

التحليل العددي

المصادر:

١- "التحليل العددي" الدكتور نسيم إبراهيم العبيدي .

٢- "التحليل العددي وطرق حسابية عددية".

أ.د. محمد منصور صبح
د. صالح بن مسعود الخزي

٣- "التحليل العددي وطرق حسابية عددية" أ.د. محمد منصور صبح
د. صالح بن مسعود الخزي .

المخرجات

مقدمة على التحليل العددي .

أنواع الأخطاء .

أمثلة تطبيقية عليها .

مقدمة في حل المعادلات غير الخطية .

طريقة الرسم

طريقة التحليل

مقدمة في الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية

(أ) طريقة التشفيف .

(ب) طريقة الموضع الكاذب

(ج) طريقة القطع .

(د) الطريقة التكرارية للنقطة الصاعدة .

(هـ) طريقة نيوتن رافسون .

حل منظومات معادلات غير خطية .
الحل العددي لنظام المعادلات الخطية .
طرق مباشرة .
طرق تكرارية .

مقدمة في الاندراج
أمثلة تطبيقية .
الفروقات المتتالية .
الفروقات التقدمية + أمثلة .
الفروقات المركزية + أمثلة .
الفروقات التراجعية + أمثلة .
الفروقات المتتالية النسبية

مقدمة على التكامل العددي
طريقة شبه المنحرف + أمثلة .
طريقة سمسون + أمثلة .
طريقة رمبرك + أمثلة .

مقدمة طرق حل المعادلات التفاضلية بطرق عددية .
طريقة ميلر + أمثلة .
طريقة أويلر + أمثلة .
طريقة أويلر المظروعة + أمثلة .

مقدمة عن التليل العددي.

- مقدمة: في العديد من المسائل الرياضية التي يمكن عرضها يوجد لها حل. ولكن في بعض الأحيان يوجد مسائل من المستحيل إيجاد الحل لها بواسطة الطرق المعروفة كطرق الجبر والحساب أي أننا لا نستطيع الحصول على الحل المأمون لها لذا نلجأ عند الحاجة إلى إيجاد الحل التقريبي (العددي) للمسألة الرياضية المراد إيجاد الحل لها.

مثال ١:

نلاحظ أن الحل المأمون لـ $\int_0^4 e^{x^2} dx$ نظرياً موجود وذلك لأن دالة التكامل e^{x^2} مستمرة على الفترة $[0, 4]$ ولكن لا نستطيع إيجاد دالة الحل لذلك نلجأ إلى الحل بالطرق العددية لعدم إمكانية الحل بالطرق الاعتيادية.

مثال ٢:

إيجاد المطبق $AX = b$ الذي يمثل الحل الوحيد للنظام $AX = b$ حيث $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ، $x, b \in \mathbb{R}^n$.
لذا عندما تكون n كبيرة فأنه من الصعب إيجاد الحل x لذا نلجأ إلى الطرق العددية لإيجاد قيمة المطبق x شرط أن تكون A مصفوفة غير ساذة (المحدد لا يساوي صفراً).

تعريف:

- التحليل العددي: ان التحليل العددي هو علم التقريب حيث يتم استخدام طرق عددية لحل المسائل المعقدة وغير قابلة للحل بالطرق التحليلية وينشأ عن استخدام هذه الطرق العددية أخطاء يجب معرفتها عند اكتمال حل أي اجابة وذلك لكي نتمكن من قبول هذه الاجابة أو رفضها.

- الخوارزمية: هي مجموعة من التوجيهات لتفيذ عمليات حسابية مضممة بشكل يؤدي الى حل المسألة المطلوبة وبعدد محدود من الخطوات.

الأخطاء:

ليكن a قيمة مخطئة، a^* قيمة تقريبية لها عندئذ يعرف الخطأ بالخطأ المطلق بالشكل التالي

$$e_a = |a - a^*| = E \quad (\text{Absolute error})$$

ويعرف الخطأ النسبي (Relative error)

$$S_a = \frac{|a - a^*|}{|a|} = \frac{E}{|a|} = Er \quad |a| \neq 0$$

أما الخطأ المئوي (Percentage error) هو عبارة عن الخطأ النسبي مضروباً بـ ١٠٠ أي يساوي

$$E_p = 100 E_r = \frac{|a - a^*|}{|a|} \times 100, \quad |a| \neq 0$$

مثال: إذا كان جذر المعادلة هو $a = 1.55$ بينما
 بالتابع طريقة عودية معينة حصلت على قيمة تقريبية
 $a^* = 1.49$ فإذن:
 ① الخطأ المطلق E
 ② الخطأ النسبي E_r
 ③ الخطأ المئوي E_p

الحل:

$$E = |a - a^*| = |1.55 - 1.49| \quad ①$$

$$E = 0.06$$

$$E_r = \frac{E}{|a|} = \frac{0.06}{1.55} = 0.0387 \quad ②$$

$$E_p = E_r \times 100 = 0.0387 \times 100 \quad ③$$

$$E_p = 3.87$$

مصادر الأخطاء :-

إن الخطأ الكامن في حل تقريرين في مسألة ما غالباً ما يكون بسبب تراكم عدة أخطاء ناتجة من :-

١- أخطاء حسابية (متأصلة) Inherent Errors

وهو الخطأ الناتج من تقسيم البيانات الداخلة والناتجة من عدم دقة القياسات مثل قراءات بعض الأجهزة في تجربة فيزيائية .

٢- أخطاء صياغة (خلط) Formulation Errors

وهو الخطأ الناتج من خلط مسألة معينة وتحويلها إلى مسألة حسابية حيث أن النموذج الرياضي يعطي الصورة الحقيقية للظاهرة وذلك نادراً ما يحدث بل يفرض العوامل والمؤثرات في هذه الحالة عندئذ النتائج تكوناً محملة بأخطاء صياغية .

٣- أخطاء حسابية Computation Errors

٤- أخطاء التقريب Truncation Errors

وهو الخطأ الناشئ عن استبدال عملية غير منتهية (Infinite process) بعملية منتهية (Finite process) مثلاً عند حساب قيمة دالة معرفة بشكل متسلسلة غير منتهية فإن قيمة الدالة لا يمكن احتسابها باستخدام جميع حدود المتسلسلة بل نتوقف عند حد معين هنا التوقف يولد خطأ في قيمة الدالة .

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

عند حساب $\sin 3$

$$\sin 3 = 3 - \frac{3^3}{3!} + \frac{3^5}{5!} - \dots \neq \text{اقم}$$

لذلك نتوقف عند حد معين ولذلك
يظهر لدينا افطار وهو خطأ البتر

$$\sin 3 \approx 3 - \frac{27}{6} \approx -1.5$$

(ب) افطار التدوير (التقريب) Round of Errors

ينجم هذا الخطأ عن تقريب الكسور العشرية ذات
المرتبة العشرية العددية الى اعداد ذات مراتب
عشرية تتناسب مع طبيعة المسألة والرقعة المطلوبة
مثلاً

$$\frac{1}{3} = 0.33333\dots \approx 0.3333$$

$$3.1415926 \approx 3.14159$$

$$0.5235724 \approx 0.5236$$

جـ. الخطأ المتراكم Accumulation Error

هو الخطأ الناتج من تكرار مجموعة من العمليات الحسابية خطوات
متتالية (عند حل بعض الطرق العددية التكرارية) ويزداد
بالاتتماد على القيم التقريبية المحسوبة من الخطوات
السابقة.

الحاضرة الثانية

الأنفاد في العمليات الحسابية

لتكن x^* و y^* قيمتين تقريبتين للعددين x و y ونخطأ مطلق e_x و e_y و الخطأ النسبي S_x و S_y .

1- الخطأ في عمليتي الجمع والطرح

الخطأ المطلق

$$e_{x+y} = |(x+y) - (x^*+y^*)| = x+y - (x^*+y^*)$$

$$= x+y - x^* - y^*$$

$$= (x - x^*) + (y - y^*)$$

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

Note الخطأ المطلق كامل جمع عددي يساوي

الخطأ المطلق للعدد الأول + الخطأ المطلق للعدد الثاني.

الطرح

$$e_{x-y} = |(x-y) - (x^*-y^*)|$$

$$= x-y - x^* + y^*$$

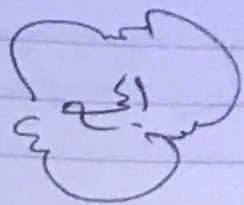
$$= (x - x^*) - (y - y^*)$$

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

Note

الخطأ المطلق كامل طرح عددي يساوي

الخطأ المطلق للعدد الأول - الخطأ المطلق للعدد الثاني.



الخطأ المنسب:

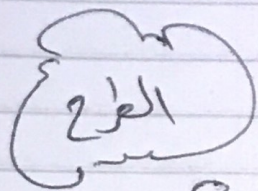
$$S_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x+y}$$

$$= \frac{e_x + e_y}{x+y}$$

$$S_x = \frac{e_x}{x} \Rightarrow e_x = x S_x$$

$$S_y = \frac{e_y}{y} \Rightarrow e_y = y S_y$$

$$S_{x+y} = \frac{x S_x + y S_y}{x+y}$$



$$S_{x-y} = \frac{e_{x-y}}{x-y}$$

$$= \frac{e_x - e_y}{x-y}$$

$$S_{x-y} = \frac{x S_x - y S_y}{x-y}$$

5. الخطأ في عملتي الفرز والقسم

الخطأ المطلق

$$e_{xy} = |xy - x^* y^*|$$

$$= xy - (x - e_x)(y - e_y)$$

$$e_x = x - x^* \Rightarrow x^* = x - e_x$$

$$e_y = y - y^* \Rightarrow y^* = y - e_y$$

$$= \cancel{xy} - \cancel{xy} + x e_y + y e_x - e_x e_y \rightarrow \text{قيمة قليلة جداً}$$

(9)

ويُفهم ان $e_x e_y$ يعاقرها ان الأعداد صغيرة بالنسبة
للقوة التفاضلية عندئذٍ نحل على

$$e_{xy} = x e_y + y e_x$$

النتيجة

$$S_{xy} = \frac{e_{xy}}{|xy|}$$

$$= \frac{x e_y + y e_x}{xy}$$

$$= \frac{x e_y}{xy} + \frac{y e_x}{xy}$$

$$= \frac{e_y}{y} + \frac{e_x}{x}$$

$$S_{xy} = S_y + S_x = S_x + S_y$$

$$\frac{e_x}{y} \stackrel{??}{=} \frac{x}{y} \left(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y} \right)$$

H.W

$$S_{xy} \stackrel{??}{=} S_x - S_y$$

مثال: أوجد الحد الأعلى للخطأ المطلق في المجموع

$$x+y = 12.\overset{x}{2}3 + 3.\overset{y}{1}2$$

Note: استخدم القانون

$$e_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10^n} \right)$$

حيث أن n هي عدد المراتب العشرية

$$e_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10^2} \right) = 0.0005$$

$$e_y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10^2} \right) = 0.0005$$

$$e_{x+y} = e_x + e_y$$

$$= 0.0005 + 0.0005$$

$$= 0.001$$

Hint: أوجد الحد الأعلى للخطأ الحاصل لضرب العددين
المطلقين.

$$x \cdot y = (2.23)(12.3)$$

يعرف التعريف الخاص بالمقياس

المقياس: يعرف مقياس المتجه (Vector norm) على $\mathbb{R}^n$ على أنه دالة $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ وتحقق ما يلي:

- 1- $\|x\| \geq 0$ و $\forall x \in \mathbb{R}^n$
- 2- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- 3- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}^n$
- 4- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ و $x, y \in \mathbb{R}^n$

يوجد عدة أنواع من المقاييس سنعرف ثلاثة فقط:

$$1- \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{المقياس المطلق}$$

$$2- \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{المقياس الاقليدي}$$

or (2-norm)

$$3- \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{المقياس المنتظم}$$

or (∞ norm)

ملاحظة: جميع المقاييس الثلاثة هي حالة خاصة من المقاييس p والذي يعرف بـ:

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

مثال: إذا كان $X \in \mathbb{R}^3$ $X = (1, -1, -2)^T$

جدد المقاييس المثلثية ① المقاييس الإقليدية ② المقاييس المتكافئة

$$\begin{aligned}\|X\|_1 &= \sum_{i=1}^{n=3} |X_i| = |X_1| + |X_2| + |X_3| \\ &= |1| + |-1| + |-2| \\ &= 1 + 1 + 2 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|X\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n=3} X_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|X\|_\infty &= \max |X_i| \\ &= \max \{ |X_1|, |X_2|, |X_3| \} \\ &= \max \{ 1, 1, 2 \}\end{aligned}$$

$$\|X\|_\infty = 2$$

الحلول العددية للمعادلات اللاخطية

هناك العديد من المسائل الرياضية التي تتطلب حلها
الى إيجاد الجذور للمعادلة اللاخطية $f(x)=0$ وتكون في
النسبة الاكبر لا يمكن إيجاد هذه الجذور بالطرق
القليدية الجبرية .

لذا نلجأ الى إيجاد الجذور باستخدام الطرق العددية
(الخوارزميات) ويستخدم الاسلوب .

المعادلات اللاخطية

هذه المعادلات التي تكون حرجتها الجبر من واحد
او تحتوي على دوال متسامية ($\sin x, \cos x, e^x, \ln x, a^x$)

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x + 1 = 0 \\ \sin x + x = 0 \\ e^x = 0 \\ a^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{معادلات} \\ \text{لا خطية.} \end{array}$$

الجذر: يسمى العدد α جذراً للمعادلة $f(x)$
اذا كانت $f(\alpha) = 0$

ملاحظة
اذا كان α جذراً مضموناً للمعادلة $f(x)=0$ فإن α_n
جذراً تقريبياً لها اذا

$$|\alpha - \alpha_n| < \epsilon$$

أو

$$|f(\alpha_n)| \leq \delta$$

(١٤)

حيث ان كل من ϵ و δ مقادير موجبة جذا قبل دقة
الكل التقريب.

تعيين مواقع جذور المعادلة $f(x) = 0$

على فرضيات الحالة δ دالة مستمرة على فترة
محدودة وان جذورها جذور حقيقية.

1- اذا كانت δ متعددة حدود (تعيين مواقع الجذور
من خلال الحد الاعلى والاسفل للجذر).

يمكن تعيين مواقع الجذور للمعادلة $f(x) = 0$ بالافقاد
على النظرية التالية:

اذا كانت α جذراً للمعادلة

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

فان

$$|\alpha| \leq 1 + \max |a_i| = 1 + \lambda$$

حيث ان $\lambda = \max |a_i|$ وان a معاملات قوى x

مثال: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$

اذا $\lambda = \max |a_i|$ و $|\alpha| \leq 1 + \lambda$

$$\lambda = \max \{1, 1, 2, 3\}$$

$$\lambda = 3$$
$$|\alpha| \leq 1 + 3 = 4$$

(10)

$$-4 \leq x \leq 4$$

ج- تعيين مواقع الجذور باستخدام الرسم البياني (المعروف الهندسي).

پ- نرسم $P(x) = y$ عندئذ نقطت تقاطع تقاطع منحني الحالة مع المحور السيني (x-axis) تمثل جذور (جذور تقريبية) للمعادلة $P(x) = 0$.

ب- اذا كانت الحالة $y = f(x)$ من الدوال التي يكون من الصعب رسمها عندئذ تكون $f(x)$ بالشكل

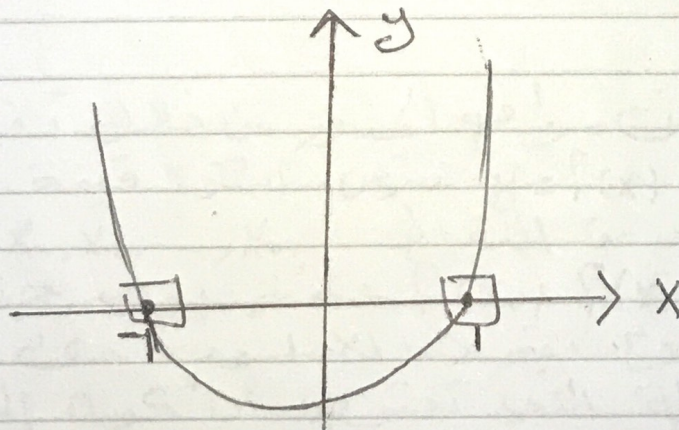
$$f_1(x) = f_2(x)$$

حيث كل من $f_1(x)$ و $f_2(x)$ يمكن رسمها بسهولة لذلك تكون مساقط نقاط تقاطع المنحنين على المحور السيني جذوراً أو جذوراً تقريبية للمعادلة $P(x) = 0$.

$$P(x) = x^2 - 1 = 0$$

مثال
اكد

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \sqrt{1} \\ \Rightarrow x &= -1 \\ \text{or } x &= 1 \end{aligned}$$



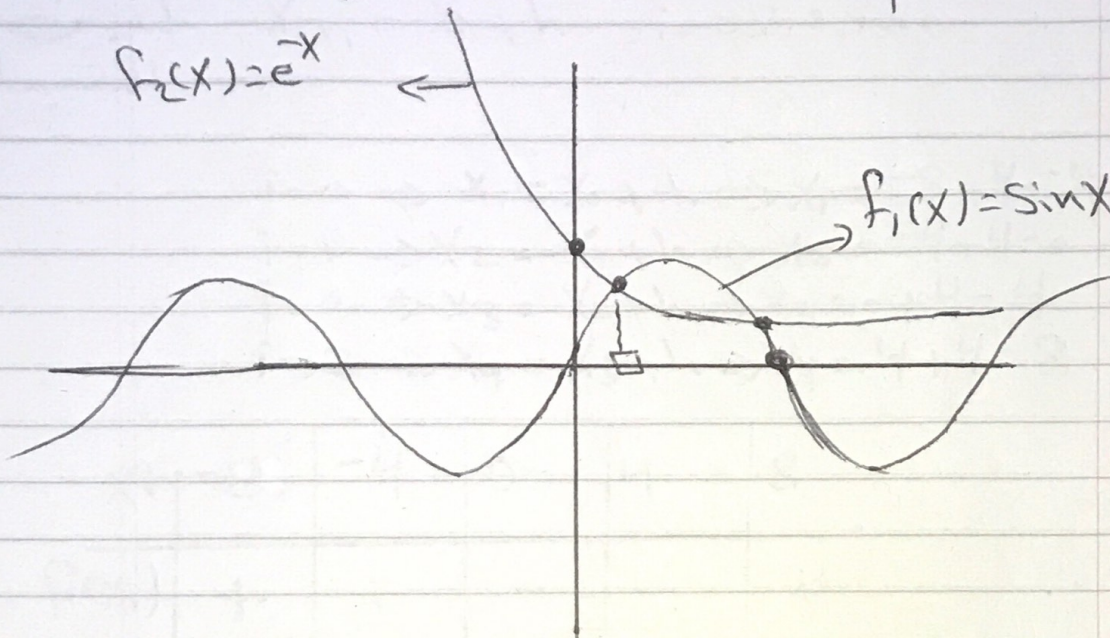
$$f(x) = e^x \sin x - 1 = 0$$

مثال

الكل

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= 1 \\ \sin x &= e^{-x} \\ f_1(x) &= f_2(x) \end{aligned}$$

في الرسم البياني نبين فقط مواقع الجذور



٣- نعين مواقع الجذور من خلال تغير إشارة الدالة $y = f(x)$ ندرس إشارة قيمة الدالة $f(x)$ عند عدد من النقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإذا كانت $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ عندها يوجد جذر في الفترة $[x_i, x_{i+1}]$ فقد هنا الأسلوب على صيغة القيمة المتوسطة التي تفترض أن تكون الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[x_i, x_{i+1}]$ وأن $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$

مثال: عين مواقع جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$$

على الفترة $[-8, 8]$.

الحل:

① $(h=4)$

لتعيين
التقسيمات

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i=0, 1, 2, \dots$$

$$i=0 \Rightarrow x_1 = x_0 + h \Rightarrow x_1 = -8 + 4 = -4$$

$$i=1 \Rightarrow x_2 = x_1 + h \Rightarrow x_2 = -4 + 4 = 0$$

$$i=2 \Rightarrow x_3 = x_2 + h \Rightarrow x_3 = 0 + 4 = 4$$

$$i=3 \Rightarrow x_4 = x_3 + h \Rightarrow x_4 = 4 + 4 = 8$$

x_i	-8	-4	0	4	8
$f(x_i)$	+	+	-	-	+

$$f(-8) \cdot f(-4) \overset{+}{>} 0 \quad \times$$

$$f(-4) \cdot f(0) \overset{-}{<} 0 \quad \checkmark$$

$$f(0) \cdot f(4) \overset{+}{>} 0 \quad \times$$

$$f(4) \cdot f(8) \overset{-}{<} 0 \quad \checkmark$$

$$5 - (h=2)$$

$$x_0 = -8$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = -4$$

$$x_3 = -2$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 2$$

$$x_6 = 4$$

$$x_7 = 6$$

$$x_8 = 8$$

وأيضاً نقوم بحساب قيمة الدالة
عند كل هذه النقاط ثم
نختار الفترات

الطرائق التكرارية للاتحاد الجذور التفرعية
للمعادلات غير الخطية

١- طريقة تنصيف المجال Bisection Method

لتكن $f \in C[a, b]$ وأن $f(a) \cdot f(b) < 0$ لذا فإن هناك جذر وهو

$$c = \frac{a+b}{2}$$

فإن كان $f(c) = 0$ فإن c هو الجذر المطلوب
وإذا لم تكن فأننا نأخذ الفترتين a و c أو c و b
ثم نكرر عملية التنصيف مرة أخرى على إحدى
الفترات ونستمر إلى أن تحقق شرط التقارب

$$|c_n - c_{n-1}| < \epsilon \quad (19)$$

$$\delta \leq |f(n)| \text{ أو } \delta$$

حيث ان ϵ و δ مقادير صغيرة جداً فكل دقة اكل
التقريب.

خوارزمية طريقة التشفيف

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$

خطوة (1)
ادخال a, b, N, ϵ (الجزء من الخطوات) و ϵ (دقة اكل) الدالة
 $f(x)$.

خطوة (2)
حساب $f(a) \times f(b) < 0$ فمع $i = 1$ والانتوقف مع
ابدال قيم a, b .

خطوة (3)
اذا كان $N < i$ كرر الخطوات (4 - 7).

خطوة (4)
مع $c = \frac{a+b}{2}$ واصل $f(c)$.

خطوة (5)
اذا كان $(f(c) = 0)$ أو $(|b-a| < \epsilon)$ فان c
هو الجذر وتوقف.

خطوة (6)
والامع $i = i + 1$

خطوة (7)
اذا كان $f(c) \times f(a) > 0$ مع $a = c$ و $b = c$
(c, i)

التقارب والخطأ المتوقع في طريقة تنصيف المجال

مبرهنة: لتكن f متصلة على $[a, b]$ وأن $f(a) \neq f(b)$ فإن طريقة تنصيف المجال:

1. تولد المتتالية $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ تقترب إلى الجذر الممنوع α .

2. تحقق $e_n = |c_n - \alpha| \geq \frac{b-a}{2^n}$ حيث n عدد

التكرارات $n, n \geq 1$.

ملاحظة: يمكننا تقدير عدد التكرارات n اللازمة للوصول إلى دقة معينة ϵ كما يلي:

$$e_n \leq \frac{b-a}{2^n} < \epsilon$$

$$\frac{b-a}{2^n} < \epsilon$$

$$b-a < 2^n \epsilon$$

$$2^n > \frac{b-a}{\epsilon}$$

$$\ln 2^n > \ln \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right)$$

$$n \ln 2 > \ln(b-a) - \ln \epsilon$$

$$n > \frac{\ln(b-a) - \ln \epsilon}{\ln 2}$$

مثال
إذا كانت $a=0, b=2$ و $\epsilon = 10^{-3} = 0.001$
احسب قيمة n التقريبية.

$$n > \frac{\ln(b-a) - \ln \epsilon}{\ln 2} \quad \underline{\text{الكل}}$$

$$n > \frac{\ln(2-0) - \ln(0.001)}{\ln 2}$$

$$n > 10.9657$$

$$n \approx 11$$

خواص طريقة التصفية -

١. تحتاج إلى عدد كبير من الخطوات لأنها بطيئة جداً
عند إيجاد الجذر وعليه رتبة التقارب تكون خطية
(Linear)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha|}{|\alpha_n - \alpha|^R} = k$$

حيث R رتبة التقارب.

$R=1$ (linear) التقارب خطي

$R=\frac{1}{2}$ (super linear) التقارب فوق الخطي

$R=2$ (Quadratic) التقارب تربيعي

٢- مهتمة الوصول الى الحل لهذا فهي ذات نوع اقترابي شمولي (globally Convergent).

٣- يتم تقليص الفترات بعامل نصف ($\frac{1}{2}$).

٤- رتبة الخطأ فيها $O(2^{-n})$ حيث ان n عدد الخطوات.

مثال: حدد جذراً للمعادلة $f(x) = x \sin x - 1 = 0$ الواقع ضمن الفترة $[0, 2]$ باستخدام طريقة التنصيف.

الحل

$$f(x) = x \sin x - 1$$

$$a_0 = 0, b_0 = 2$$

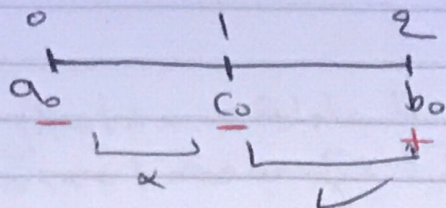
$$f(a_0) = -1 \quad f(b_0) = 0.81859$$

$$f(a_0) \times f(b_0) < 0$$

$$c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

$$f(c_0) = f(1) = -0.158529$$

(٢٣)

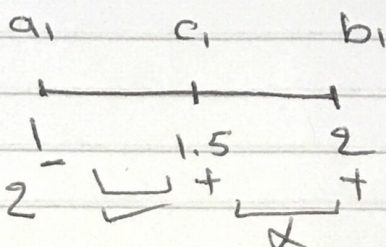


$$f(a_0) * f(c_0) = - * - > 0 \quad \times$$

$$f(c_0) * f(b_0) = - * + < 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow a_1 = c_0 = 1, \quad b_1 = b_0 = 2$$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$



$$F(c_1) = F(1.5) = 0.496242$$

$$f(a_1) * f(c_1) < 0 \quad \checkmark$$

$$f(c_1) * f(b_1) > 0 \quad \times$$

$$a_2 = a_1 = 1, \quad b_2 = c_1 = 1.5$$

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

⋮

How

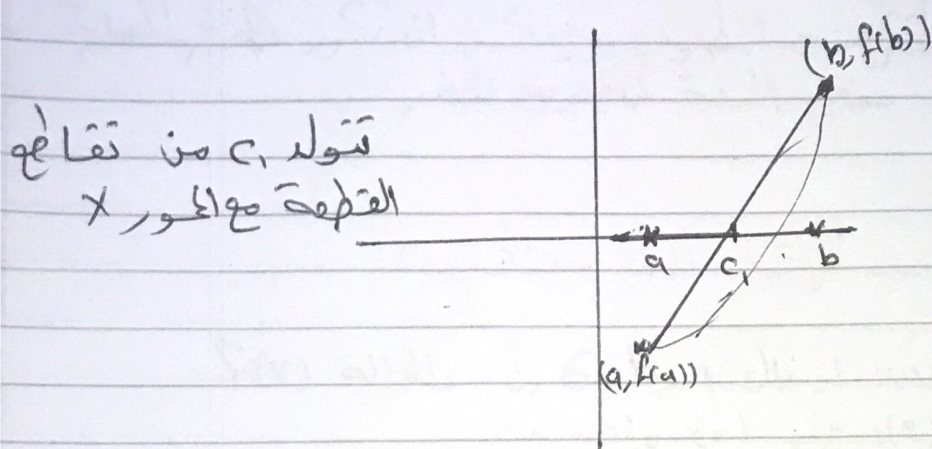
① جذرًا للمعادلة $f(x) = x \log x - 1 = 0$
نضع الفترة $[1, 2]$ بدقة 0.0001 بطريقة
التصنيف ثم نجد قيمته ≈ 1.8

② لدينا المعادلة $f(x) = 3x^3 - x + 1$
معرفة ضمن الفترة $[-1, 0]$ جذرًا للمعادلة
بطريقة التصنيف إذا علمت أن مقدار الخطأ لا يتجاوز
 $\epsilon = 0.0005$

٢٠ طريقة الموضع الكاذب False position method

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة ضمن الفترة المغلقة $[a, b]$ وكنت
شروط ان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفان بالاسار.

نرسم قطعة مستقيمة (L) تصل بين النقطتين $(a, f(a))$
و $(b, f(b))$ وتقطع المحور x عند النقطة $(c_1, 0)$



عليه حسب قيمة c_1 من معادلة خط مستقيم L

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - f(b)}{x - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نضع $x = c_1$ وعليه فإن $y = 0$

$$\frac{0 - f(b)}{c_1 - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$(c_1 - b) (f(b) - f(a)) = (b - a) (-f(b))$$

(٢٦)

$$(c_1 - b) = \frac{-f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$c_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

وهو التقريب المطلوب ويمكن ان تكرر هذه العملية
للمره مره اخرى الدقة المطلوبة الجذر.

خوارزمية طريقة المتوسط الكاذب

خطوة (1): اذ قال a و b و c و d والدالة $f(x)$.
خطوة (2): خذ $a=1$ و $b=1$ و $c=1$ و $d=1$

$$dx = \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

$$c = b - dx$$

خطوة (3): اذا كان $f(c) = 0$ اخرج c هذا الجذر وتوقف.

خطوة (4): واذ كان $f(b) \neq f(c) > 0$ خذ $b=c$ و
و $f(b) \neq f(c) < 0$ خذ $a=c$ و $f(a) = f(c)$.

خطوة (5): حسب مقياس التوقف اذا كان $|dx| < \epsilon$ و
 $|f(c)| < \epsilon$ اخرج الجذر c وتوقف واذ حسب الى خطوه
(2) وخذ $(+1)$ و (-1) .

مواضع طريقة الموضع الكاذب

- ١- هذه الطريقة تتقارب أسرع من طريقة التصفيف.
- ٢- نلاحظ عدم استمرارية مقياس التوقف $|b_n - a_n|$ أقل من ϵ سبب إذا كان $|b_n - a_n|$ تقرب إلى الصفر كان المقياس الثاني $\phi(n)$ و $\phi(n) \neq 0$.
- ٣- مجموعة الحدود إلى الجذر ولها منها نوع اقترابي سمي (global convergent).
- ٤- سرعة الاقتراب خطية (Linear Convergent).

مثال: استخدم طريقة الكاوتن لإيجاد جذر الدالة
 $f(x) = x \sin x - 1$ في الفترة $[0, 2]$.

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 2 \quad \therefore \text{كل}$$

$$f(a_0) = -1, \quad f(b_0) = 0.8185949$$

$$f(a) \times f(b) < 0$$

$$c_0 = b_0 - \frac{f(b_0)(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

$$c_0 = 2 - \frac{f(2)(2 - 0)}{f(2) - f(0)}$$

$$c_0 = 2 - \frac{0.8185949(2)}{0.8185949 - (-1)}$$

$$c_0 = 1.0997502$$

$$f(c_0) = -0.0200192$$

$$f(b_0) \times f(c_0) < 0 \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = c_0 \\ b_1 = b_0 \end{matrix}$$

$$[a_1, b_1] = [1.0997502, 2]$$

$$c_1 = b_1 - \frac{f(b_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

(c4)

$$c_1 = 1.1212407$$

$$P(c_1) = 0.0098345$$

$$P(b_1), P(c_1) > 0 \Rightarrow b_2 = c_1, a_2 = a_1$$

$$[a_2, b_2] = [1.0997502, 1.1212407]$$

$$c_2 = 1.1141612$$

$$P(c_2) = 0.00000056$$

$$c_3 = 1.1141571$$

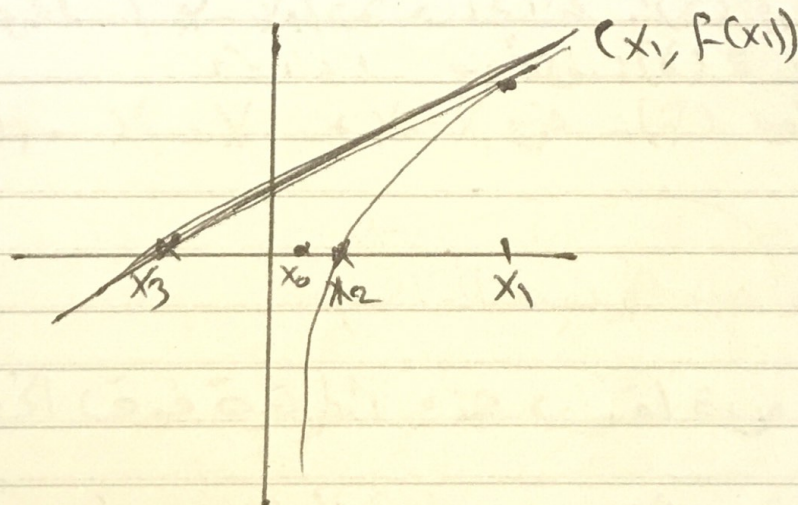
⋮

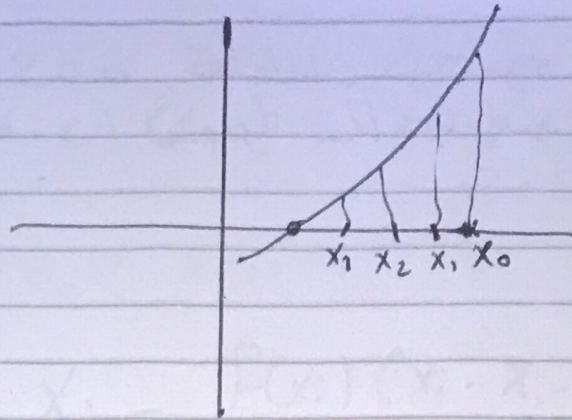
٣- طريقة القاطع Secant Method

هذه الطريقة تشبه طريقة الموضع الكاذب .

أولاً نختار تقريبات x_0, x_1 وليسا بالضرورة أن يكونا على جهرس الجذر α كما في الموضع الكاذب ويجب أن يكونا اختياراً ، التقريبات الأولى x_0, x_1 بحيث ميل المستقيم الواسل بين $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ ليس قريباً من الصفر بمعنى مستقيمة الدالة f قريب التقريبات ليست قريبة من الصفر لكي لا نحصل على متتالية متقاربة يتطلب أن f متباعدة ويحققان هذه العملية بأخذ x_0, x_1 ونبدأ x_2 على المماس بمرمات x_1, x_2 لإيجاد النقطة التقريبية الجديدة x_3 وهكذا حسب الطريقة التالية:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$





خوارزمية طريقة القاطع

- خطوة (1): اذ قال $x_0, \epsilon, N_0, f(x)$.
- خطوة (2): ضع $i = 1$ واحسب $y_0 = f(x_0)$ و $y_1 = f(x_1)$.
- خطوة (3): عندما $N_0 \leq i$ نغز الخطوات من 4 الى 7.
- خطوة (4): ضع $X = x_1 - y_1(x_1 - x_0) / (y_1 - y_0)$.
- خطوة (5): اذا كان $|X - x_1| < \epsilon$ اطبع X هو الجذر وتوقف.
- خطوة (6): اوالأضع $i = i + 1$.
- خطوة (7): ضع $x_0 = x_1$ و $x_1 = X$ و $y_0 = y_1$ و $y_1 = f(X)$.

خواص طريقة القاطع

1. سرعة اقتراب هذه الطريقة فوق الخميني (Super Linear).
2. تحتاج الى حساب قيمة الدالة مرة واحدة في كل تكرار.
3. نوع الاقتراب محلي (Locally Convergent) لذا تحتاج ان تكون نقاط البداية على احد طرفي الجذر.

مثال: حل جزر المعادلة $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$
 باستخدام طريقة القاطعة $X_1 = -2.4$ و $X_0 = -2.6$ ان $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$

الحل

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$i=1$

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\ &= -2.4 - \frac{f(-2.4)(-2.4 + 2.6)}{f(-2.4) - f(-2.6)} \end{aligned}$$

$$X_2 = -2.106599$$

$$|X_2 - X_1| = |-2.106599 - (-2.4)| \notin \epsilon$$

$i=2$

$$X_3 = X_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$X_3 = -2.0226414$$

$$|X_3 - X_2| \notin \epsilon$$

$$\boxed{i=3}$$

$$X_4 = X_3 - \frac{f(X_3)(X_3 - X_2)}{f(X_3) - f(X_2)}$$

$$X_4 = -2.001511$$

$$|X_4 - X_3| \notin \epsilon$$

$$\boxed{i=4}$$

$$X_5 = -2.0000225$$

$$|X_5 - X_4| \notin \epsilon$$

$$\boxed{i=5}$$

$$X_6 = -2$$

$$|X_6 - X_5| = 0.0000225 < \epsilon$$

$\epsilon = 0.00005$

٤- طريقة نيوتن رافسون (Newton-Raphson Method)

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق، نختار x_0 نقطة بداية وتكون قريبة من الجذر α نرسم $y = f(x)$ نقطة المستقيم المماس للمنحنى عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ يقطع المحور x في نقطة ولنكن x_1 ويتم حساب قيمة x_1 كالتالي:

على اعتبار أن الميل المماس عند x_0 هو $m = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$$\therefore m = f'(x_0)$$

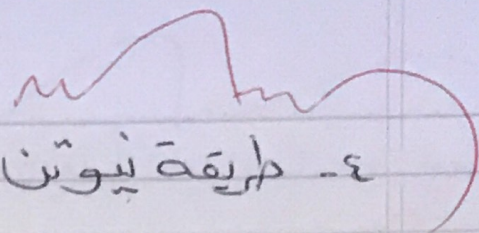
$$\therefore f'(x_0) = \frac{-f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$(x_1 - x_0) f'(x_0) = -f(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وبعد n من الخطوات نحصل على قيمة الجذر التقريبي لطريقة نيوتن رافسون

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$



خوارزمية طريقة نيوتن-رافسون

خطوة (1): اذخال الدالة $f(x)$ ومشتقة الدالة $f'(x)$ ، x_0 ، ϵ ، N_0 (عدد التكرارات).

خطوة (2): ضع $i = 1$.

خطوة (3): اذا $i \leq N_0$ كرر الخطوات من 4 الى 6.

خطوة (4): احسب الجذر

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

خطوة (5): اذا كان $|x - x_0| < \epsilon$ فإن x هو الجذر التقريبي وتوقف.

خطوة (6): والامض $x_0 = x$ و $i = i + 1$.

تقارب طريقة نيوتن-رافسون

مبرهنة: لتكن $f \in C[a, b]$ ، اذا كان $\alpha \in [a, b]$ بحيث ان $f(\alpha) = 0$ وان $f'(\alpha) \neq 0$ فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث ان طريقة نيوتن-رافسون تكون متتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب الى الجذر α لكل $x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

خواص طريقة نيوتن-رافسون

1- سرعة التقارب تربيعية (Quadratic Convergent) حيث ان الخطأ المطلق

$$e_{n+1} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} e_n^2$$

2- نوع التقارب محلي (Locally Convergent) لانطقة البداية يجب ان تكون قريبة من الجذر المطلوب.

٣- يتطلب حساب مشتقة الدالة عند كل تكرار ولا يمكن
 ضمان التقارب عندما $f'(x) \rightarrow 0$

الشروط الواجب توفرها لكي تتقارب طريقة نيوتن -
 رافسون عند نقطة البداية $x_0 \in [a, b]$

١- ان عامل ضرب $f(a) \cdot f(b) < 0$ لضمان وجود جذر في
 الفترة $[a, b]$.

٢- المشتقة الاولي للدالة لا تساوي صفر $(f'(x) \neq 0) \forall x \in [a, b]$
 بمعنى لا توجد نقطة عظمى أو صغرى في
 الفترة $[a, b]$.

٣- المشتقة الثانية للدالة لا تتغير اسارتها ضمن الفترة
 $[a, b]$ بمعنى عدم وجود نقاط انقلاب للدالة $f(x)$ اي
 منحني الدالة $f(x)$ يكون اما مقعراً أو محدباً ضمن
 الفترة $[a, b]$.

٤- ان يكون $| \frac{f(a)}{f'(a)} | < b-a$ و $| \frac{f(b)}{f'(b)} | < b-a$

لكي نصل الى تقارب اي اذا كانت $x_n \in [a, b]$
 فان $x_{n+1} \in [a, b]$

مثال: جد جذر البالة $f(x) = x^3 - 3x + 2$ بأخذ $x_0 = -2.4$ و $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$ باستخدام طريقة نيوتن-رافسون.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

$$x_0 = -2.4$$

$n=1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$x_1 = -2.4 - \frac{f(-2.4)}{f'(-2.4)} = -2.0763$$

$$|x_1 - x_0| = |-2.0763 + 2.4| \nless \epsilon = 0.000005$$

$$x_0 = x_1 \Rightarrow x_0 = -2.0763$$

$n=2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -2.0763 - \frac{f(-2.0763)}{f'(-2.0763)}$$

$$x_2 = -2.003699$$

$$|x_2 - x_1| \nless \epsilon$$

$$x_0 = x_2 = -2.003699$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

(وٲٲ)

$$x_3 = -2.0000009$$

$$|x_3 - x_2| = |-2.0000009 + 2.003699| \\ = 0.003699 \notin \epsilon = 5 \times 10^{-5}$$

$$n=4$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

$$x_4 = -2$$

$$|x_4 - x_3| = |-2 + 2.0000009| \\ = 0.0000009 < \epsilon$$

الكالات الكاملة لطريقة نيوتن - رافسون

الحالة الاولى

الحاد الجذور التربيعية (Square Roots)

لحاد الجذور التربيعية لأب رقم وليكن $0 < A$ يُستعمل طريقة نيوتن - رافسون تأخذ الدالة

$$f(x) = x^2 - A = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{A}$$

ويتميّز طريقة نيوتن - رافسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= X_n - \frac{X_n^2 - A}{2 X_n}$$

$$= \frac{2 X_n^2 - X_n^2 + A}{2 X_n} = \frac{X_n^2 + A}{2 X_n}$$

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ X_n + \frac{A}{X_n} \right\} \quad , n=0, 1, 2, 3, \dots$$

مثال: جد الجذر التربيعي للعدد 5 و $\epsilon = 10^{-5}$

الحل: نفرض ان الدالة هي

$$f(x) = x^2 - 5$$

وان $f'(x) = 2x$ وبأخذ $x_0 = 2$

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ X_n + \frac{A}{X_n} \right\} \quad , n=0, 1, 2, \dots$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \left(X_0 + \frac{5}{X_0} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{5}{2} \right)$$

$$= 2.25$$

$$|X_1 - X_0| \notin \epsilon \rightarrow X_0 = X_1$$

$$X_2 = \frac{1}{2} \left(X_1 + \frac{5}{X_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2.25 + \frac{5}{2.25} \right)$$

$$X_2 = 2.236111$$

(ع.١)

$$|X_2 - X_1| = |2.236111 - 2.25| \notin \epsilon$$

$$X_3 = \frac{1}{2} \left\{ X_2 + \frac{5}{X_2} \right\} = \frac{1}{2} \left(2.236111 + \frac{5}{2.236111} \right)$$

$$X_3 = 2.23607$$

$$|X_3 - X_2| = 0.000041 \notin \epsilon$$

$$X_4 = \frac{1}{2} \left\{ X_3 + \frac{5}{X_3} \right\}$$

$$X_4 = \frac{1}{2} \left(2.23607 + \frac{5}{2.23607} \right)$$

$$X_4 = 2.236068$$

$$|X_4 - X_3| = 0.000002 < \epsilon$$

أكالة النسبة

أياد الكفر لذي رتبة، إذا كان $f(x) = x^k - A$ ، $A > 0$ ، k عدد صحيح نفس الأسلوب المطبق في
أكالة الأوك

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - A}{k x_n^{k-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k}{k x_n^{k-1}} - \frac{A}{k x_n^{k-1}}$$

$$= x_n - \frac{1}{x_n^{-1} k} - \frac{A}{x_n^{k-1} k}$$

$$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{A}{k} x^{1-k}$$

$$k = 2, 3, 4$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

مثال إيجاد أكثر التكعيب للعدد 7 ، $\sqrt[3]{7}$ على
أن $\epsilon = 10^{-3}$ ، $x_0 = 1.5$

الكل: $x_0 = 1.5$ ، $k = 3$ ، $A = 7$

$$f(x) = x^3 - 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_n + \frac{A}{k} x_n^{1-k}$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) x_0 + \frac{7}{3} x_0^{-2}$$

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) 1.5 + \frac{7}{3} (1.5)^{-2}$$

$$= \frac{2}{3} (1.5) + \frac{7}{3 (1.5)^2}$$

$$= 2.03704$$

$$|x_1 - x_0| = |2.03704 - 1.5| \notin \epsilon$$

$$x_2 = 1.92034$$

$$x_3 = 1.91296$$

$$x_4 = 1.91293$$

$$|x_4 - x_3| < \epsilon$$

الحالة الثالثة:

أيضا د مقلوب أي رقم إذا كان الرقم هو A فمقلوبه $x = \frac{1}{A}$ وتكون الدالة $\frac{1}{x} - A = 0 \iff A = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{x} - A$$

وبالتالي طريقة نيوتن - رافسون

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

$$= X_n - \frac{\frac{1}{X_n} - A}{-\frac{1}{X_n^2}}$$

$$= X_n - \frac{1 - A X_n}{\frac{1}{X_n}}$$

$$X_{n+1} = X_n + X_n (1 - A X_n)$$

$$= X_n (1 + 1 - A X_n)$$

$$X_{n+1} = X_n (2 - A X_n)$$

$n=0, 1, 2, \dots$

مثال: استخدم طريقة نيوتن - رافسون لإيجاد مقلوب
الرقم 2 مع أخذ $x_0 = 0.1$ ولاريعة مراتب
عشرية و $\epsilon = 10^{-4}$

الحل:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{x} - 2$$

$$A = 2$$

$$x_0 = 0.1$$

$$x_{n+1} = x_n (2 - A x_n)$$

$$x_1 = x_0 (2 - 2 x_0)$$

$$= 0.1 (2 - 2(0.1)) = 0.18$$

$$|x_1 - x_0| \not\leq \epsilon = 10^{-4}$$

$$x_2 = x_1 (2 - 2 x_1)$$

$$= 0.18 (2 - 2(0.18)) = 0.2952$$

$$|x_2 - x_1| \not\leq \epsilon$$

$$x_3 = 0.4161$$

$$x_4 = 0.4859$$

Handwritten header: H.W.
تحقیق مرتبه نیوتن-رافسون و حالاته
در مسائل

$$f(x) = x \sin x - 1, x_0 = 1, \epsilon = 10^{-5} \quad (1)$$

$$, \epsilon = 10^{-5}, f(x) = x^2 - 16 = 0 \quad (2)$$

$$\epsilon = 10^{-3}, f(x) = x^3 - 27 = 0 \quad (3)$$

$$\epsilon = 10^{-4}, x_0 = 0.2, f(x) = \frac{1}{x} - 4 \quad (4)$$

٥- طريقة النقطة المباشرة (التأنيّة) Fixed point Method

في هذه الطريقة نتولد المعادلة $X = g(X)$ من المعادلة الأصلية $P(X) = 0$ ثم نختار نقطة ابتدائية (حل ابتدائي) وليكن X_0 نعوضها في المعادلة $X = g(X)$ فنحصل على تقريب جديد $X_1 = g(X_0)$ ثم نكرر الخطوة نيجدي المتغيرات وذلك بوضع X_1 بدلاً من X_0 فنحصل على X_2 وهكذا على الصيغة التكرارية $X_{n+1} = g(X_n)$.

إذا النقطة التي تحقق هذه الطريقة تكون نقطة مباشرة للدالة $g(X)$ والتي تمثل أيضاً حيزاً للمعادلة $f(X) = 0$.

مبرهنة: إذا كانت $g \in C[a, b]$ و $g(X) \in [a, b]$ حيث $X \in [a, b]$ فأن الدالة g لانه نقطة مباشرة على الفترة $[a, b]$ ، كذلك إذا كانت $g(X)$ موجودة ضمن الفترة (a, b) بحيث أن

$$|g'(X)| \leq k < 1 \quad X \in (a, b) \text{ لقيم}$$

فأن الدالة g لها نقطة مباشرة وحيدة.

خوارزمية طريقة النقطة المباشرة

خطوة (١): ادخال الدالة $g(X)$ ، $X_0 \in$.

خطوة (٢): $i = 1$ مع.

خطوة (٣): مع $X = g(X_0)$.

خطوة (٤): إذا كان $|X - X_0| < \epsilon$ فأن X هو الجذر ونوقف.

خطوة (٥): $i = i + 1$.

خطوة (٦): مع $X_0 = X$ وارجع الى الخطوة (٣).

(٤٧)

شروط تقارب المربقة النقطه المماسه

مبرهنة: لتكن g دالة تحقق الشروط الآتية:

- ١- g دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$.
- ٢- $g(x) \in [a, b]$ لكل قيم $x \in [a, b]$.
- ٣- اذا كانت $g(x)$ موجودة فهذا الفترة (a, b) حيث ان:
 $|g'(x)| \leq k < 1$
- فإذا كانت $x_0 \in [a, b]$ فان المتتابعة $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

المتوال بالمرجة $x_n = g(x_{n-1})$ تقارب الى اكل المبرم $[a, b]$ لقيم $n = 1, 2, \dots$

نتيجة: اذا كانت g تحقق شروط النظرية اعلاه فان اكل الاعلى للخط

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_0 - \alpha|$$

الشروط $|g'(x)| \leq k < 1$ تكفي لتقارب $\{x_n\}$ الى القيمة $\alpha = \lambda$.

مثال

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \alpha$$

اثبات

علما ان x_n هي القيم التقريبية المتولدة من مربقة النقطه المماسه.

خواص الطريقة (النقطة المصدرة)

- ١- سرعة اقتراب هذه الطريقة من الحل (linear) ولكن هي أفضل من طريقة التنصيف.
- ٢- مستقة الدالة $f(x)$ يجب ان تحقق الشرط $|f'(x)| > |f(x)|$ عند نقطة البداية لكي نصل على تكرارات مستقرة للوصول الى الجذر.
- ٣- كلما كانت قيمة k (١، ٢، ٣، ٤) بغيره وقريبة الى الصفر كلما كانت الاقتراب اسرع الى الجذر.

ملاحظة: اذا كانت الجذر من دالة تحقق نأخذ اقل قيمة لـ k (قيمة مستقة الدالة عند x) تكون بغيره وسريعة الوصول الى الجذر الكيفي.

تقريب
ریشه الجذر: لتكن $f(x)$ ومستقراتها $f'(x), f''(x), \dots, f^{(m)}(x)$ معرفة ومستقرة قرب الجذر α فان الدالة جذور يريشة M اذا وقفنا اذا

$$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \dots, f^{(m-1)}(\alpha) = 0, f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

اذا كانت $m=1$ فاجذر بسيط (Simple Root).
اذا كانت $m=2$ فاجذر مكرر (Double Root).
اذا كانت $m>1$ فاجذر مكرر اكثر من مرة واحدة (Multiple Root).

مثال ١٢ لنكن $f(x) = x^3 - 3x + 2$ جذر المعادلة $f(x) = 0$ ثم اذكر رتبة كل جذر.

الحل: احد الجذور هو (١) لانه $f(1) = 0$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x=1$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$x=1$$

$$x=-2$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \\ x-1 \overline{) x^3 - 3x + 2} \\ \underline{+x^3 + x^2} \\ x^2 - 3x + 2 \\ \underline{+x^2 + x} \\ -2x + 2 \\ \underline{+2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

الجذور هي ١، -٢، -٢

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = 0$$

$$f''(1) = 6 \neq 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$m=2$ على الجذر (١) رتبة $m=2$ وهو جذر مكرر

الآن نجد رتبة الجذر $x=-2$

$$f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = 9 \neq 0$$

على رتبة الجذر -٢ هي $m=1$ وهو جذر بسيط.

(مثال: ج. يستخدم طريقة النقطة المباشرة جذر المعادلة

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

إذا كانت $x_0 = 4$ و $\epsilon = 10^{-4}$

الكل: أولاً نوجد الجذور الحقيقية

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ x = -1 \end{matrix}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 = 2x + 3$$

(كتابة لاوكن)

$$x = \sqrt{2x + 3} = g_1(x)$$

$$g_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 3}}$$

$$g_1'(4) = \frac{1}{3.3166} < 1$$

if $x_0 = 4$

$g_1(x)$ تحقق $\therefore$

$$x_1 = \sqrt{2x_0 + 3} = \sqrt{2(4) + 3} = 3.3166$$

$$|x_1 - x_0| = |0.6834| \neq \epsilon = 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} x_2 = g_1(x_1) &= \sqrt{2x_1 + 3} = \sqrt{2(3.3166) + 3} \\ &= 3.1037 \end{aligned}$$

$$x_3 = g_1(x_2) = 3.0344$$

$$x_4 = g_1(x_3) = 3.01144$$

$$x_5 = g_1(x_4) = 3.0038$$

نستقر الآن نصل الك الجذر 3

(01)

أكالة الثانية

$$X^2 - 2X - 3 = 0$$

$$X^2 - 2X = 3$$

$$X(X-2) = 3$$

$$X = \frac{3}{X-2} = g_2(X)$$

$$g_2'(X) = \frac{-3}{(X-2)^2}$$

$$|g_2'(4)| = \left| \frac{-3}{(4-2)^2} \right| = \frac{3}{4} < 1 \quad \checkmark \text{ كقوة}$$

$$X_1 = g_2(X_0) = \frac{3}{X_0-2}$$

$$X_1 = \frac{3}{4-2} = 1.5$$

$$X_2 = g_2(X_1) = \frac{3}{1.5-2} = -6$$

$$X_3 = g_2(X_2) = \frac{3}{-6-2} = -0.375$$

$$X_4 = -1.2632$$

$$X_5 = -0.9193$$

$$X_6 = -1.028$$

$$X_7 = -0.991$$

نلاحظ ان هذه القيم تقترب هذا الجذر (-1) وبشكل متزايد

أكالة الدالة ..

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$2x = x^2 - 3$$

$$x = \frac{x^2 - 3}{2} = g_3(x) \Rightarrow g'_3(x) = 2x$$

$$g'_3(4) = 8 > 1$$

لا تحقق

$$x_0 = 4$$

$$x_1 = g_3(x_0) = \frac{x_0^2 - 3}{2}$$

$$x_1 = g_3(x_0) = \frac{4^2 - 3}{2} = 6.5$$

$$x_2 = g_3(x_1) = 19.625$$

$$x_3 = 191.0703$$

نلاحظ تباين هذه الدالة وذلك لعدم تحققها
الشرط وهو شرط التقارب

الحلول العددية لمنظومة المعادلات اللاخطية

يمكن إيجاد الجذور الحقيقية لمنظومة المعادلات غير الخطية لأكثر من متغير وذلك بتعميم بعض الطرق السابقة لإيجاد جذر المعادلة:

١- النظام الهامدة لدوال متعددة المتغيرات

الشكل العام للنظام اللاخطي الذي يتكون من m من المعادلات اللاخطية يكون:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

or

$$F(x) = 0$$

حيث $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ حيث

أمثلة عامة

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin 3x_2 = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{6\pi - 3}{10} = 0$$

مبرهنة: لتكن $D = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T\}$ نفضان
 $G: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ دالة مستمرة ولها مشتقات
 جزئية أولى ومستمرة وان $G(X) \in D$ لكل
 $X \in D$ عنده G لها نقطة هامة في D .

كذلك اذا وجدنا ثابت $k < 1$ بحيث أن:

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{k}{n}$$

لكل قيم $X \in D$ وأن n كبيرة و $n \rightarrow \infty$
 فأن المتتالية $\{X^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ المعرقة بالمتتالية التكرارية

$$X^{(n)} = G(X^{(n-1)}) \quad n \geq 1 \quad \text{لقيم } X \in D \text{ وان}$$

$$\|X^{(n)} - \alpha\|_{\infty} \leq \frac{k^n}{1-k} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty}$$

ملاحظة: اذا كانت لدينا نظام لا نهائى متكون
 من معادلات مجهولتين فأن:

الشرط الكافى لتقارب النقطة الهامة المعمة
 هو

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right| < 1$$

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right| < 1$$

لكافة قيم (x_1, x_2) الواقعة في جوار النقطة
 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$

٢-١ إذا كانت

$$L = \max \left\{ \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right|, \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right| \right\}$$

وكانت $0 < L < 1$ ، فإن هناك تقارب لسلسلة القيم التقريبية أي كلما كانت قيمة L قريبة من (١) كلما ~~كان~~ كان التقارب بطيء، وكلما كانت L قريبة من (٠) يكون التقارب أسرع.

مثال ١:

$$L_{\log_{10}}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

مثال ٢: استخدم طريقة البقرة الصاعدة لإيجاد حل منظومة المعادلات:

$$f_1(x, y) = x + 3 \log_{10} x - y^2 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$f_2(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

ويأخذ $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (3.5, 2.5)$ وبدقة $\epsilon = 10^{-3}$

الحل:

نكتب الصيغة $x = G(x)$ من النظام المعطى حيث $x = (x, y)$

من المعادلة (١) نحصل على

$$X + 3 \log_{10} X - y^2 = 0$$

$$X = y^2 - 3 \log_{10} X = g_1(X, y)$$

من المعادلة (2) نحصل على

$$Xy = 2X^2 - 5X + 1$$

$$y = 2X - 5 + \frac{1}{X} = g_2(X, y)$$

$$(X^{(0)}, y^{(0)}) = (3.5, 2.5) \text{ وبأخذ}$$

$$X^{(1)} = (y^{(0)})^2 - 3 \log_{10} X^{(0)} = g_1(X^{(0)}, y^{(0)})$$

$$y^{(1)} = 2X^{(0)} - 5 + \frac{1}{X^{(0)}} = g_2(X^{(0)}, y^{(0)})$$

$$X^{(1)} = (2.5)^2 - 3 \log_{10}(3.5) = 4.618$$

$$y^{(1)} = 2(3.5) - 5 + \frac{1}{3.5} = 2.286$$

$$(X^{(1)}, y^{(1)}) = (4.618, 2.286)$$

(o✓)

خوارزمية النقطة المماسية للنظام غير الخطي الذي
يكون من معادلتين مجهولتين.

الادخال: الدوال $g(x, y)$ و $g_2(x, y)$
 x_0, y_0, ϵ

خطوة (1): منح $i = 1$

خطوة (2): نحسب $x = g_1(x_0, y_0), y = g_2(x_0, y_0)$

خطوة (3): نحسب $D_1 = |x - x_0|, D_2 = |y - y_0|$

خطوة (4): إذا كان $\min\{D_1, D_2\} < \epsilon$ المخرج x, y الجواب
 أي هما النقطتين المماسين وتوقف.

خطوة (5): وإلا فمع $x_0 = x, y_0 = y$

خطوة (6): مع $i = i + 1$ وادخل إلى الخطوة (2)

٢- طريقة نيوتن وافسون كل نظام المعادلات اللاصفية

يمكن تعميم طريقة نيوتن وافسون المتقدمة سابقاً
 لكي تطبق على الحالة الجديدة لدينا

$$F(x) = 0$$

يمكن إعادة صياغة النظام أعلاه بالشكل التالي

$$G(x) = x - [J(x)]^{-1} F(x)$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

حيث

هنا مجموعة جاكوب وبالنظام الأسلوب التكراري:

$$X^{(n)} = G(X^{(n-1)}) = X^{(n-1)} - [J(X^{(n-1)})]^{-1} F(X^{(n-1)})$$

لقيم $n \geq 1$ وأن $X^{(0)}$ متجه اكل الابتدائي.

ان ضعف هذا الأسلوب يكمن في إيجاد معكوس مصفوفة جاكوب في كل خطوة تكرارية.

إذا كان النظام الآتي لدينا يتكون من معادلتين بجهولين

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

خذ سلسلة من القيم $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نحو كل المصنوع ويتم الحصول على كل عنصر منها من هذه السلسلة عن طريق تحسين القيمة السابقة (x_{n-1}, y_{n-1}) باستخدام العلاقات

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i \\ y_{i+1} &= y_i + k_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

حيث h_i, k_i قيمتان تحققان المعادلتين التاليتين عند النقطة (x_i, y_i)

$$\left. \begin{aligned} h_i f_x + k_i f_y &= -f \\ h_i g_x + k_i g_y &= -g \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

حيث $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ و $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ ، $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$ ، $g_y = \frac{\partial g}{\partial y}$

بعد إيجاد قيم المائلين f و g ، واستقارها (الجزئية) عند النقطة (x_i, y_i) سوف تتحول معادلة (3) إلى معادلتين خطيتين ولكن نجد حل هاتين المعادلتين يعطينا k_i و h_i يتوجب أن تكون قيمة المحدد التالي عند النقطة (x_i, y_i) مساوي صفر

$$|\bar{D}| = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{--- (4)}$$

إذا تحقق هذا الشرط فإن قيمة h_i و k_i هي

$$h_i = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{|\bar{D}|} \quad , \quad k_i = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{|\bar{D}|} \quad \text{--- (5)}$$

وتفعلنا (5) في المعادلة (2) كحل على تقريبية حيث x و y وبالتكرار كحل على سلسلة من القيم التقريبية ..

خوارزمية طريقة نيوتن - رافسون للمعادلات اللاخطية ذات المتجهولين.

الادخال: $F(x, y)$, $g(x, y)$, (x_0, y_0) , ϵ

خطوة (1): اكتب قيمة المحدد $|J|$ عند النقطة (x_0, y_0)

خطوة (2): اذا كان $|J| \neq 0$ انتقل الى الخطوة (4)

خطوة (3): اذا كان $|J| = 0$ فان الطريقة فاشلة

خطوة (4): اكتب قيمة h و k كما يلي

$$h = (g f_y - f g_y) / |J|$$

$$k = (f g_x - g f_x) / |J|$$

خطوة (5): اكتب القيمة الجديدة

$$x_1 = x_0 + h$$

$$y_1 = y_0 + k$$

خطوة (6): اكتب الفرق بين اخر قيمتين

$$D_1 = |h| \quad \text{و} \quad D_2 = |k|$$

خطوة (7): اذا كان $\min\{D_1, D_2\} < \epsilon$

اطبع قيم المتغيرات x_1, y_1

خطوة (8): فلا تفرح $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$ وارجع الى الخطوة (1)

مثال: استخدم طريقة نيوتن - رافسون لإيجاد الجذور
القريبة في المثال السابق.

$$f(x, y) = x + 3 \log_{10} x - y^2 = 0$$

$$g(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$$

$$(x_0, y_0) = (3.5, 2.5)$$

$$f(x_0, y_0) = 3.5 + 3 \log_{10}(3.5) - \overset{\text{القيمة}}{(2.5)^2} \\ = -1.1178$$

$$g(x_0, y_0) = 2(3.5)^2 - (3.5)(2.5) - 5(3.5) + 1 \\ = -0.75$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{3}{x \ln 10} - 0 = 1.3723$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 0 - 2y = -5$$

$$g_x = 4x - y - 5 = 6.5$$

$$g_y = -x = -3.5$$

$$\boxed{i=0}$$

$$1.3723 h_i - 5 k_i = 1.1175$$

$$6 h_i - 3.5 k_i = 0.75$$

(75)

$$J = \begin{vmatrix} 1.3723 & -5 \\ 6.5 & -3.5 \end{vmatrix} = 27.697 \neq 0$$

$$h_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1.1175 & -5 \\ 0.75 & -3.5 \end{vmatrix}}{|J|}$$

$$= \frac{+0.1623}{27.697} = 0.00586$$

$$k_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1.3723 & 1.1175 \\ 6.5 & 0.75 \end{vmatrix}}{|J|}$$

$$= \frac{-6.2365}{27.697} = -0.22517$$

$$x_1 = x_0 + h_0 = 3.5 + 0.00586 = 3.49414$$

$$y_1 = y_0 + k_0 = 2.5 - 0.22517 = 2.27483$$

$$(x_1, y_1) = (3.49414, 2.27483)$$

$$x_2 = x_1 + h_1$$

$$y_2 = y_1 + k_1$$

(74)

الحلول العددية للنظام الخطي $Ax=b$

ليكن لدينا النظام الخطي الآتي (١) $Ax=b$ حيث
 $b \in \mathbb{R}^n$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

فإن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

لإيجاد الحل العرسي (العدد) أي المتجه x وسنم
 توضيح ذلك في الخطوات التالية:

١- عند $n > m$ (عدد المعادلات m عدد المجاهيل n) فإن
 النظام الخطي (١) له عدد غير منته من الحلول.

$$2x_1 - 3x_2 = 2$$

$$n=2, m=1$$

مثال:

عليه يوضح أنه متى ل x_1 نحل على متجه ل x_2 وعليه فالنظام
 له لا نهاية من الحلول.

٢- عند $n < m$ في هذه الحالة لا يكون للنظام الخطي (١) حل

٣- متوائم (منسق) له حل وتحقق المعادلات -

٤- غير متوائم (غير منسق) له حل ولكن لا يحقق جميع المعادلات -

مثال:

$$x_1 + 2x_2 = 1 \dots (1)$$

$$x_1 + 3x_2 = 2 \dots (2)$$

$$x_1 + 2x_2 = 3 \dots (3)$$

$$n=2, m=3 \quad n < m \Leftarrow$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = 2 \\ \hline -x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \end{array}$$

لنحقق المعادلة (3) إذاً النظام غير متوازن (غير منسق).

مثال:

$$x_1 + x_2 = 0 \dots (1)$$

$$2x_1 - 3x_2 = 1 \dots (2)$$

$$3x_1 - 2x_2 = 1 \dots (3)$$

$$m > n \quad n=2, m=3 \Leftarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{5} \quad x_2 = -\frac{1}{5}$$

x_1, x_2 تحقق جميع المعادلات: النظام متوازن (منسق).

٣. عندما $n=m$ فإن النظام الخطي (1) له حل وحيد.

مثال:

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 = 2$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1$$

هذه الحالة سوف تقتصر عليها درسنا في هذه المواضع عندئذ يكون النظام بالشكل التالي

(70)

$$Ax = b \quad (2)$$

$$b, x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{حيث أن}$$

سنفرضها عند دراسة النظام (2) بأن المصفوفة A هي مصفوفة غير متبادلة (غير منفرجة) (nonsingular) عندئذ تكون العبارات التالية متكافئة:-

١- النظام الخطي للمجهولات $Ax = 0$ يكون له حلول غير
هواكل المجهول $x=0$.

٢- لذى مثله $b \in \mathbb{R}^n$ فإن النظام الخطي (2) له حل
وحد.

٣- $|A| \neq 0$ وحده المصفوفة A قابلة للعكاس.

تقسم الطرق العددية لحل النظام الخطي إلى قسمين:

١- الطرق المباشرة:- تلك الطرق التي يتم فيها إيجاد
سلسلة من العمليات الحسابية مرة واحدة ثم الوصول
إلى قيمة تقريبية للحل المطلوب.

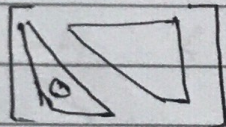
٢- الطرق التكرارية (غير المباشرة):- تلك الطرق التي
تصل إلى الحل المأمون من طريقة حساب تقريبات متعاقبة
لهائم تبدأ على تقريب ثم يجرى سلسلة من العمليات
الحسابية التي تؤدي إلى الحصول على حل تقريب أفضل
وهذا بدوره يتكرر مرة أخرى لكي ينتج حلا أكثر
دقة ويمكننا بالتكرار

أولاً: الطرق المباشرة Direct Methods

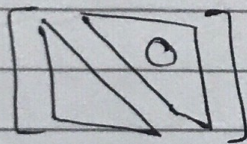
1- طريقة كروس الكذف Gauss Elimination Method.

تتضمن هذه الطريقة كل النظام (2) فيما يلي:

أ- تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية عليا أو مثلثية سفلى والتي ليس بالكذف الأمامي أو الخلفي.



مثلثية
عليا



مثلثية
سفلى

حذف أمامي

ومسح المصفوفة

$$\text{New Row}_i = \text{Row}_i - \frac{(a_{ij})}{(a_{jj})} \text{Row}_j$$

ب- حل النظام المتبقي الناتج إما بالقوى الخلفي (أو الأمامي).

مثال: حل النظام المنظم التالي للمعادلات الخطية
 باستخدام طريقة حذف كراوس.

$$4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

الحل:
 ترتيب المنظم ليشكل $[A:b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -9 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

نحول إلى
 أصفار

أولاً: نتجزئ الحذف الكراوس

الخطوة الأولى

$$\text{New Row}_2 = \text{Row}_2 - \left(\frac{2}{4}\right) \text{Row}_1$$

$$= [2 \quad -4 \quad 6 | 3] - \left(\frac{2}{4}\right) [4 \quad -9 \quad 2 | 5]$$

$$\text{New Row}_2 = [2 \quad -4 \quad 6 | 3] - [2 \quad -4.5 \quad 1 | 2.5]$$

$$\text{New Row}_2 = [0 \quad -0.5 \quad 5 | 0.5]$$

$$\text{New Row}_3 = \text{Row}_3 - \left(\frac{1}{4}\right) \text{Row}_1$$

$$= [1 \quad -1 \quad 3 | 4] - \left(\frac{1}{4}\right) [4 \quad -9 \quad 2 | 5]$$

$$= [1 \quad -1 \quad 3 | 4] - [1 \quad -\frac{9}{4} \quad \frac{1}{2} | \frac{5}{4}]$$

$$\text{New Row}_3 = [0 \quad 1.25 \quad 2.5 | 2.75]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -9 & 2 & 5 \\ 0 & 0.5 & 5 & 0.5 \\ 0 & 1.25 & 2.75 & 2.75 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Row 1} \\ \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{array}$$

$$\text{New Row 3} = \text{Row 3} - \left(\frac{1.25}{0.5} \right) \text{Row 2}$$

$$= [0 \quad 1.25 \quad 2.75 \mid 2.75] -$$

$$\left(\frac{1.25}{0.5} \right) [0 \quad 0.5 \quad 5 \mid 0.5]$$

$$\text{New Row 3} = [0 \quad 0 \quad -10 \mid 1.5]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -9 & 2 & 5 \\ 0 & 0.5 & 5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -10 & 1.5 \end{array} \right]$$

ملاحظة: نخرج المتغيرات التراجعية (الخلف)

$$-10x_3 = 1.5 \Rightarrow x_3 = -0.15$$

$$0.5x_2 + 5x_3 = 0.5 \Rightarrow x_2 = \frac{0.5 - 5(-0.15)}{0.5}$$

$$x_2 = 2.5$$

$$x_1 = \frac{5 + 9(2.5) - 2(-0.15)}{4}$$

$$x_1 = 6.95$$

(79)

Note: إذا جاء (جد المحدد) فتوجد حاد كجوه عناصر القطر الرئيسي لأخره موقوفة بونفسه الحاد بها.

$$|A| = 4 + 0.54 - 10 = -5.5$$

خوارزمية طريقة كاوس للأدق

كل نظام مكون من n المعادلات الخطية و n متباين

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}$$

⋮

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}$$

الأدق: n عدد المتباين والمعادلات، المعرفة $A = (a_{ij})$
 $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n+1$

خطوة (1): لكل $i = 1, 2, \dots, n$ إذا كان $a_{ii} = 0$ توقف ولا يوجد حل.

خطوة (2): ضع $n, n-1, \dots, 1$ في الخطوات 3-4
 خطوة (3): ضع

$$m_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$$

خطوة (4): امسح القيم $k = 1, 2, \dots, n+1$

$$a_{jk} = a_{jk} - m_{ji} \times a_{ik}$$

خطوة (5): إذا كان $a_{nn} = 0$ فأبج لا يوجد حل وتوقف

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

خطوة (6): ضع

خطوة (7): لكل

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \times x_j}{a_{ii}}$$

خطوة (8): أخرج قيم المتباين $x_1, x_2, \dots, x_n$ وتوقف.
 (✓)

اساليب تحسين الحلول

١- التحويز (Pivoting)

يعتبر التحويز الوسيلة التي يمكن بواسطتها تجنب العتمة على الصفوف وتقليل تأثير أخطاء التقوير وذلك بتبديل ترتيب المعادلات أي بالتبديل عن أكبر قيمة مطلقة لمعامل المجهول الذي يراد حذفه من العمود الواقع تحت القطر الرئيسي وتبديل الأسطر بحيث تجعل تلك العنق هو العنصر المحوري (pivot element) وتتم هذه العملية بالتحويز الجزئي (Partial pivoting).

أما عملية إيراد التبديل اللازم في الصفوف والأعمدة للمجهول عاكس أكبر عنصر محوري تدعى بالتحويز الكلي وهذه العملية نادرة ما تستعمل لأن تبديل الأعمدة يؤدي إلى تغيير موقعه أيضاً $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

٢- التدرج (Scaling)

هو عملية إيراد تبديل معاملات مجموعة المعادلات الكمية وجعل قيمها غير متفاوتة ويتم بقسمة كل سطر على أكبر قيمة مطلقة لمعاملاته ثم تتوزع الكدوف كما هو مع التحويز الجزئي.

مثال: استخدم طريقة كراوس للحذف مع المركز الجزئي لإيجاد حل النظام الخطي.

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 &= -7 \\ 6x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 6 \end{aligned}$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \end{array} \right]$$

نبدل السطر الأخير بالأول لأنه يحتوي على أكبر قيمة مطلقة للعنصر الأول.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

كراوس الحذف

$$\text{Row}_2 = R_2 - \left(\frac{2}{6}\right) R_1$$

$$\text{Row}_3 = R_3 - \left(\frac{4}{6}\right) R_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 0.3333 & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & -2.3333 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

نقوم بتبديل عناصر السطر الثاني بـ السطر الثالث

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & -2.3333 & -11 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 0.3333 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{Row}_3 = \text{R}_3 - \left(\frac{1.6667}{-3.6667} \right) \text{R}_2$$

$$\text{Row}_4 = \text{R}_4 - \left(\frac{2}{-3.6667} \right) \text{R}_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & 3.6667 & 4 & -2.3333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & -0.7273 & -9.000055 \\ 0 & 0 & 2.1818 & -0.2727 & -5.9999 \end{array} \right]$$

$$\text{Row}_4 = \text{Row}_4 - \left(\frac{2.1818}{6.8182} \right) \text{R}_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & -2.3333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & -0.7273 & -9.000055 \\ 0 & 0 & 0 & -0.039957 & -3.1199 \end{array} \right]$$

(✓✓)

$$X_4 = \frac{-3.1199}{-0.039957} = 78.08144$$

$$X_3 = \frac{-9.000055 + 0.7273(78.08144)}{6.8182}$$

$$X_3 = 7.008973$$

$$X_2 = \frac{-11 - 4(7.008973) + 2.3333(78.08144)}{-3.6667}$$

$$X_2 = -39.04097$$

$$X_1 = \frac{6 - 1(-39.04097) + 6(7.008973) - 5(78.08144)}{6}$$

$$X_1 = 50.5521$$

11.6
ج. قيم X_1, X_2, X_3 للنظام الكلي

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 102 \\ 2 \end{bmatrix}$$

١- استخدام طريقة كاوس للحدف مع التركيز الجبري.
٢- استخدام الشرح.

ملحوظة: عدد العمليات الحسابية لفرقة حذف كاوس يكون تقريبًا مساويًا $(\frac{n^3}{3})$ حيث n عدد الجاديل أو الجادفونة. والنتيجة مشابهة بالشكل

١. عملية الضرب والقسمة

$$\frac{n^3 + 3n^2 - n}{3}$$

٢. عملية الجمع والطرح

$$\frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}$$

انظر عدد الخطوات في طريقة كاوس لحذف $(n-1)$ عناصر تظهر فقط أسفل القطر الرئيسي.

Note عدد الأضفار في المصفوفة المتناظرة العليا في طريقة كاوس لحذف هي

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

or

$$\sum_{i=1}^{n-1} i$$

طريقة كاوس جوردان Gauss Jordan Elimination

هذه الطريقة هي تعديل الطريقة كاوس للهدف حيث نقوم
بإجراء عملية الحذف المتغير من كل المعادلات التي تقع
فوق القطر بالإضافة إلى المعادلات التي تقع أسفل القطر.

ومن هذه الحالة نصل إلى مصفوفة قطرية لذا لا نحتاج
إلى عملية القسمة الخلف كما هو الحال في طريقة كاوس
للهدف.

مثال ١: حل كل من أنظمة المعادلات باستعمال كاوس جوردان

$$\begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 & | & 5 \\ 2 & -4 & 6 & | & 3 \\ 1 & -1 & 3 & | & 4 \end{bmatrix}$$

الحل ١

$$\text{New } R_1 = R_1 / 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{2} & | & \frac{5}{4} \\ 2 & -4 & 6 & | & 3 \\ 1 & -1 & 3 & | & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{New } R_2 = R_2 - \left(\frac{2}{1}\right) R_1$$

$$\text{New } R_3 = R_3 - \left(\frac{1}{1}\right) R_1$$

(✓)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -9/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 0.5 & 5 & 0.5 \\ 0 & 1.25 & 2.5 & 2.75 \end{array} \right]$$

$$\text{New } R_2 = R_2 / 0.5$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -9/4 & 1/2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1.25 & 2.5 & 2.75 \end{array} \right]$$

$$\text{New } R_3 = R_3 - \left(\frac{1.25}{1} \right) R_2$$

$$\text{New } R_1 = R_1 - \left(\frac{-9/4}{1} \right) R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 23 & 3.5 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 1.5 \end{array} \right]$$

$$\text{New } R_3 = R_3 / -10$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 23 & 3.5 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.15 \end{array} \right]$$

(✓✓)

$$\text{New } R_2 = R_2 - \left(\frac{10}{1}\right) R_3$$

$$\text{New } R_1 = R_1 - \left(\frac{23}{1}\right) R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6.95 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.15 \end{array} \right]$$

$$X_1 = 6.95$$

$$X_2 = 2.5$$

$$X_3 = -0.15$$

خوارزمية طريقة كرون - جوردان

الادخال: عناصر المصفوفة (A) و n
 خطوة (1): لكل قيم $k=1, 2, \dots, n$
 $j=k, k+1, \dots, n$ فيج
 $a(k, j) = a(k, j) / a(k, k)$ واسب

خطوة (2): لكل $i=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ فيج
 $j=k, k+1, \dots, n+1$ فيج
 $a(i, j) = a(i, j) - a(i, k) * a(k, j)$ واسب

خطوة (3): جرفيم الجاويل ماسب
 $X_i = a(i, n+1) \quad i=1, 2, \dots, n$

(VΛ)

ملاحظات:

1- عدد العمليات الحسابية المستخدمة في حل هذه الطريقة
كل النظام الخطي يكون تقريباً $(\frac{n^3}{2})$.

2- منها عمليات الضرب والقسمة $\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2}$

ب- عمليات الجمع والطرح $\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$

وعليه طريقة كاوس المذف افضل من عملية كاوس جوردان
حيث عدد العمليات فيها اقل من عدد عمليات طريقة
كاوس جوردان $\frac{n^3}{3} < \frac{n^3}{2}$

ج- طريقة كاوس جوردان تتطلب n من الخطوات
لتحويل مصفوفة النظام الخمصفوفة قطرية -

د- تستخدم طريقة كاوس جوردان لاجراء معكوس
المصفوفة A اي ان

$$[A: I] \rightarrow [I: A^{-1}]$$

١- الطرق الغير مباشرة (الطرق التكرارية)

Iterative Methods.

ليكن لدينا النظام الكفلي $AX = b$ أي أن

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

ولكن $a_{ii} \neq 0$ لكل قيم i

وفي حالة وجود $a_{ii} \neq 0$ لبعض قيم i نبدأ المعادلات التي
أن نحل على قدر المستطاع معروفة تحقق شرط السيطرة
قريباً أي أن

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad n, m, \text{ و } i, j$$

عليه يمكن كتابة النظام الكفلي السابق بالشكل الآتي:

$$x_1 = [b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)] / a_{11}$$

$$x_2 = [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n)] / a_{22}$$

$\vdots$

$$x_n = [b_n - (a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1})] / a_{nn}$$

ويجوز عامة فأن النظام الأخير يكتب:

$$x_i = [b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j] / a_{ii} \quad \text{--- (1)}$$

(١.١)

١- طريقة جاكوبي (Jacobi's Method)

تتكرر هذه الطريقة بتخمين قيمة أولية للجواب

(أي متجه ابتدائي للـ x) وليكن $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$

وبوجه العلاقة ① بالشكل الآتي

$$x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{ii}$$

لكل قيم n متوالية

ويتكرر العملية أعلاه كما من اطرات ... بعد واردة k
التي نصل على الدقة المطلوبة والتي تحقق الشرط الآتي

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon$$

حيث ϵ عدد صغير قبل دقة الحل

أو المئوية

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \epsilon$$

مثال: + نستخدم طريقة جاكوبي لحل النظام الخطي

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

الكل:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad i=1, 2, \dots, n$$

حالة $a_{33} = 0$ عليه نبدل المعاملين الناتج مع الثالث

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$

$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$

$$x_1 = [11 - 2x_2 - x_3] / 4$$

$$x_2 = [3 + x_1] / 2$$

$$x_3 = [16 - 2x_1 - x_2] / 4$$

مأخذ $x^{(0)} = (1, 1, 1)$

$$x_1^{(k+1)} = [11 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}] / 4$$

$$x_2^{(k+1)} = [3 + x_1^{(k)}] / 2$$

$$x_3^{(k+1)} = [16 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}] / 4$$

(AC)

$$k=0$$

$$x_1^{(1)} = [11 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}] / 4$$

$$= [11 - (2)(1) - (1)] / 4 = \frac{8}{4}$$

$$x_1^{(1)} = 2$$

$$x_2^{(1)} = [3 + x_1^{(1)}] / 2$$

$$= [3 + 1] / 2 = \frac{4}{2}$$

$$x_2^{(1)} = 2$$

$$x_3^{(1)} = [16 - 2(1) - (1)] / 4 = \frac{13}{4}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{13}{4}$$

$$x^{(1)} = (2, 2, \frac{13}{4})$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \not\leq \epsilon = 10^{-6}$$

$$k=1$$

$$x_1^{(2)} = [11 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(1)}] / 4$$

$$= [11 - 2(2) - \frac{13}{4}] / 4 = \frac{15}{16}$$

$$(1.875)$$

$$x_1^{(2)} = \frac{15}{16}$$

$$x_2^{(2)} = [3 + x_1^{(1)}] / 2$$

$$x_2^{(2)} = [3 + 2] / 2 = 5/2$$

$$x_2^{(2)} = \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(2)} = [16 - 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}] / 4$$

$$= [16 - 2(2) - 2] / 4$$

$$x_3^{(2)} = \frac{5}{2}$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{15}{16}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

⋮

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \epsilon = 10^{-6}$$

خوارزمية مرتبة جاكوبي

الادخال: n عدد المعادلات، a_{ij} لكل $i, j, n \leq i, j \leq n$ (كل المصفوفة)
 b_i لكل $i, n \leq i \leq n$ لكل $i, n \leq i \leq n$ (كل المصفوفة)
 دقة الحل N عدد التكرارات.

خطوة (1): $K=1$ ضع
 خطوة (2): ادراكات $K \leq N$ نفذ الخطوات (3-6)
 خطوة (3): لقيم n, n, n, n, n, n ضع

$$x_i = [b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j] / a_{ii}$$

خطوة (4): اذا كان $\|x - x_0\|$ عند $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ قيل
 اكل المطلوب وتوقف.

خطوة (5): $K=K+1$ ضع
 خطوة (6): لقيم n, n, n, n, n, n ضع $x_0 = x$
 كرر الخطوة (2) حتى تحقق الخطوة (4) ثم توقف.

Invers Interpolation

الانتراج العكسي

لتكن $x_i, y_i = f(x_i)$ حيث n عدد n في مجموعة من النقاط
 المطلوب اذا كانت المطلوب إيجاد قيمة (x^*) التي تقابل قيمة
 (y) غير معلومة في الجدول $y_i \neq y$ فأن هذه المسألة
 تسمى بالانتراج العكسي.

اذن أسلوب الكل يمكن في تطبيقه بدقة لا كراخي
 مع ابدال x, y مكان بعضهما البعض اي نعتبر y
 متغير مستقل و x متغير معتمد اي ان

$$y = f(x) \Rightarrow x = G(y)$$

الخطوة

خوارزمية طريقة لاكرانج

الهدف: x_i و $y_i = f(x_i)$ لكل قيم $i=0, 1, \dots, n-1$ معرفة واردة
عدد البيانات n و x^* القيمة المطلوب تقدير متجه الدالة
عندما.

$$L_i(x^*) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

خطوة (1): امسب

خطوة (2): امسب

$$p(x^*) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) L_i(x^*)$$

والجواب $p(x^*)$ وتوقف.

مثال: لتكن $f(x)$ معرفة بقيم الجدول التالي

x	1	3	4	6
$y=f(x)$	2	10	15	8

جد قيمة x^* عندما $y=12$

الحل: نضع الجدول

	y_0	y_1	y_2	y_3
y	2	10	15	8
$G(y)$	1	3	4	6

عدد النقاط (البيانات) 4 نقاط
افضل حدودية (بسيطة لاكرانج) تكون من الدرجة 3

$$p_3(y) = \sum_{i=0}^3 G(y_i) L_i(y)$$

$$P_3(n) = G(y_0)L_0(y) + G(y_1)L_1(y) + G(y_2)L_2(y) + G(y_3)L_3(y)$$

$$L_i(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \quad , i = 1, 2, 3$$

$$L_0(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^3 \frac{y - y_j}{y_0 - y_j}$$

$$= \frac{(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)}$$

$$= \frac{(y - 10)(y - 15)(y - 8)}{(2 - 10)(2 - 15)(2 - 8)}$$

$$L_0(y) = \frac{1}{624} (y - 10)(y - 15)(y - 8)$$

$$L_0(12) = \frac{1}{624} (12 - 10)(12 - 15)(12 - 8)$$

$$= \frac{2 \cdot 4}{624}$$

$$L_1(y) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^3 \frac{y - y_j}{y_1 - y_j}$$

(\wedge V)

$$L_1(y) = \frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}$$

$$= \frac{(y-2)(y-15)(y-8)}{(10-2)(10-15)(10-8)}$$

$$L_1(y) = \frac{-1}{80} (y-2)(y-15)(y-8)$$

$$L_1(12) = \frac{-1}{80} (12-2)(12-15)(12-8)$$

$$L_1(12) = \frac{120}{80}$$

$$L_2(12) = \frac{80}{455}$$

$$L_3(12) = \frac{-60}{84}$$

$$X^* = G(12) \cong P_3(12)$$

$$= G(2)L_0(12) + G(10)L_1(12) + G(15)L_2(12) + G(8)L_3(12)$$

$$= 1\left(\frac{24}{624}\right) + 3\left(\frac{120}{80}\right) + 4\left(\frac{80}{455}\right) + 6\left(\frac{-60}{84}\right)$$

$$X^* = 0.956044$$

($\wedge \wedge$)

ملاحظة: يمكن اختيار مسألة إيجاد أكثر X^* للمعادلة $f(x)=0$ بطريقة نيوتن وامنون تطبيقاً على الاندراج العكسي.

11.4 من قاعدة المعلومات الانية جرفتم X^* لجزر المعادلة $f(x)=0$ (او جرف الدالة).

X	0.2	0.3	0.5
$y=f(x)$	0.4	-0.1	-0.45

ملاحظة: 1- مقدار الخطأ الناتج من صيغة لاكرايج

$$|E_n^{(x)}| = |f(x) - p_n(x)| = \left| \prod_{i=0}^n (x-x_i) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} \right|$$

حيث $\lambda \in [a, b]$

$$= \left| (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} \right|$$

واذا كان $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \in \mathbb{R}^+$ فأت

$$E_n(x) \leq \left| \frac{\prod_{i=0}^n (x-x_i)}{(n+1)!} \right| M$$

في كثرة العمليات الحسابية مفهومًا عندما تتعامل مع المسائل الكبيرة حيث تحتاج إلى $(3n+1)$ من عمليات الضرب والقسمة و $(2n+1)$ من عمليات الجمع والمربع.

٣- عند توفير بيانات جديدة وترغب باستخدامها مع البيانات القديمة للحصول على تقديرات أفضل فلابد من إعادة كافة التقديرات الحسابية السابقة.

مثال: جد قيمة $P(3.16)$ وقدر الخطأ باستخدام الدالة $P(x) = \ln x$ وحسب الجدول التالي:

x	3.1	3.2
$P(x)$	1.1314	1.1632

الفروقات المثلثية

يوجد ثلاثة أنواع من الفروقات هي الفروقات الأمامية (forward) والفروقات الخلفية (Backward) والمركزة (central word).

لتكن P دالة حقيقية قيمها معلومة في $(n+1)$ من النقاط $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ حيث أن

$$x_i = x_{i-1} + h$$

$$= x_0 + ih$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

أيان الفرق بين قيم x المتتالية مقدار ثابت وفترة h

$$y_i = f_i = P(x_i) = P(x_0 + ih)$$

١- الفروقات الامامية أو القتسية

Forward Difference.

① تعرف الفروقات الامامية الاولى والتي يرمز لها بالرمز (Δ) وتعرف بالشكل التالي:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

عند النقطة x تكتب العلاقة بالشكل:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

عند النقطة x تكتب العلاقة بالشكل:

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$= f(x_0 + (i+1)h) - f(x_0 + ih)$$

OR

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

أ- h هو مقدار Δx

② تعرف الفروقات الامامية الثانية والتي يرمز لها بالرمز (Δ^2) وتعرف بالشكل التالي:

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta(\Delta f(x_i))$$

$$= \Delta(f(x_{i+1}) - f(x_i))$$

$$= \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$$

$$= f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))$$

$$= f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-2$$

(3) وصيغة عامة تعرف الفروقات الامامية من الرتبة k والتي يرمز لها بالرمز (Δ^k) بالشكل التالي :

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} (\Delta f_i)$$

$$= \Delta^{k-1} (f_{i+1} - f_i)$$

$$= \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i \quad \forall i = 0, \dots, n-k$$

جدول الفروقات الامامية للدالة f عند النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\dots$	$\Delta^n f_i$
x_0	f_0	Δf_0				
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$		
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\Delta^3 f_{n-3}$		
x_n	f_n	Δf_{n-1}				

(95)

مثال جـ الفروقات الامامية الاوكس والبالغة

للعين التالية:-

X	2	3	4	5	6
P(X)	5	10	17	26	37

X_i	P_i	ΔP_i	$\Delta^2 P_i$	$\Delta^3 P_i$
2	5	ΔP_0	$\Delta^2 P_0$	$\Delta^3 P_0$
3	10	5	2	0
4	17	7	2	0
5	26	9	2	0
6	37	11		

نلاحظ ان الفروقات ($\Delta^3 P_i$) تساوي صفر على قاع
افضل مقيدة حدود يمكن ان تستخدم تكون من
الدرجة الثانية.

ملاحظة عندما تكون الدالة $P(x)$ مقيدة حدود من الدرجة (n) فان
الفروقات الامامية من الدرجة $(n-1)$ تكون مساوية للصفر.
في حين الفروقات من الدرجة (n) حسيه من المبرهنة التالية.

مبرهنة اذا كانت $P_n(x)$ مقيدة حدود من الدرجة (n) فان

$$\Delta^n P_n(x) = n! a_n h^n$$

حيث a_n معامل x^n الذي $\Delta^{n+1} P_n(x) = 0$ - قوي على x^n .

مثال: احسب الفروقات الامامية من الرتبة 3 لجدول

الجدول

$$P_3(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3$$

$h=2$ تبدأ بـ x من 0 الى 8 ثم وفق المبركته اعلاه

$$n=3, a_3=5, h=2$$

x_i	P_i	ΔP_i	$\Delta^2 P_i$	$\Delta^3 P_i$	$\Delta^4 P_i$
0	-3	-56	-272	240	0
2	53	328	512	240	0
4	381	840	752	240	0
6	1221	1592			
8	2813				

$$\Delta^3 P_3(x) = n! a_n h^n = 3! \times 5 \times 2^3$$

$$= 240$$

$$\Delta^4 P_3(x) = 0$$

الفروقات الخلفية التراجعية

Back word differences.

يعرف معامل (مؤثر) الفروقات الخلفية (∇) (Nabla) اللوك والثانية (∇^2) وبالرتبة k يمزله بالرمز (∇^k) بالشكل التالي:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}, \quad \forall i = n, n-1, \dots, 1$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1})$$

$$= \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

$$= f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2})$$

$$= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}, \quad \forall i = n, n-1, \dots, 2$$

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

$$= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f_{i-j}, \quad i = n, n-1, \dots, n-k$$

X_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^n f_i$
x_0	f_0				
x_1	f_1	∇f_1	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_3$	$\nabla^n f_n$
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_4$	
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_4$	$\nabla^3 f_5$	
x_4	f_4	∇f_4	$\nabla^2 f_5$	$\nabla^3 f_6$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_n	f_n	∇f_n			

(91)

مثال: احسب الفروقات الخلفية الأولى والثانية والثالثة للبيانات التالية:

x	0	2	4	6	8
f(x)	-3	53	381	1221	2813

الحل:

x_i	P_i	∇f_i	$\nabla^2 P_i$	$\nabla^3 P_i$
0	-3			
2	53	56	72	40
4	381	328	268	248
6	1221	840	512	236
8	2813	1592	752	

ملحوظة: ان العلاقة بين الفروقات الامامية والخلفية هي

$$\nabla^k P_i = \Delta^k P_{i-k} \quad \text{حيث } i = 2, 3, \dots$$

بحيث ان تبدأ $i=2$ ولا لا يوجد لدينا فروقات خلفية لان اقل فرق $i=1$.

Central differences

الفروقات المركزية

يعرف معامل (مؤثر) الفروقات المركزية δ للدالة f بالشكل التالي:

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right)$$

$$\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$$

ولذلك تعرف الفروقات المركزية من الدرجة الثانية بالشكل الآتي:

$$\delta^2 f(x) = \delta(\delta f(x)) = \delta\left(f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right)\right)$$

$$= \delta f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - \delta f\left(x - \frac{1}{2}h\right)$$

$$= f(x+h) - f(x) - (f(x) - f(x-h))$$

$$= f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$$

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \quad \text{أحيان}$$

$$\delta^3 f_i = f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2} \quad \text{كذلك}$$

H.W

X_i	f_i	δf_i	$\delta^2 f_i$	$\delta^3 f_i$	$\delta^4 f_i$
X_0	f_0	$\delta f_{1/2}$	$\delta^2 f_1$		
X_1	f_1			$\delta^3 f_{3/2}$	
X_2	f_2	$\delta f_{3/2}$	$\delta^2 f_2$		$\delta^4 f_2$
X_3	f_3	$\delta f_{5/2}$		$\delta^3 f_{5/2}$	
X_4	f_4	$\delta f_{7/2}$	$\delta^2 f_3$		

ملاحظة

① كل من مؤثرات الفروقات الامامية (Δ) والفروقات الخلفية (∇) والمركبة المركزية (δ) هي فروقات م'طية (تحويلات م'طية).

② هناك بعض العلاقات بين جدول الفروقات الامامية والخلفية والمركبة المركزية

$$\Delta f_0 = \nabla f_1 = \delta f_{1/2}$$

$$\Delta^2 f_0 = \nabla^2 f_2 = \delta^2 f_1$$

$$\Delta^3 f_0 = \nabla^3 f_3 = \delta^3 f_{3/2}$$

والعلاقة العامة هي

$$\Delta^k f_{i-k} = \nabla^k f_i = \delta^k f_{\frac{(i-k)+2}{2}} \quad , i = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots$$