1 q^0$$

$$\Rightarrow q + p e^t = \mu_x(t)$$

وبإمكان إيجاد $E(x)$ و $E(x^2)$... من خلال اشتقاق
الدالة المولدة للقزوم نسبة إلى t و بتعويض $(t=0)$ كما يلي

$$E(x) = \frac{\partial \mu_x(t)}{\partial t} = p e^t \Big|_{t=0} = p e^0 = \underline{\underline{p}}$$

توزيع ذي الحدين (ثنائي) Binomial Distribution

يعتبر توزيع ذي الحدين من أقدم التوزيعات الاحتمالية ذات
أسس كبيرة في معظم المجالات العلمية وبعد العالم (James Bernoulli)
(1705-1784) مكتشف هذا التوزيع عام (1700) ويعتبر

لهذا التوزيع حالة خاصة لتوزيع برنولي عندما يكون عدد المحاولات
أكثر من محاولة واحدة.

افترض ان لدينا n من المحاولات المستقلة لتجربة ذات
نتائجين احدهما نجاح والآخر فشل بحيث في كل محاولة p هو
احتمال النجاح و $(q = 1 - p)$ هو احتمال الفشل. فإذا كان ما يهمنا
من هذه الـ n من المحاولات المستقلة لتجربة وقوع حدث معين
 x من المرات حيث ان x متغير عشوائي يمثل عدد مرات النجاح
فإن x يتوزع توزيع ذي الحدين وله دالة الكثافة الاحتمالية

$$P(x) = \begin{cases} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} & x=0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{و.أ.} \end{cases}$$

اذ ان n, p تمثلان معلمتي التوزيع، بحيث ان n عدد صحيح موجب
(عدد مرات إجراء التجربة)، p تمثل النجاح في محاولة واحدة وان
 $0 < p < 1$ و q احتمال الفشل في محاولة واحدة.

هذه وصف المتغير العشوائي X الذي يسبغ توزيع
 بدين ياثنى الآتي

$$X \sim b(n, p)$$

ملاحظة - الحدود المتتالية لمفكوك ذي البدين تكون كالآتي:

$$\sum_{x=0}^n C_x^n p^x q^{n-x} = (p+q)^n = (1)^n = 1$$

الخصائص الرياضية للتوزيع

إذا كان $X \sim b(n, p)$ فإن:

$$E(X) = np$$

التوقع الرياضي

$$V(X) = npq$$

التباين

$$\mu_x(t) = (pe^t + q)^n$$

الدالة المولدة للتوزيع

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \cdot f(x) = \sum_{x=0}^n x \cdot C_x^n p^x q^{n-x}$$

(البرهان)

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^n x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p p^{x-1} q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^n \cancel{x} \cdot \frac{n(n-1)!}{\cancel{x}(x-1)!(n-x)!} p p^{x-1} q^{n-x}$$

(133)

$$\Rightarrow n p \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)! (n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

let $k = x-1 \Rightarrow x = k+1$

$x=1 \Rightarrow k=0$

$x=n \Rightarrow k=n-1$

$$n p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k! (n-k-1)!} p^k q^{n-k-1}$$

$$n p \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} p^k q^{n-k-1}$$

بما ان $p+q=1$
 $(p+q)^{n-1} = 1$

$\therefore E(x) = np$

الباقي

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^n x^2 \cdot C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^n x^2 \cdot \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

let $k = x - 1 \Rightarrow x = (k + 1)$
 $\Rightarrow x = 1, k = 0$
 $x = n, k = n - 1$

$$\Rightarrow np \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_k^{n-1} p^k q^{n-k-1}$$

$$\Rightarrow np \left[\sum_{k=0}^{n-1} k C_k^{n-1} p^k q^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} p^k q^{n-k-1} \right]$$

مجموعه 1

$$\Rightarrow np [E(k) + 1]$$

$$\Rightarrow np [(n-1)p + 1]$$

$$\Rightarrow np [np - p + 1]$$

$$\Rightarrow n^2 p^2 - np^2 + np = E(x^2)$$

$$\therefore V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= \cancel{n^2} p^2 - np^2 + np - \cancel{n^2} p^2$$

$$\Rightarrow np(1-p)$$

$$\Rightarrow npq$$

الدالة المولدة للزخم

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^n e^{tx} C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^n C_x^n (e^t p)^x q^{n-x}$$

$$\Rightarrow (pe^t + q)^n$$

وصف الملاحظ

مثال ٤ العينة قطعة نقدية أربع مرات، افترض ان x يمثل عدد الصور

اوجه الاحتمالات التالية:

- ① الوصول على ثلاثة صور بالضبط
- ② الوصول على ٢ صور على الاكثر
- ③ الوصول على صورة واحدة على الاقل

الحل

المحل نلاحظ ان تجربة القاء قطعة النقود ٤ مرات تتبع لتوزيع ذي الحدين
اب احتمال النجاح $p = \frac{1}{2}$ و $q = \frac{1}{2}$ في محاولة واحدة.

$$\therefore X \sim b(4, \frac{1}{2})$$

$$\textcircled{1} \Pr(X=3) = C_3^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} \Pr(X \leq 3) = \Pr(X=0) + \Pr(X=1) + \Pr(X=2) + \Pr(X=3)$$

$$\text{or } 1 - \Pr(X=4) = 1 - C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{15}{16}$$

راسون (Poisson Distribution)

هذا التوزيع من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الهامة
يتميز من التطبيقات الاحتمالية وسمين بتوزيع الكوادر
الوقوع ضلل سقوط الطائرات ، حوادث الرق ،
خرج القطار عن السكة الحديدية

وان ارد من اشتق هذا التوزيع العالم الفرنسي (Siméon poisson)
والذي تمكن من اشتقاق هذا التوزيع كحالة تقابلية من
توزيع ثنائي الحدين اي عندما تكون حصة الاحتمال p صغيرة
و n كبيرة.

تعريف : يقال ان x متغير عشوائي يتوزع بتوزيع بواسون
انه دالة الكلمة الاحتمالية له تكون بالشكل الآتي :-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & x = \infty \end{cases}$$

اذ ان :-

λ تمثل معلمة التوزيع ، $\lambda > 0$

وبالمكان وصف المتغير العشوائي x الذي يتبع توزيع بواسون
بالشكل الآتي :-

$$X \sim Po(\lambda)$$

دالة الرقعة الاحتمالية يسارية واحد .

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} = 1$$

إذا كانت $x \sim b(n, p)$ وكانت p صغيرة و n كبيرة بحيث $\lambda = np$ فإذن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x=0, 1, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_x^n p^x q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\because \lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}, \quad q = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

$$f(x) = C_x^n p^x q^{n-x} = C_x^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{\lambda^x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^x (n-x)!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \dots (*)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^x (n-x)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-x+1)}{n \cdot n \cdot n \dots \cdot n} \quad (n-x+1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1 = 1 \quad \text{because } \frac{1}{\infty} = \text{zero} \quad \dots (**)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \quad \dots (***)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1 \quad \dots (****)$$

وبتطبيق (*) و(**) و(***) و(****) نحصل على التالي :-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

المفاهيم الرياضية للتوزيع :-

إذا كان $X \sim P_0(\lambda)$ فإن :-

$$\frac{E(X) = \lambda}{\text{القيمة المتوقعة}}$$

$$\frac{V(X) = \lambda}{\text{التباين}}$$

$$\frac{\mu(t)}{x} = \frac{\lambda(e^t - 1)}{e} \quad \text{الدالة المولدة للمعزوم}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

البقاء

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^{x-1} \cdot \lambda}{(x-1)!} \Rightarrow \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$\therefore E(X) = \cancel{\lambda} \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \cancel{e^{\lambda}} = \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{\lambda^{x-1} \lambda}{x(x-1)!}$$

$$\text{let } k = x - 1 \Rightarrow x = 1 + k$$

$$x = 1 \Rightarrow k = 0$$

$$x = \infty \Rightarrow k = \infty$$

$$\therefore E(X^2) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right]$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \underbrace{\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}}_{E(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda(\lambda + 1)$$

$$\therefore V(X) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2$$

$$= \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda = \text{variance of } X.$$

(15)

$$\mu_x(t) = E e^{tx}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{t^x}{e} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{e} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{e} \cdot \lambda e^t$$

$$= \frac{\lambda (e^t - 1)}{e} = m.g.f. \circ f_x$$

امبستيا (ايجار التوقع الرياضياتي) من خلال استعمال ادالة المولدة للغزوم .

مثال ١ - اذا كان $X \sim p_0(3)$ ، اوجد احتمال $Pr(X=2)$ و $Pr(X \geq 3)$ ⑤

الحل

$$① Pr(X=2) = \frac{e^{-3} (3)^2}{2!} = ?$$

$$② Pr(X \geq 3) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-3} (3)^x}{x!}$$

$$= 1 - Pr(X < 3)$$

$$= 1 - [Pr(X=0) + Pr(X=1) + Pr(X=2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-3} (3)^0}{0!} + \frac{e^{-3} (3)^1}{1!} + \frac{e^{-3} (3)^2}{2!} \right] = ?$$

220 خطأ مطبعي موزعي توزيعاً
 200 صفحة ، اعيد احتمال ان تحتوي
 في كتاب فيه

خطأ مطبعي :-
 (c) افطار (d) خطأ او اكثر

$$\therefore n = 220$$

$$p = \frac{1}{200}$$

بيان مع العينة كبيرة و p صغيرة فإذن :

$$\lambda = np = \frac{220}{200} = 1.1$$

$$(1) \Pr(X=0) = \frac{e^{-1.1} (1.1)^0}{0!} = 0.33$$

$$(2) \Pr(X=1) = \frac{e^{-1.1} (1.1)^1}{1!} = 0.37$$

$$(3) \Pr(X \geq 2) = 1 - \Pr(X \leq 1)$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-1.1} (1.1)^0}{0!} + \frac{e^{-1.1} (1.1)^1}{1!} \right]$$

$$= 0.30$$

التوزيع الهندسي Geometric distribution

بعد هذا التوزيع فتر من التوزيع الاحتمالي المتعلق بتجارب
برنولي، فهو يمثل عدد التكرارات للتجربة للوصول على اول نجاح
فقط في التجربة. مثلاً: تجربة القاء قطعة النقود فربما تكون X
عدد مرات القاء قطعة النقود حتى الحصول على اول ظهور ...

تعريف: يقال ان X متغير عشوائي يتوزع التوزيع الهندسي وان
دالة الكتلة الاحتمالية له تكون بالشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} p q^x & x = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{و...} \end{cases}$$

فقط
الخواص من دون استقام

اذا ان ...
 p : تمثل معلية التوزيع ، $0 < p < 1$ ، $q = 1 - p$

وبالمكان وصف المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الهندسي
وبالشكل الآتي:

$$X \sim \text{Geo}(p)$$

وان مجموع دالة الكتلة الاحتمالية يساوي واحد :-

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} f(x) &= p \sum_{x=0}^{\infty} q^x = p [1 + q + q^2 + \dots] \\ &= p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1 \end{aligned}$$

في الرياضيات للتوزيع :-

كان $X \sim \text{Geo}(p)$ فإذن

$$E(X) = \frac{q}{p}, \quad V(X) = \frac{q}{p^2}, \quad \mu_x(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

البرهان :-

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} X \cdot p q^x$$

$$= p \sum_{x=0}^{\infty} X q^x$$

$$= p \sum_{x=0}^{\infty} X \cdot q^{x-1} \cdot q$$

$$= p q \sum_{x=0}^{\infty} X q^{x-1} = p q \sum_{x=0}^{\infty} X \frac{q^{x-1}}{\frac{\partial}{\partial q} q^x}$$

$$= p q \frac{\partial}{\partial q} \sum_{x=0}^{\infty} q^x \Rightarrow p q \cdot \frac{\partial}{\partial q} [1 + q + q^2 + \dots]$$

$$\Rightarrow p q \cdot \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$\Rightarrow p q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p q}{p^2} = \frac{q}{p}$$

(\(\square\)).

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
 وإلا فكان كتابه المقدار $E(X^2)$ بالصيغة أدناه لنتمكن من
 إيجاد تباين المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الهندسي :-

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$$

$$E(X(X-1)) = p \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) q^x$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial q^2} q^x = \frac{\partial}{\partial q} x q^{x-1} = x(x-1) q^{x-2}$$

$$\Rightarrow p \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) q^{x-2} q^2$$

$$\Rightarrow p q^2 \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) q^{x-2} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial q^2} q^x}$$

$$\Rightarrow p q^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{x=0}^{\infty} q^x$$

$$\Rightarrow p q^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} [1 + q + q^2 + \dots]$$

$$\Rightarrow p q^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \cdot \frac{1}{(1-q)}$$

$$\Rightarrow p q^2 \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \quad (150)$$

$$\Rightarrow p q^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} \Rightarrow \frac{2q^2}{p^2}$$

$$\therefore E(X^2) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

$$\therefore V(X) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q^2}{p^2} [2-1] + \frac{q}{p}$$

$$= \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{pq^2 + p^2q}{p^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{p}(q^2 + p\cancel{q})}{p^{\cancel{3}_2}} = \frac{q(\overbrace{p+q}^1)}{p^2} = \left(\frac{q}{p^2} \right)$$

$$\mu_x(t) = E e^{tx}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} p q^x$$

$$\Rightarrow p \sum_{x=0}^{\infty} (e^t q)^x$$

$$\Rightarrow p [1 + e^t q + (e^t q)^2 + \dots]$$

$$\Rightarrow p \cdot \frac{1}{1 - e^t q} = \left(\frac{p}{1 - qe^t} \right)$$

(157)

$$F(x) = \sum_{t=0}^x f(t) = \Pr(X \leq x)$$

$$= p \sum_{t=0}^x q^t \Rightarrow p [1 + q + q^2 + \dots + q^x]$$

سواء هندسيه منتهيه

$$\Rightarrow p \cdot \frac{1 - q^{x+1}}{1 - q}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p} \cdot (1 - q^{x+1}) = F(x)$$

$$0 < x$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 1 - q^{x+1} & 0 \leq x < \infty \\ 1 & x = \infty \end{cases}$$

ملاحظة - هناك شكل اخر لدالة الكتلة الاحتمالية للتوزيع الهندسي وهي كالتالي -

$$f(x) = \begin{cases} p q^{x-1} & x = 1, 2, \dots \\ 0 & 0 \leq x \end{cases}$$

مثال - اذا كان $X \sim \text{Geo}(\frac{1}{3})$ ، اوجد احتمال
 (A) $\Pr(X \leq 3)$
 (B) $\Pr(X > 2)$

$$\begin{aligned} \text{D } \Pr(X \leq 3) &= \Pr(X=0) + \Pr(X=1) + \Pr(X=2) + \Pr(X=3) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D } \Pr(X > 2) &= 1 - \Pr(X \leq 2) = 1 - [\Pr(X=0) + \Pr(X=1) + \Pr(X=2)] \\ &= 1 - \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

(144)

وزيعة الاحتمالية المستمرة

Continuous Probability distribution

① التوزيع المنتظم المستمر (continuous uniform distribution)

يقال بأن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم المستمر إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f.) لهذا المتغير معرفة بالشكل الآتي:-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{و.و.} \end{cases}$$

إذا كانت a, b تمثل معلمات التوزيع وتكون أعداد حقيقية

والا فكلما وصف المتغير العشوائي X الذي يتوزع التوزيع المنتظم المستمر بالشكل الآتي:-

$$X \sim U(a, b)$$

وان تكامل دالة الكثافة الاحتمالية X سيؤدي الواحد الصحيح بحالته.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^b$$

$$= \frac{b-a}{b-a} = 1$$

(١٤٨)

(لخصاً من الرياضيات للتوزيع المنتظم المستمر -)

إذا كان $X \sim U(a, b)$ فإن -

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \mu_x(t) = \frac{b^t - a^t}{t(b-a)}, \quad t > 0$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

الدالة

القيمة المتوقعة

$$E(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \Rightarrow \frac{1}{2(b-a)} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(b-a)} [b^2 - a^2] \Rightarrow \frac{1}{2(b-a)} (b-a)(b+a) = \frac{a+b}{2}$$

المتوسط الحسابي

التباين

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{3(b-a)} x^3 \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3) = \frac{(a^2 + b^2 + ab)(b-a)}{3(b-a)}$$

$$\therefore V(X) = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} - \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}$$

(129)

$$\Rightarrow \frac{4a^2 + 4b^2 + 4ab - 3a^2 - 3b^2 - 6ab}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12} \Rightarrow \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{الثاني}$$

$$\begin{aligned} \mu_x(t) &= E e^{tx} \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx = \frac{1}{t(b-a)} e^{tx} \Big|_a^b \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} \quad \text{m.g.f of } (x)$$

المولدة للعزوم المولدة للتوزيع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X بمساحات الدالة.

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \int_{t=a}^x \frac{1}{b-a} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b-a} \cdot t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{c.d.f of } (x).$$

- μ_X ① اور $X \sim U(3, 9)$ کا اوسط
 σ_X^2 ②
 $\mu_X(t)$ ③
 $P(X < 5)$ ④

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 3 < x < 9 \\ 0 & \text{ورنہ} \end{cases}$$

(کل)

$$\textcircled{1} E(X) = \mu_X = \frac{a+b}{2} = \frac{3+9}{2} = \frac{12}{2} = \underline{\underline{6}}$$

$$\textcircled{2} \sigma_X^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(9-3)^2}{12} = \frac{6^2}{12} = \frac{36}{12} = \underline{\underline{3}} > 0$$

$$\textcircled{3} \mu_X(t) = \frac{be^{bt} - ae^{at}}{t(b-a)} = \frac{9e^{9t} - 3e^{3t}}{6t}$$

$$\textcircled{4} \Pr(X < 5) = \int_3^5 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \cdot x \Big|_3^5$$

$$= \frac{1}{6} [5-3] = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

(a) H.W. اگر $X \sim U(-a, a)$ اور $\Pr(X > 1) = \frac{1}{3}$ ہے تو a کی قیمت کیا ہے؟

$$\Pr(X > 1) = \frac{1}{3}$$

(10)

توزيع الأسّي (Exponential Distribution)

تعالى بأنه المتغير العشوائى X يتبع التوزيع الأسّي إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f.) لهذا المتغير معرفة بالشكل الآتى :-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{و.و.} \end{cases}$$

إذا كان :-

λ : تمثل معلمة التوزيع وتكون $\lambda > 0$

هناك علاقة بين التوزيع الأسّي وتوزيع بواسون، عندما إذا كانت وقوف أحداث ما يتبع توزيع بواسون فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسّي.

وبالافتكاف وصف المتغير العشوائى X الذى يتبع التوزيع الأسّي بالشكل ادناه :-

$$X \sim \exp(\lambda)$$

دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسّي فتحقق الشروط

*
اي ان :-

$$f(x) > 0 \quad \text{①} \quad \int_0^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

(100)

$$\Rightarrow -e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^{\infty} = - \left[\frac{e^{-\infty}}{0} - \frac{e^0}{1} \right] \\ = 1$$

* الخصائص الرياضية للتوزيع الأسّي

إذا كان $X \sim \exp(\lambda)$ فإن

$$E(X) = \lambda, \quad v(X) = \lambda^2, \quad \mu_X(t) = (1 - \lambda t)^{-1}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

البرهان

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

بمطالبة بالتجزئة

$$u = x \quad du = dx$$

$$dv = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad v = -e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$uv - \int v du$$

$$-x \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

Zero

(100)

$$\Rightarrow -\frac{1}{\frac{1}{\lambda}} \left[e^{-\frac{x}{\lambda}} \right]_0^{\infty} = -\lambda [e^{-\infty} - e^0]$$

$$= \lambda = E(x)$$

$V(x)$: ~~المركبة~~

والمركبة

$\mu(t)$
المتوسط
للمركبة

$$= E e^{tx}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-x(\frac{1}{\lambda} - t)} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \times - \frac{1}{(\frac{1}{\lambda} - t)} e^{-x(\frac{1}{\lambda} - t)} \Big|_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{(\frac{1 - \lambda t}{\lambda})} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{1 - \lambda t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1 - \lambda t} \right) \Rightarrow (1 - \lambda t)^{-1} \text{ n.g.f. of } X$$

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\frac{t}{\lambda}} dt$$

$$\Rightarrow -e^{-\frac{t}{\lambda}} \Big|_0^x = -\left[e^{-\frac{x}{\lambda}} - e^0\right]$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad \text{c.d.f of } x.$$

مثال ٢: إذا كان $X \sim \exp(3)$ ، اوجد احتمالية

$$\Pr(1 < X < 3) , \Pr(X \leq 2)$$

$$\begin{aligned} \text{D) } \Pr(X \leq 2) &= \int_0^2 \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx \\ &= -e^{-\frac{x}{3}} \Big|_0^2 \Rightarrow -\left[e^{-\frac{2}{3}} - e^0\right] = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D) } \Pr(1 < X < 3) &= \int_1^3 \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx \\ &= -e^{-\frac{x}{3}} \Big|_1^3 = -\left[e^{-1} - e^{-\frac{1}{3}}\right] = \left[\frac{-1}{e} - \frac{-1}{e^{-\frac{1}{3}}}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D) } F(3) - F(1) &\Rightarrow \left(1 - e^{-\frac{3}{3}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) \\ &\Rightarrow \cancel{1} - e^{-1} - \cancel{1} + e^{-\frac{1}{3}} = \left[\frac{-1}{e} - \frac{-1}{e^{-\frac{1}{3}}}\right] \end{aligned}$$

التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية
للتفكير الاحصائية وتطبيقاتها بسبب ان أغلب الظواهر الطبيعية
تتبع التوزيع الطبيعي، فاستخدامات هذا التوزيع تدخل
في العديد من المجالات كالزراعة والصناعة والطب و...
ويعد هذا التوزيع بالتوزيع الجبرسي أو بتوزيع

- Gaussian

تعريف - يقال ان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي
اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{و.م.} \end{cases}$$

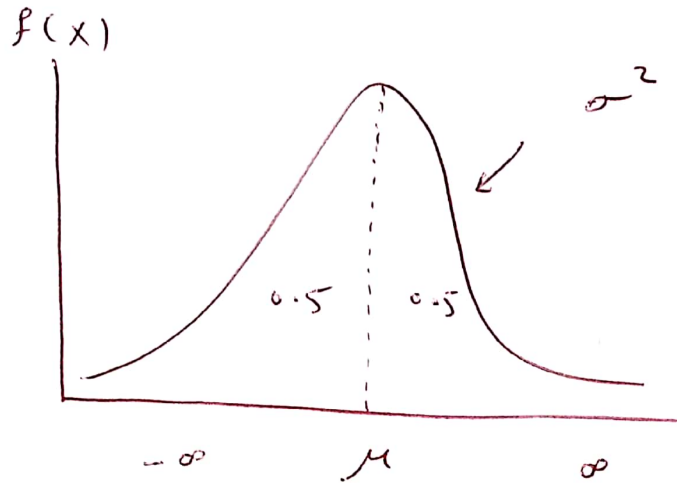
$-\infty < \mu < \infty$
 $\sigma^2 > 0$

اذا μ, σ يمثلان معلمات التوزيع الطبيعي
بحالة مكان وصف المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي
بالشكل الآتي:-

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

إذ ان:-
 μ يمثل التوقع ارياضي لـ X اي $E(X)$.
 σ^2 يمثل تباين المتغير العشوائي X اي $V(X)$.

التي يوضح مخطط الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع .



تلاحظ من الشكل اعلاه يكون الرسم على شكل جرس ومن هنا
حاصل تسمية التوزيع الطبيعي بالتوزيع الجرسية .

ملاحظة ١ يعتبر التوزيع الطبيعي من التوزيعات المتماثلة
(symmetric) اي ان الطرف الايمن يكون مساوياً
للطرف الايسر.

٢) بيانات التوزيع الطبيعي متماثل فأت :-

الوسط (mean) = الوسط (median) = المتوال (mode)

$$\mu =$$

٣) دالة غاما (Gamma function)

$$\Gamma_n = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)! , \Gamma_{n+1} = n \Gamma_n$$

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} , \Gamma_{\frac{3}{2}} = \Gamma_{(\frac{1}{2}+1)} = \frac{1}{2} \Gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

(١٥٧)

نريد ان نثبت ان $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ حيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ اذا كان

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

$$\text{let } y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + \mu$$

$$dx = \sigma dy$$

$$\begin{aligned} \because x \rightarrow -\infty, y &\rightarrow -\infty \\ x \rightarrow \infty, y &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \sigma dy$$

$$\text{let } w = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = 2w \Rightarrow y = \sqrt{2w}$$

$$dy = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2w}} dw$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w} \cdot \frac{dw}{\sqrt{2w}}$$

بما ان التوزيع الطبيعي متماثل اي ان الطرف الايمن مادي للطرف الايسر
لا يمكن ان ندمج كتابة التكامل اذ لا يصح الاستغناء عن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w} \cdot \frac{dw}{\sqrt{2w}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} w^{-\frac{1}{2}} e^{-w} dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} w^{\frac{1}{2}-1} e^{-w} dw$$

هذا هو دالة غاما
($\frac{1}{2}$)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

* الخصائص الرياضية للتوزيع الطبيعي:

إذا كانت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن:

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

$$f_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

$$\text{let } y = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad x = \sigma y + \mu$$

$$dx = \sigma dy$$

(104)

الرهان

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \\
 \Rightarrow \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{1}{2} y^2} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\text{Zero}} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy}_{=1}
 \end{aligned}$$

بالعودة الى البرهان
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$\therefore E(X) = \mu$ القيمة المتوقعة X

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu)^2 \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 y^2 + 2\mu \sigma y + \mu^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2} y^2} dy + \frac{2\mu \sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2} y^2} dy}_{\text{Zero}}$$

$$+ \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy}_{=1}$$

(17) = 1 بالبرهان السابق

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{1}{2} y^2} dy + \mu^2$$

$$\text{let } w = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = 2w \Rightarrow y = \sqrt{2w}, dy = \frac{dw}{\sqrt{2w}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2w}{w^{\frac{1}{2}}} e^{-w} \cdot \frac{dw}{\sqrt{2w}} + \mu^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^{\frac{3}{2}-1} e^{-w} dw + \mu^2$$

$$\Rightarrow \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} w^{\frac{3}{2}-1} e^{-w} dw + \mu^2$$

$$\Rightarrow \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma_{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma_{\frac{1}{2}} = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\therefore E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\therefore V(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2 \quad \text{فَيَقَالَتَايْنِ لِلْمَتَغَرِّيرِ } X$$

$$\mu_X(t) = E e^{tX}$$

الدالة المولدة للعزوم

$$\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$\text{let } y = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad x = \sigma y + \mu, \quad dx = \sigma dy.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t(\sigma y + \mu) \cdot e^{-\frac{1}{2} y^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{t\mu}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma y} \cdot e^{-\frac{1}{2} y^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{t\mu}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} y^2 + t\sigma y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{t\mu}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (y^2 - 2t\sigma y + t^2\sigma^2 - t^2\sigma^2)} dy$$

$$\Rightarrow \frac{t\mu}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (y - t\sigma)^2} e^{\frac{1}{2} t^2\sigma^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{t\mu + \frac{1}{2} t^2\sigma^2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (y - t\sigma)^2} dy$$

$$\Rightarrow \frac{t\mu + \frac{1}{2} t^2\sigma^2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} (y - t\sigma)^2} dy$$

$$\therefore \mu_x(t) = \frac{t\mu + \frac{1}{2} t^2\sigma^2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} (y - t\sigma)^2} dy}_{=1}$$

$\Rightarrow \text{M.G.F of } X$
(17C)

٤) التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal distribution

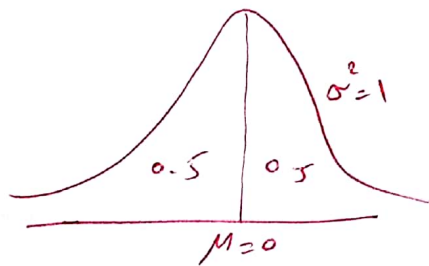
إذا كان المتغير العشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \text{ (standard normal distribution)}$$

أي أنه يقال للمتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري
بمتوسط μ ومقدار σ (بمتر) ($\mu = 0$) وبتباين σ^2 مقدار واحد ($\sigma^2 = 1$) راد دالة الكثافة الاحتمالية له تكون بالشكل الآتي:-

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} & -\infty < z < \infty \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

وإنه منحنى شكل التوزيع الطبيعي المعياري هو بالهندسة مشابه للتوزيع الطبيعي



تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، فإنه بالإمكان تحويله إلى التوزيع الطبيعي المعياري بوسط $\mu = 0$ وبتباين $\sigma^2 = 1$ وذلك من خلال العلاقة الآتية:-

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
 E(z) &= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot E(X-\mu) \\
 &= \frac{1}{\sigma} (E(X) - \mu) \\
 &= \frac{1}{\sigma} (\mu - \mu) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(z) &= V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X-\mu) \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1
 \end{aligned}$$

$$M_z(t) = E e^{tz} = E\left(e^t \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$\Rightarrow E\left(e^{\frac{tx}{\sigma}} \cdot e^{-\frac{t\mu}{\sigma}}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} E\left(e^{\frac{tx}{\sigma}}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} \cdot \mu_X \frac{t}{\sigma}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} \cdot \left[e^{\mu \frac{t}{\sigma}} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 \right]$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t\mu}{\sigma} + \frac{\mu t}{\sigma} + \frac{1}{2} t^2} = e^{\frac{1}{2} t^2}$$

الدالة المولدة للتوزيع الطبيعي القياسي

مثال ١.١.١: $X \sim N(20, (2.31)^2)$ اوجد $Pr(X \geq 21.11)$

$$Pr(X \geq 21.11) = Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{21.11 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= Pr\left(Z \geq \frac{21.11 - 20}{2.31}\right) = 1 - Pr(Z \leq 0.476)$$

نجد القيمة من جدول
مردف التوزيع الطبيعي
أو باستخدام الآلة الحاسبة

$$\Rightarrow 1 - 0.629 = 0.371$$

توزيع كاما Gamma distribution

تعريف: - يقال ان المتغير العشوائي X يتبع توزيع كاما إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له كالتالي:-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0$$

أي ان (α, β) تمثل معاملات توزيع كاما .
وبالاحتمالية وصف المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع كاما بالشكل التالي:-
 $X \sim G(\alpha, \beta)$

إذا كان -

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = (\alpha-1)!$$

الخصائص الرياضية للتوزيع

إذا كان $X \sim G(\alpha, \beta)$ فإنه -

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1+1} e^{-x\beta} dx$$

(177)

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1-1} e^{-x\beta} dx$$

تمثل نواة توزيع كاما بالمعادلة (α+1, β)
وبذلك فإن نتيجة التكامل مباشرة عن معلومة السابقة

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\cancel{\beta^\alpha} \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha \cancel{\Gamma(\alpha)}}{\Gamma(\alpha) \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) = E(x).$$

القيمة المتوقعة

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+2-1} e^{-x\beta} dx$$

تمثل نواة توزيع كاما بالمعادلة (α+2, β)
وبذلك فإن نتيجة التكامل مباشرة عن معلومة السابقة

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{\cancel{\beta^\alpha}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1) \cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\beta^\alpha} \beta^2}$$

$$\therefore V(x) = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha - \alpha^2}{\beta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} \right)$$

= V(x)
النتيجة

(177)

$$\mu_x(t) = E e^{tx}$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)} dx$$

يُعدّ توزيع كاي المثلث ($\alpha, \beta-t$)
 وعليه نكتب التكامل عبارة عن صيغة كاي

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta-t)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha = \mu.g.f.$$

$\circ \text{ If } X \sim G(\alpha, \beta)$

① توزيع بيتا Beta distribution

تعريف: يقال إن المتغير العشوائي X يتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{و.م.} \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0$$

أي أنه (α, β) تمثل معلمة التوزيع.

والاحتمال وصف المتغير العشوائي X بالشكل أدناه:

$$X \sim B(\alpha, \beta)$$

هذا هو البرهان للتوزيع

إذا كان $X \sim B(\alpha, \beta)$ فإن

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad V(X) = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta + 1)^2 (\alpha + \beta)^2}$$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

نلاحظ أن التوزيع بيتا بالمعنى $(\alpha+1, \beta)$ وعليه فإن نتيجة التكامل عبارة عن معلومة ثابتة

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta)} \Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha + \beta)}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = E(X) \quad \text{القيمة المتوقعة لـ } X$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+2-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

نواة توزيع بيتا بالاحصاء $(\alpha+2, \beta)$
 وبمليح قماره تثبته التكامل بمباركة في معلوميات الثاني

$\Rightarrow$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}\cancel{\Gamma(\beta)}} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cancel{\Gamma(\alpha)}\cancel{\Gamma(\beta)}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} = E(X^2)$$

$$\therefore V(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha^2+\alpha) - \alpha^2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^3(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 + \alpha) - \alpha^2(\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha + \alpha\beta + \beta^2 + \beta)}{(\alpha+\beta)^3(\alpha+\beta+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\alpha^4} + \cancel{\alpha^3} + 2\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \cancel{\alpha^2\beta^2} + \cancel{\alpha\beta^3} - \cancel{\alpha^4} - \cancel{\alpha^3\beta} - \cancel{\alpha^2\beta^2} - \cancel{\alpha\beta^3} - \cancel{\alpha^4}}{(\alpha + \beta)^3 (\alpha + \beta + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{(\alpha + \beta)^3 (\alpha + \beta + 1)} = \frac{(\alpha + \beta) \alpha \beta}{(\alpha + \beta)^{\frac{3}{2}} (\alpha + \beta + 1)}$$

$$\pi_V(x) = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)} = \text{التحسين للـ}$$

$$X \sim B(\alpha, \beta)$$

نموذج سبيل