ر 331

Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

محاضرات الدكتور نوري فرحان المياحي

في

Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

التحليل الرياضي من المواضيع المهمة في الرياضيات لان دراسته توسع مدارك الطلبة في التحليل والاستنتاج للمسائل الرياضية . هنالك تشابه بين مفردات حسبان التفاضل والتكامل وبين مفردات التحليل الرياضي إلا انه يوجد فرق كبير في طريقة دراسة هذه المفردات ففي الوقت الذي يكون فيه التأكيد على تعلم المهارات في استخدام بعض المفاهيم مثل الاشتقاق والتكامل في موضوع حسبان التفاضل والتكامل. يكون التأكيد في موضوع التحليل الرياضي على المفاهيم نفسها وكيفية تطورها وعلى البناء المنطقي للموضوع ككل وباختصار يكون التأكيد في موضوع حسبان التفاضل والتكامل على الإجابة على الأسئلة من نوع كيف ؟ بينما يكون التأكيد في موضوع التحليل الرياضي على الأسئلة من نوع لماذا ؟ بالإضافة إلى اهتمام الموضوع على الربط بين المفاهيم المختلفة.

1. مفاهيم أساسية Fundamental Concepts

لمحة تاريخية، الأعداد الحقيقية، العلاقة بين الأعداد الحقيقية والنسبية، خاصية ارخميدس، الأعداد الحقيقية ، حقل مرتب كامل، مبرهنة كثافة الأعداد النسبية، مبرهنة كثافة الأعداد غير النسبية.

2. الفضاءات المترية Metric Spaces

تعريفه وأمثلة، الفضاءات شبه المترية، الفضاءات الاقليدية، القيدية

3. تبولوجيات مترية Metric topologies

بعض المبادئ الأساسية في التبولوجيا.

4. التقارب في الفضاءات المترية Convergence in Metric Spaces

المتتابعات، المتتابعات الحقيقية، التقارب في الفضاءات المترية، بعض المتتابعات الحقيقية، المتتابعات الجزئية، متتابعات كوشي و الفضاءات المترية الكاملة، مبرهنة النقطة الصامدة.

5. المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

تعريفها وأمثلة، بعض المتسلسلات اللانهائية الخاصة، اختبار التقارب، المتسلسلات المتناوبة، التقارب المطلق والتقارب المشروط، اختبارات أخرى.

6. الغاية و الاستمرارية Limit and Continuity

غايات الدوال، مبرهنات الغايات، بعض توسعيات مفهوم الغاية، الدوال المستمرة، المبرهنات المكافئة للاستمرارية ، الاستمرارية التتابعية، الاستمرارية المنتظمة، خاصية القيمة المتوسطة.

7. التراص و الترابط Compactness and Connectedness

المجموعات المرصوصة، بعض المبرهنات المهمة في التراص، الاستمرارية والتراص، المجموعات المنفصلة، المجموعات المترابطة و المبرهنات المكافئة للترابط، الاستمرارية و الترابط.

8. التفاضل Differentiation

المشتقات، فضاء الدوال القابلة للاشتقاق، خواص المشتقات، مبرهنة رول، مبرهنة القيمة الوسطى.

ر 331
Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

نظري : 3 مناقشة: 1 عدد الوحدات: 3

المصادر

[1] عادل غسان نعوم،**"مقدمة في التحليل الرياضي"**، جامعة بغداد – العراق 1986.

[2] علي عزيز علي و عبد الرزاق علي الحسوان وعادل زنبل حسين،**"مبادئ الرياضيات التفاضل والتكامل"**، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ،1986.

[3] برسل " حسبان التفاضل والتكامل مع الهندسة التحليلية" ترجمة علي عزيز وآخرون جامعة الموصل الجزء الأول الطبعة الثانية 1983

[4] Apostol . T.M, " Mathematical Analysis", 1974

[5] Ash, R. B., " Real Analysis And Probability", 1972.

[6] Bass . R.F., " Real Analysis" 2010

[7] Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.," Real Variables" , 1969.

[9] Edwin Hewitt Karl Stromberg, " Real And Abstract Analysis" , 1978

[9] Faris . W.G.," Real Analysis " 2004

[10] Folland . G. B.," Real Analysis", 1999

[11] Goldberg, R. R.," Methods Of Real Analysis",1979.

[12] Gupta. S.L & Rani .N., "Fundamental Real Analysis " 1988.

[13] Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.," Introductory Real Analysis",1970.

[14] Malik .V., " Elements of Real Analysis "1983.

[15] Royden. H. L.," Real Analysis",1988

[16] Rudin. W., " Principles Of Mathematical Analysis",1976

[17] Trench. W.F., " Introduction to Analysis " 2oo9.

ر 331

Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

نظري : 3　　　مناقشة : 1　　　عدد الوحدات : 3

1. مفاهيم أساسية Fundamental Concepts

1.1 المجموعات Sets

يعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الاساسيه في الرياضيات ويمكن إدراكه بسهوله من خلال الكثير من المواقف التي يصادفها كل منا في حياته اليومية . فعند الحديث مثلا عن فرقة جنود ،رتل من السيارات، سرب من الطائرات ، حزمه من الأقلام ... الخ. ندرك في كل موقف من هذه المواقف إننا أمام شئ مكون من عدة أشياء وقد اصطلح علميا على تسمية هذا الشئ بالمجموعة (Set). فنقول مجموعة جنود ، مجموعة سيارات ، مجموعة طائرات ، مجموعة أقلام ... الخ. وكذلك اصطلح على تسمية كل من الأشياء المكونة للمجموعة بالعنصر (Element) فمثلا الحرف ض هو عنصر في مجموعة حروف كلمة رياضيات . سوف نرمز للمجموعات بحروف كبيره مثل $A, B, C, \ldots$ ولعناصر المجموعة بحروف صغيره $a, b, c, \ldots$ إذا كان x ينتمي (Belong) إلى A d كتب بالشكل $x \in A$ وإذا كان x ليس احد عناصر المجموعة A يقال أن x لا ينتمي إلى A ويكتب $x \notin A$ مثلا إذا كانت A تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقبل القسمة على 5 فان $30 \in A$ ولكن $21 \notin A$.

يمكن التعبير عن المجموعة بطريقتين هما:

أولا: الطريقة الجد وليه: وهي ابسط الطرق لكتابة المجموعة حيث تكتب جميع عناصر المجموعة (بالطبع إذا كنا نستطيع معرفة جميع عناصرها) ثم بحصرها ضمن قوسين من النوع { } على أن نفصل بين كل عنصرين فيها بفاصله

مثلا :

(1) المجموعة التي عناصرها الأعداد 2-، 1، 7، 4 هي $\{-2, 1, 4, 7\}$ (2) مجموعة حروف كلمة year هي $\{a, e, r, y\}$

ثانيا : طريقة القاعدة : في هذه الطريقة نثبت فقط الصفة المميزة التي تتمتع بها عناصر المجموعة ، حيث نرمز لعنصر ما من عناصر المجموعة برمز مثل x الذي نسميه متغير (Variable) ونعبر عن المجموعة بذكر الخاصية $p(x)$ التي يتمتع بها المتغير، $\{x : p(x)\}$. تستخدم هذه الطريقة عادة للتعبير عن المجموعات عندما لا يكون بالإمكان سرد كل عناصرها ، أما لكثرتها آو لعدم حصرها .

مثلا : (1) $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$ (2) $A = \{x : x > 3,\ x \text{ عدد الطبيعي}\} = \{4, 5, 6, 7, \cdots\}$

المجوعات العددية

أن أكثر المجموعات تداولا في الرياضيات هي المجموعات العددية وسنذكر الآن بعضا منها

(1) مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ ، أي أن $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$

(2) مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer Numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ ، أي أن $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

(3) مجموعة الأعداد النسبية (Rational Numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ ، أي أن $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$

(4) مجموعة الأعداد الحقيقية (Real Numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ ،أي أن $\mathbb{R} = \{x : x \text{ عدد حقيقي}\} = (-\infty, \infty)$

(5) مجموعة الأعداد العقدية(Complex Numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ ، أي أن

$$\mathbb{C} = \left\{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\right\}$$

(6) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (Positive Integer Numbers) ويرمز لها الرمز $\mathbb{Z}^+$ ، أي ان

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

(7) مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة (Negative Integer Numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}^-$ ، أي أن

$$\mathbb{Z}^- = \{\cdots, -3, -2, -1\}$$

(8) مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية (Even Integer Numbers ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}_e$ ، أي أن

$$\mathbb{Z}_e = \{\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\}$$

العدد الصحيح m يسمى عددا زوجيا إذا وجد عدد صحيح n بحيث أن $m = 2n$

(9) مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية (Odd Integer Numbers) ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}_o$

$$\mathbb{Z}_o = \{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$$

العدد الصحيح m يسمى عددا فرديا إذا وجد عدد صحيح n بحيث أن $m = 2n+1$

(10) مجموعة الأعداد الاوليه (Prime Numbers) ويرمز لها بالرمز P

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots\}$$

العدد الأولي هو العدد الصحيح الذي لا يساوي العدد واحد وله أربعة قواسم فقط هي (العدد الواحد،سالب العدد الواحد،العدد نفسه،سالب العدد نفسه)

(11) ليكن $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث $a < b$

(ا) المجموعة $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ تسمى بالفترة المفتوحة (Open interval) ويرمز لها بالرمز (a,b)، أي أن

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

(ب) المجموعة $\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ تسمى بالفترة المغلقة (Closed Interval) ويرمز لها بالرمز $[a,b]$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

(ج) المجموعة $\{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ تسمى بالفترة نصف المفتوحة من اليسار (Half Open Interval From The Left) أو نصف المغلقة من اليمين (Half Closed Interval From The Right) ويرمز لها بالرمز $(a,b]$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$$

(د)المجموعة $\{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ تسمى بالفترة نصف مفتوحة من اليمين (Half Open Interval From The Right) أو نصف مغلقه من اليسار (Half Closed Interval From The Left) ويرمز لها بالرمز $[a,b)$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$$

تعريف(1.1.1)

المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى بالمجموعة الخالية (Empty Set) ويرمز لها بالرمز $\emptyset$

مثلا: $\{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 4\} = \emptyset$ ولكن $\{x \in \mathbb{N} : 3 \le x < 4\} = \{3\}$

ملاحظة

توجد مجموعات لا نعرف فيما إذا كانت مجموعة خالية أم لا. مثلا

$A = \{n \in \mathbb{N} : n > 2,$ تحقق المعادلة $x^n + y^n = z^n$ حيث $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ $n\}$

لا يعرف في الوقت الحاضر فيما إذا كانت هذه المجموعة خالية أم لا .

تعريف (2.1.1)

لتكن كل من A, B مجموعه. يقال عن A بأنها مجموعه جزئيه (Subset) من B (وتكتب $A \subseteq B$) إذا كان كل عنصر x في A يكون أيضا عنصرا في B . ويقال في بعض الأحيان أن A محتوى في B أو أن B تحتوي على A . ويلاحظ أن $A \not\subset B$ تعني أن A ليست مجموعه جزئيه من B .

يقال عن A بأنها مجموعه جزئيه فعليه (Proper Subset) من B (تكتب $A \subset B$) إذا كان

(1) A مجموعه جزئيه B ، أي أن $A \subseteq B$ (2) يوجد على الأقل عنصر واحد في B عنصر موجود في A

ويقال عن المجموعتين A, B بأنهما متساويتين (يكتب $A = B$) إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

ر 331
Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي
نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

مثال (3.1.1)
(1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

(2) إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \le x < 4\}$ فان $A \subset \mathbb{Z}$ ولكن $A \not\subset \mathbb{N}$

(3) إذا كانت U تمثل طلبة كلية علوم الحاسوب والرياضيات جامعة القادسية وكانت A تمثل طلبة قسم الرياضيات وكانت B تمثل طلبة قسم الكيمياء فان $A \subset U$ ولكن $B \not\subset U$

(4) إذا كانت $X = \{a, b, c\}$ فان جميع المجموعات الجزئية من X هي

$$A_1 = \emptyset, \quad A_2 = \{a\}, \quad A_3 = \{b\}, \quad A_4 = \{c\}, \quad A_5 = \{a,b\}, \quad A_6 = \{a,c\}, \quad A_7 = \{b,c\}, \quad A_8 = X$$

ملاحظات
(1) ألمجموعه الخالية وحيده (2) كل مجموعه هي جزئيه من نفسها أي أن $A \subseteq A$

(3) المجموعة الخالية $\emptyset$ هي مجموعه جزئيه من أية مجموعه A، أي أن $\emptyset \subset A$ لأي مجموعه A

(4) إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت $B \subseteq C$ فان $A \subseteq C$

تعريف (4.1.1)
كل مجموعه تهمنا عناصرها أو أجزاءها أثناء دراسة معينه تسمى المجموعة الشاملة أو الكلية (Universal set) بعبارة أخرى : إذا كانت جميع المجموعات الواردة في دراسة معينه أجزاء من مجموعه واحده معينه سمينا هذه المجموعة بالمجموعة الشاملة أو الكلية ويرمز لها بالرمز U

مثلا : إذا كان الحديث عن مجموعات من أعداد صحيحة غير سالبة مثل $A = \{1,2,6,8\}, \quad B = \{3,6,9\}, \cdots$ فيمكن اعتبار المجموعة $\mathbb{N}$ مجموعة شاملة.

تعريف (5.1.1)
لتكن كل من A, B مجموعة

(1) المجموعة التي تتكون من العناصر التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين A أو B تسمى اتحاد (Union) المجموعتين A, B ويرمز لها بالرمز $A \cup B$ ، أي أن $A \cup B = \{x : x \in A \quad or \quad x \in B\}$

إذا كان $x \in A \cup B$ فان $x \in A$ أو $x \in B$ أو كلاهما ، أما إذا كان $x \notin A \cup B$ فان $x \notin A$ ، $x \notin B$

(2) المجموعة التي تتكون من العناصر التي تنتمي إلى كل من المجموعتين A, B تسمى تقاطع (Intersection) المجموعتين A, B ويرمز لها $A \cap B$ ، أي أن $A \cap B = \{x : x \in A \quad and \quad x \in B\}$

إذا كان $x \in A \cap B$ فان $x \in A$ و $x \in B$ أما إذا كان $x \notin A \cap B$ فان $x \notin A$ أو $x \notin B$ أو كليهما. يقال أن المجموعتين A, B متنافيتين (Disjoint Sets) إذا كان $A \cap B = \emptyset$

مثلا : إذا كانت $A = \{1,3,8\}, \quad B = \{1,2,5,7\}$ فان $A \cap B = \{1\}, \quad A \cup B = \{1,2,3,5,7,8\}$

مبرهنة (6.1.1)
لتكن كل من A, B, C مجموعه جزئيه من المجموعة الشاملة U

(1) $A \subset A \cup B$ وكذلك $A \cap B \subset A$

(2) $A \cup B = B$ إذا وفقط إذا كانت $A \subseteq B$ وكذلك $A \cap B = A$ إذا وفقط إذا كانت $A \subseteq B$

(3) $A \cup A = A$ ، $A \cup \emptyset = A$ ، $A \cup U = U$ وكذلك $A \cap A = A$ ، $A \cap \emptyset = \emptyset$ ، $A \cap U = A$

(4) $A \cup B = B \cup A$ وكذلك $A \cap B = B \cap A$

(5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ وكذلك $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ، $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ر 331
Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

نظري : 3   مناقشة : 1   عدد الوحدات : 3

تعريف (7.1.1)
لتكن كل من A,B مجموعه . المجموعة التي عناصرها تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B تسمى الفرق (Difference) بين المجموعتين A,B ويرمز له بالرمز $A|B$ أو $A-B$

$A|B=\{x : x\in A \quad and \quad x\notin B\}$

يقال أن $A|B$ مكملة (متممه Complement) B في A إذا كانت $B\subset A$. وان مكملة المجموعة A بالنسبة للمجموعة الشاملة U هي $U|A$ ويرمز لها بالرمز A^c

$A^c=U|A=\{x : x\in U \quad and \quad x\notin A\}$

وللسهولة تكتب $A^c=\{x : x\notin A\}$. الفرق التناظري (Symmetric Difference) بين المجموعتين A,B يرمز له بالرمز $A\,\Delta\,B$ ويعرف بالشكل $A\,\Delta\,B=(A|B)\cup(B|A)$

مبرهنة (8.1.1)
لتكن كل من A,B,C مجموعة جزئيه من المجموعة الشاملة U .

(1) $A|B=A\cap B^c$ (2) إذا كانت $A\subseteq B$ فان $B^c\subseteq A^c$ (3) $(A^c)^c=A$ (4) $\emptyset^c=U$ ، $U^c=\emptyset$

(5) $A\cap A^c=\emptyset$ ، $A\cup A^c=U$ (6) $(A\bigcup B)^c=A^c\cap B^c$ ، $(A\cap B)^c=A^c\bigcup B^c$

(7) $A\,\Delta\,B=B\,\Delta\,A$ (8) $A\,\Delta(B\,\Delta\,C)=(A\,\Delta\,B)\Delta C$ (9) $A\,\Delta\emptyset=A$ (10) $A\,\Delta\,A=\emptyset$

المجموعات المرتبة Ordered Sets

تعريف (9.1.1)
لتكن R علاقة على مجموعة ما X يقال أن

(1) R علاقة انعكاسية (Reflexive) على X إذا كان xRx لكل $x\in X$

(2) R متناظرة (Symmetric) على X إذا كان xRy فان yRx لكل $x,y\in X$

(3) R متعدية (Transitive) على X إذا كان xRy وكان yRz فان xRz لكل $x,y,z\in X$

(4) R تخالفيه (ضد متناظرة) (Anti-symmetric) على X إذا كان xRy و yRx فان $x=y$.

لتكن R علاقة على المجموعة X .يقال عن R بأنها علاقة ترتيب ابتدائية (Preorder relation) على المجموعة X إذا كانت R انعكاسية ومتعدية ويقال أن R علاقة ترتيب جزئي (Partial order relation) على X إذا كانت R انعكاسية، متعدية وتخالفيه. المجموعة غير الخالية X مع علاقة الترتيب الجزئي R على X تسمى مجموعة مرتبة جزئيا (Partially order set) و أن الثنائي (X,R) يسمى مجموعة مرتبة جزئيا.

مثال (10.1.1)
(1) لتكن $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة

(أ) $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x\le y\}$ علاقة ترتيب جزئي لأنها انعكاسية ، متعدية ، متخالفة.

(ب) $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 3$ يقبل القسمة على $x-y\}$ علاقة ليست ترتيب جزئي لأنها ليست متخالفة.

(ج) $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : y$ يقبل القسمة على $x\}$ علاقة ترتيب جزئي لأنها انعكاسية ، متعدية ، متخالفة.

(2) لتكن X تمثل مجموعة غير خالية، ولتكن $R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X) : A\subseteq B\}$ ، علاقة ترتيب جزئي

مبرهنة (11.1.1)
لتكن R علاقة على المجموعة غير الخالية X

(1) إذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على X فان R^{-1} تكون كذلك

(2) R علاقة ترتيب جزئي على X إذا وفقط إذا كان (أ) $R\cap R^{-1}=\mathrm{I}_X$ (ب) $R\circ R=R$

البرهان :

(1)

(أ) يجب أن نبرهن R^{-1} انعكاسية

ليكن $x\in X$ ، بما أن R انعكاسية $\Leftarrow \quad (x,x)\in R \quad \Leftarrow \quad (x,x)R^{-1} \quad \Leftarrow \quad R^{-1}$ علاقة انعكاسية

(ب) يجب أن نبرهن R^{-1} متعدية

ليكن $x,y,z\in X$ بحيث أن $(x,y)\in R^{-1}\wedge(y,z)\in R^{-1} \quad \Leftarrow \quad (y,x)\in R\wedge(z,y)\in R$

بما أن R متعدية $\Leftarrow \quad (z,x)\in R \quad \Leftarrow \quad (x,z)R^{-1} \quad \Leftarrow \quad R^{-1}$ علاقة متعدية

(ج) يجب أن نبرهن R^{-1} تخالفيه

ليكن $x,y\in X$ ،بحيث أن $(x,y)\in R^{-1}\wedge(y,x)\in R^{-1} \quad \Leftarrow \quad (y,x)\in R\wedge(x,y)\in R$

بما أن R تخالفيه $\Leftarrow \quad x=y \quad \Leftarrow \quad R^{-1}$ علاقة ترتيب جزئي على X

(2) نفرض R علاقة ترتيب جزئي على X

(أ) ليكن $(x,y)\in R\cap R^{-1} \quad \Leftarrow \quad (x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1} \quad \Leftarrow \quad (x,y)\in R\wedge(y,x)\in R$

بما أن R تخالفيه $\Leftarrow \quad x=y \quad \Leftarrow \quad (x,y)\in \mathrm{I}_X \quad \Leftarrow \quad R\cap R^{-1}\subseteq \mathrm{I}_X$

ليكن $(x,x)\in \mathrm{I}_X$

بما أن كل من R,R^{-1} علاقة انعكاسية ، فأن $(x,x)\in R,R^{-1} \quad \Leftarrow \quad (x,x)\in R\cap R^{-1} \quad \Leftarrow \quad \mathrm{I}_X\subseteq R\cap R^{-1}$

وعليه $R\cap R^{-1}=\mathrm{I}_X$.

(ب) $(x,z)\in R \leftrightarrow (x,y)\in\wedge(y,z)\in R \ni \exists y\in X \leftrightarrow (x,z)\in R\circ R$ وعليه $R\circ R=R$

الاتجاه الأخر : نفرض (أ) $R\cap R^{-1}=\mathrm{I}_X$ (ب) $R\circ R=R$ ونبرهن R علاقة ترتيب جزئي على X

ليكن $x\in X \quad \Leftarrow \quad (x,x)\in \mathrm{I}_X$ ولكل $R\cap R^{-1}=\mathrm{I}_X \quad \Leftarrow \quad (x,x)\in R\cap R^{-1} \quad \Leftarrow \quad (x,x)\in R$

$\Leftarrow \quad R$ علاقة انعكاسية .

ليكن $(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R \quad \Leftarrow \quad (x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1} \quad \Leftarrow \quad (x,y)\in R\cap R^{-1}$

ولكن $R\cap R^{-1}=\mathrm{I}_X \quad \Leftarrow \quad (x,y)\in \mathrm{I}_X \quad \Leftarrow \quad x=y \quad \Leftarrow \quad R$ علاقة تخالفيه

ليكن $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R$ ولكن $R\circ R=R \Leftarrow \quad (x,y)\in R\circ R\wedge(y,z)\in R\circ R$

ملاحظــة

يستعمل الرمز $\le$ ليدل على علاقة الترتيب الجزئي على المجموعة غير الخالية X بدلا من الحرف R وكل زوج مرتب (x,y) في العلاقة يكتب بالصورة $x\le y$ ويقرا(x يسبق y) أو (y يلي x) .ويكتب أيضا $x<y$ للدلالة على أن $x\neq y$ ، $x\le y$ وأخيرا إذا كانت $(X,\le)$ مجموعة مرتبة جزئيا فنستخدم الرمز X بدلا من $(X,\le)$ في حالة عدم وجود التباس

مثل (12.1.1)

كل من $(\mathbb{C},\le)$, $(\mathbb{R},\le)$, $(\mathbb{Q},\le)$, $(\mathbb{Z},\le)$, $(\mathbb{N},\le)$ تكون مجموعة مرتبة جزئيا

تعريف (13.1.1)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا وليكن $x,y\in X$ يقال عن العنصرين x,y بأنهما قابلين للمقارنة (Comparable) إذا كان $x\le y$ أو $y\le x$.

لتكن A مجموعة جزئية في X . يقال عن المجموعة A بأنها مرتبة كليا (Totally ordered) (وتسمى أحيانا سلسله chain) في X إذا كان كل عنصرين في X قابلين للمقارنة.وبصورة عامة يقال عن X بأنها مرتبة كليا إذا كان كل عنصرين في X قابلين للمقارنة .

ر 331
Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

نظري : 3　　مناقشة: 1　　عدد الوحدات: 3

ملاحظة
(1) كل مجموعة جزئية من مجموعة مرتبة كليا تكون مرتبة كليا

(2) غالبا ما يقال لمجموعة أنها مرتبة إذا كانت مرتبة جزئيا أو كليا

مثال (12.1.1)
(1) كل من هذه المجموعات $(\mathbb{N},\le),(\mathbb{Z},\le),(\mathbb{Q},\le),(\mathbb{R},\le)$ مجموعة مرتبة كليا ولكن $(\mathbb{C},\le)$ ليست مجموعة مرتبة كليا.

(2) لتكن $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+ : y$ يقبل القسمة على $x\}$ ، فان R علاقة ترتيب جزئي ولكن $\mathbb{Z}^+$ ليست تركيب كلي لان مثلا العددين $3,7\in\mathbb{Z}^+$ ولكن $3,7$ غير قابلين للمقارنة لان العدد 3 لا يقبل القسمة على 7 وكذلك العدد 7 لا يقبل القسمة على 3

(3) لتكن X تمثل مجموعة غير خالية، ولتكن $R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X):A\subseteq B\}$ ، علاقة ترتيب جزئي ولكن $P(X)$ ليست مجموعة مرتبة كليا.

تعريف (13.1.1)
لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا وليكن $a,b\in X$ يقال عن a بأنه عنصر أول(First Element) أو عنصر اقل (Smallest Element) أو (Least Element) في X إذا كان $a\le x$ لكل $x\in X$. يقال عن b بأنه عنصر أخير (Last Element) أو عنصر اكبر (Greatest Element) في X إذا كان $x\le b$ لكل $x\in X$.

مثال(14.1.1)
(1) لتكن $X=\{3,6,9,12,15\}$

(أ) إذا كانت $R_1=\{(x,y)\in X\times X : x\le y\}$ ، فان R_1 علاقة ترتيب جزئي على X ، وان العدد 3 عنصر أول والعدد 15 عنصر أخير .

(ب) إذا كانت $R_2=\{(x,y)\in X\times X : y\le x\}$ ، فان R_2 علاقة ترتيب جزئي على X ، وان العدد 15 عنصر أول والعدد 3 عنصر أخير.

(ج) إذا كانت $R_3=\{(x,y)\in X\times X : x$ يقبل القسمة على $y\}$ ، فان R_3 علاقة ترتيب جزئي على X ، وان العدد 3 عنصر أول ولا يوجد عنصر أخير . لان $R_3=\{(3,3),(3,6),(3,9),(3,12),(3,15),(6,6),(6,12),(9,9),(12,12),(15,15)\}$

(2) لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$ ولتكن $R=\mathrm{I}_X\cup\{(2,1),(3,1),(5,1),(4,3),(4,1),(4,2)\}$ ، فان R علاقة ترتيب جزئي على X ، لا يوجد عنصر أول ولكن العدد 1 هو العنصر الأخير.

(3) إذا كانت $R=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:x\le y\}$ ، فان R علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{N}$ ، وان العدد 1 هو العنصر الاول ، ولكن لا يوجد عنصر أخير .

(4) إذا كانت $R=\{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}:x\le y\}$ ، فان R علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{Q}$ ، لا يوجد عنصر أول وكذلك لا يوجد عنصر أخير .

(5) لتكن X تمثل مجموعة غير خالية، ولتكن $R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X):A\subseteq B\}$ ،فان R علاقة ترتيب جزئي وان $\varnothing$ هي العنصر الاول والمجموعة الشاملة X هي العنصر الأخير.

مبرهنة(15.1.1)
إذا احتوت المجموعة X على عنصر أول (أو عنصر أخير) فانه وحيد . بعبارة أخرى :كل مجموعة مرتبة جزئيا تحتوي على الأكثر عنصر أول (عنصر أخير) واحد .

البرهان:

ليكن $a,a'\in X$ بحيث كل من a,a' عنصر أول في X . يجب ان نبرهن $a=a'$

$\cdots(1)$ $a \le x$ لكل $x \in X$ وكذلك $\cdots(2)$ $a' \le x$ لكل $x \in X$

بما ان $a' \in X$ ، من (1)، نحصل على $\cdots(3)$ $a \le a'$ وكذلك بما ان $a \in X$ ، من (2) ، نحصل على $\cdots(4)$ $a' \le a$

من(3)،(4) نحصل على $a = a'$.

تعريف (16.1.1)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا وليكن $a,b \in X$.

يقال عن a بأنه عنصر اصغر (Minimal Element) في X إذا تحقق الشرط التالي :

كلما وجد $x \in X$ بحيث أن $x \le a$ فان $a = x$

ويقال عن b بأنه عنصر أعظم (Maximal Element) في X إذا تحقق الشرط التالي

كلما وجد $x \in X$ بحيث أن $b \le x$ فان $b = x$

مثال(17.1.1)

(1) ليكن $X = \{1,2,3,4,5\}$ ،

(ا) إذا كانت $R_1 = \mathrm{I}_X \cup \{(2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1)\}$ ، فان R_1 علاقة ترتيب جزئي على X ، وان كل من $4,5$ عنصر اصغر وان العدد 1 هو العنصر أعظم .

(ب) إذا كانت $R_1 = \mathrm{I}_X \cup \{(3,5),(4,5),(5,1),(5,2)\}$ ، فان R_1 علاقة ترتيب جزئي على X ، وان كل من $3,4$ عنصر اصغر وان كل من $1,2$ هو العنصر أعظم.

(2) لتكن $X = \{3,6,7,12,13,13,15,18\}$

(ا) إذا كانت $R_1 = \{(x,y) \in X \times X : x \le y\}$ ، فان R_1 علاقة ترتيب جزئي على X ، وان العدد 3 عنصر اصغر وان العدد 18 هو العنصر أعظم .

(ب) إذا كانت $R_2 = \{(x,y) \in X \times X : y \le x\}$ ، فان R_2 علاقة ترتيب جزئي على X، وان العدد 18 عنصر اصغر وان العدد 3 هو العنصر أعظم .

مثال (18.1.1)

(1) إذا كانت $A = \{-3,-2,-1,0,1,4,7\}$ فان $\min A = -3, \quad \max A = 7$

(2) $\min \mathbb{N} = 1$ و $\max \mathbb{N}$ غير موجود   (3) كل من $\min \mathbb{Z}$ و $\max \mathbb{Z}$ غير موجود

(4) إذا كانت $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\}$ فان $\max A = 1$ و $\min A$ غير موجود

(5) إذا كانت $A = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\}$ فان $\min A = -1$ و $\max A$ غير موجود

(6) إذا كانت $A = \{\pm\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\}$ فان $\max A = 1$ و $\min A = -1$

مبرهنة (19.1.1)

(1) إذا كان a عنصر أول في X فأنة عنصر اصغر ووحيد والعكس غير صحيح دائما

(2) إذا كان b عنصر أخير في X فأنة عنصر أعظم ووحيد والعكس غير صحيح دائما

البرهان:

(2) نفرض b ليس عنصر أعظم $\Leftarrow$ يوجد $y \in X$ بحيث ان $b \le y$ ، ومن تعريف العنصر الأخير نحصل على $x \le b$ لكل $x \in X$ وهذا تناقض

تعريف(20.1.1)
لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا .يقال عن X بأنها حسنة الترتيب (Well Ordered) أو مرتبة ترتيبا حسنا إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية من X تحتوي على عنصر أول

مثال(21.1.1)
(1) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ حسنة الترتيب

(2) مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ليست حسنة الترتيب لان لو أخذنا مثلا $A=\{\cdots,-2,-1,0\}$ ، فان A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{Z}$ ولكن لا تحتوي على عنصر أول .

(3) المجموعة $X=(0,1)$ مع الترتيب الطبيعي ليست حسنة الترتيب

مبرهنة (22.1.1)
(1) كل مجموعة حسنة الترتيب تكون مرتبة كليا

(2) كل مجموعة جزئية من مجموعة حسنة الترتيب تكون حسنة الترتيب .

البرهان:

(1) ليكن X مجموعة حسنة الترتيب ، وليكن $x,y\in X$. يجب ان نبرهن x,y قابلين للمقارنة

لتكن $A=\{x,y\}$ $\Leftarrow$ $A\subseteq X$

بما ان X حسنة الترتيب $\Leftarrow$ A لها تحتوي على أول $\Leftarrow$ العنصر الاول أما x أو y

$\Leftarrow$ $x\le y$ أو $y\le x$ $\Leftarrow$ x,y قابلين للمقارنة.

(2) ليكن X مجموعة حسنة الترتيب ، وليكن $Y\subseteq X$.

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من Y ، بما ان $Y\subseteq X$ $\Leftarrow$ $A\subseteq X$

بما ان X مجموعة حسنة الترتيب $\Leftarrow$ A تحتوي على عنصر أول $\Leftarrow$ Y مجموعة حسنة الترتيب

تعريف (23.1.1)
لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا ولتكن $A\subseteq X$

(1) يقال عن العنصر $a\in X$ (ليس من الضروري أن يكون $a\in A$) بأنه قيد أسفل (Lower Bound) للمجموعة A إذا كان $a\le x$ لكل $x\in A$. ويقال عن a بأنه اكبر قيد أسفل (Greatest of Lower Bound) للمجموعة A إذا كان

(ا) a قيد أسفل للمجموعة A (ب) $a'\le a$ لكل قيد أسفل a' لمجموعة A

ويرمز للعنصر الذي يكون اكبر قيد أسفل للمجموعة A بالرمز $\inf A$ أو $\text{glb}\,A$

(2) يقال عن العنصر $b\in X$ (ليس من الضروري أن يكون $b\in A$) بأنه قيد أعلى (Upper Bound) للمجموعة A إذا كان $x\le b$ لكل $x\in A$ ويقال عن b بأنه اصغر قيد أعلى (Least of Upper Bound) للمجموعة A إذا كان

(ا) b قيد أعلى للمجموعة A (ب) $b\le b'$ لكل قيد أعلى b' للمجموعة A

ويرمز للعنصر الذي يكون اصغر قيد أعلى للمجموعة A بالرمز $\sup A$ أو $\text{lub}\,A$

ملاحظات
(1) ليس من الضروري إن يكون $\inf A$ موجودا وكذلك ليس بالضرورة أن يكون $\sup A$ موجود

(2) إذا كان $\inf A$ موجود فانه ليس من الضروري أن ينتمي إلى المجموعة A وكذلك إذا كان $\sup A$ موجود فأنة ليس بالضرورة أن ينتمي إلى A

(3) إذا كان $\inf A$ موجود فانه وحيد وكذلك إذا كان $\sup A$ موجود فأنة وحيد

(4) إذا كان كل من $\inf A$ و $\sup A$ موجود فان $\inf A\le\sup A$

مثال (24.1.1)

(1) إذا كانت $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x\le y\}$ وكانت $A=[2,3]$ ، فان $\inf A=2,\ \sup A=3$

(2) إذا كانت $X=\{1,2,3,4,5\}$ ، $R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X): A\subseteq B\}$ ، ولتكن $A\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$ فان $\inf A=\emptyset,\ \sup A=\{1,2,3,4\}$

(3) إذا كانت $A=\{x\in R: x\le 2\}$ فان $\sup A=2$ و $\inf A$ غير موجود

(4) إذا كانت $A=\{x\in R: -4\le x\le 5\}$ فان $\sup A=5$ و $\inf A=-4$

تعريف (25.1.1)

لتكن X مجموعة مرتبة جزئيا ولتكن $A\subseteq X$.يقال عن المجموعة A بأنها مقيدة من الأسفل (Bounded Below) إذا وجد لها قيد أسفل (أي إذا وجد $a\in X$ بحيث أن $a\le x$ لكل $x\in A$) .ويقال عن المجموعة A بأنها مقيدة من الأعلى (Bounded Above) إذا وجد لها قيد أعلى (أي إذا وجد $b\in X$ بحيث أن $x\le b$ لكل $x\in A$) ونقول عن المجموعة A بأنها مقيدة (Bounded) إذا كانت A مقيدة من الأسفل ومقيدة من الأعلى

تعريف (26.1.1)

لتكن X مجموعة مرتبه جزئيا . يقال عن X بأنها كاملة (Complete) أو مرتبة كاملة (Complete ordered) إذا كان لكل مجموعة جزئية غير خالية ومقيدة من الأعلى A في X فان $\sup A$ موجودة.

وهذا يكافئ :كل مجموعة جزئية غير خالية ومقيدة من الأسفل B في X فان $\inf B$ موجود

2.1 الأعداد الحقيقية Real Numbers

توجد طرق مختلفة لبناء الأعداد الحقيقية والتي لا مجال لذكرها ألان وسوف نكتفي بافتراض مجموعة غير خالية $\mathbb{R}$ مع ثلاث خواص والتي هي : بديهيات الحقل ، بديهيات الترتيب ، بديهية الكمال . تسمى $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية (Set of real numbers)

أولا: بديهيات الحقل Axioms of Field

تعريف(1.2.1)

الحقل هو مجموعة غير خالية F مع وجود عمليتين الأولى هي عملية الجمع والتي تقضي بأنة لأي عنصرين a,b في F يوجد عنصر في F يمثل بالرمز $a+b$ ويسمى حاصل جمع a مع b . والعملية الثانية هي عملية الضرب والتي تقضي بأنه لأي عنصرين a,b في F يوجد عنصر في F يمثل بالرمز $a\cdot b$ ويسمى حاصل ضرب a في b . وتتصف هاتان العمليتان بالخواص التي تطرحها البديهيات التالية :

(1) بديهية الإبدال

(أ) $a+b=b+a$ لكل $a,b\in F$ (ب) $a\cdot b=b\cdot a$ لكل $a,b\in F$

(2) بديهية التجميع

(أ) $a+(b+c)=(a+b)+c$ لكل $a,b,c\in F$ (ب) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ لكل $a,b,c\in F$

(3) بديهية التوزيع : $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ لكل $a,b,c\in F$

(4) بديهية العنصر المحايد

(أ) يوجد $0\in F$ بحيث أن $a+0=0+a=a$ لكل $a\in F$ ويسمى العدد 0 بالمحايد الجمعي

(ب) يوجد $1\in F$ بحيث أن $a.1=1.a=a$ لكل $a\in F$ ويسمى العدد 1 بالمحايد الضربي

(5) بديهية العنصر النظير

(أ) لكل $a\in F$ يوجد $(-a)\in F$ بحيث أن $a+(-a)=(-a)+a=0$. يسمى العدد $(-a)$ بالنظير الجمعي إلى

a وللسهولة يكتب $-a$ بدلا من $(-a)$. ونعرف $a-b$ بالصيغة $a-b=a+(-b)$
(ب) لكل $a\in F$ ، $a\neq 0$ يوجد $b\in F$ بحيث أن $a\cdot b=b\cdot a=1$ ويسمى العدد b بالنظير ألضربي إلى a ويرمز له بالرمز a^{-1} ، بعبارة أخرى : يقال عن النظام الرياضي $(F,+,\cdot)$ بأنه حقلا إذا كان

(1) $(F,+)$ زمرة أبدالية
(2) $(F\,|\,\{0\},\cdot)$ زمرة أبدالية
(3) يتحقق قانوني التوزيع، أي أن $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\quad (b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ لكل $a,b,c\in F$

مثال(2.2.1)

(1) إذا كانت $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية فان الثلاثي $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ يكون حقلا ويسمى حقل الأعداد النسبية
(2) إذا كانت $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقة فان الثلاثي $(\mathbb{R},+,\cdot)$ يكون حقلا ويسمى حقل الأعداد الحقيقية
(3) إذا كانت $\mathbb{C}$ تمثل مجموعة الأعداد العقدية فان الثلاثي $(\mathbb{C},+,\cdot)$ يكون حقلا ويسمى حقل الأعداد العقدية

المبرهنة التالية تبين الخواص العامة للحقل

مبرهنة (3.2.1)

ليكن F حقلا وليكن $a,b,c\in F$

(1) $a+a=a$ إذا وفقط إذا كان $a=0$ (2) $a\cdot 0=0$ لكل $a\in F$ (3) $-(-a)=a$ لكل $a\in F$
(4) $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)=(-a)\cdot b$ لكل $a,b\in F$ (5) $(-a)^2=a^2$ لكل $a\in F$
(6) $a\cdot b=0$ إذا وفقط إذا كان $a=0$ أو $b=0$ بعبارة أخرى إذا كانت $a\neq 0,\ \ b\neq 0$ فان $a\cdot b\neq 0$
(7) إذا كان $a\neq 0,\ \ b\neq 0$ فان $(a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$ (8) $(-1)\cdot a=-a$ لكل $a\in F$
(9) $-(a+b)=(-a)+(-b)$ لكل $a,b\in F$ (10) $-(a-b)=b-a$ لكل $a,b\in F$
(11) $a+c=b+c$ إذا وفقط إذا كان $a=b$ (12) إذا كان $c\neq 0$ فان $a\cdot c=b\cdot c$ إذا وفقط إذا كان $a=b$
(13) إذا كان $a\neq 0$ فان $(a^{-1})^{-1}=a$ و $(-a)^{-1}=-a^{-1}$

البرهان:

(1) $a+a=a$ إذا وفقط إذا $(a+a)+(-a)=a+(-a)$ إذا وفقط إذا $a+(a+(-a))=a+(-a)$ إذا وفقط إذا $a+0=0$ إذا وفقط إذا $a=0$.

(2) $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0 \ \Rightarrow\ a\cdot 0=0$

(3) بما أن $(-a)+a=a+(-a)=0$ فان $a=-(-a)$ وذلك لوحدانية النظير

(4) $0=a\cdot 0=a\cdot(b+(-b))=a\cdot b+a\cdot(-b)$

$\Rightarrow$ $a\cdot(-b)$ النظير الجمعي إلى $a\cdot b$ ولكن $-(a\cdot b)$ هو النظير الجمعي إلى $a\cdot b$ فان $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$ لان النظير الجمعي وحيد وعليه $(-a)\cdot b=b\cdot(-a)=-(b\cdot a)=-(a\cdot b)$.

(5) $(-a)\cdot(-a)=-(a\cdot(-a))=-(-(a\cdot a))=a\cdot a$ وعليه $(-a)^2=a^2$

(6) إذا كانت $b=0$ فان $a\cdot b+a=a\cdot 0+a\cdot 1=a\cdot(0+1)=a\cdot 1=a$ وعليه $a\cdot b=0$

إذا كانت $a\cdot b=0$ وكانت $b\neq 0$ فان $(a\cdot b)\cdot b^{-1}=0\cdot b^{-1}=0$ ولكن $(a\cdot b)\cdot b^{-1}=a\cdot(b\cdot b^{-1})=a\cdot 1=a$ فان $a=0$

(7) إذا كانت $a\neq 0,\ \ b\neq 0$ فان

$$(a\cdot b)\cdot(a^{-1}\cdot b^{-1})=(a\cdot b)\cdot(b^{-1}\cdot a^{-1})=a\cdot(b\cdot b^{-1})\cdot a^{-1}=(a\cdot 1).a^{-1}=a\cdot a^{-1}=1\neq 0$$

ولكن $(a\cdot b)^{-1}$ هو النظير الضربي الى $a\cdot b$ فان $(a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$ لان النظير الضربي وحيد

$$(-1)\cdot a = -(1\cdot a) = -a \quad (8)$$

$$-(a+b) = (-1)\cdot(a+b) = (-1)\cdot a + (-1)\cdot b = (-a)+(-b) \quad (9)$$

$$-(a-b) = -(a+(-b)) = (-a)+(-(-b)) = (-a)+b = b+(-a) \quad (10)$$

$$a+c=b+c \iff (a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)$$
$$\iff a+(c+(-c))=b+(c+(-c)) \iff a+0=b+0 \iff a=b \quad (11)$$

$$a\cdot c=b\cdot c \iff (a\cdot c)\cdot c^{-1}=(b\cdot c)\cdot c^{-1} \iff a\cdot(c\cdot c^{-1})=b\cdot(c\cdot c^{-1})$$
$$\iff a\cdot 1=b\cdot 1 \iff a=b \quad (12)$$

ثانيا : بديهيات الترتيب Axioms of Order

الحقل المرتب (Ordered field) هو حقل F يحتوي على مجموعة جزئية P عناصرها غير صفرية ($a \neq 0$ لكل $a \in P$) تسمى موجبة (Positive) وتحقق البديهيات التالية

(1) إذا كان $a,b \in P$ فان $a+b \in P$

(2) إذا كان $a,b \in P$ فان $a\cdot b \in P$

(3) إذا كان $a \in F$ بحيث أن $a \neq 0$ فان واحدة فقط من العبارات التالية صادقة: $a \in P$ ، $-a \in P$

توجد مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ يرمز لها بالرمز $\mathbb{R}^+$ وتحقق البديهيات التالية :

(1) إذا كان $x,y \in \mathbb{R}^+$ فان $x+y \in \mathbb{R}^+$ و $xy \in \mathbb{R}^+$

(2) إذا كان $x \in \mathbb{R}$ فان واحدة فقط من العبارات التالية صادقة

$$-x \in \mathbb{R}^+ \ , \ x=0 \ , \ x \in \mathbb{R}^+$$

الأعداد التي تنتمي إلى $\mathbb{R}^+$ تسمى أعداد موجبة (أي أن $\mathbb{R}^+$ تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة). العدد الحقيقي x هو عدد سالب إذا وفقط إذا كان $-x \in \mathbb{R}^+$. ومجموعة الأعداد الحقيقية السالبة يرمز لها بالرمز $\mathbb{R}^-$ والصفر ليس موجبا أو سالبا وعلية

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

تعريف (4.2.1)

لتكن $x,y \in \mathbb{R}$ يقال عن x بأنه اقل من y (يكتب $x<y$) إذا كان $y-x \in \mathbb{R}^+$ ويقال عن x بأنه اكبر من y (يكتب $x>y$) إذا كان $y<x$ ،أي إذا كان $x-y \in \mathbb{R}^+$ وعلية يكون $x<y$ إذا وفقط إذا كان $y>x$

رموز

(1) $x \leq y$ تعني أما $x<y$ أو $x=y$ وتقرا x اقل أو يساوي y **(2)** $x \leq y < z$ تعني $x \leq y$ و $y<z$

بسهولة يمكن إثبات $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على $\mathbb{R}$ وهذا يعني أن $\mathbb{R}$ مجموعة مرتبة

مبرهنة (5.2.1)

إذا كان $x,y \in \mathbb{R}$ فأن واحدة فقط من العبارات التالية صادقة $x<y, \quad x=y, \quad x>y$.

البرهان :

بما أن $x,y \in \mathbb{R} \Leftarrow x-y \in \mathbb{R}$

باستخدام بديهية الترتيب ، نحصل على واحدة فقط من العبارات التالية صادقة

$$x-y \in \mathbb{R}^+ \ , \ x-y=0 \ , -(x-y) \in \mathbb{R}^+$$

بما أن $x-y \in \mathbb{R}^+ \Leftarrow x>y$ وكذلك $x-y=0 \Leftarrow x=y$ وكذلك $-(x-y) \in \mathbb{R}^+ \Leftarrow x<y$

فأن واحدة فقط من العبارات التالية صادقة $x > y \;\; , x = y \;\; , x < y$.

مبرهنة (6.2.1)

(1) إذا كان $x < y$ وكانت $y < z$ فان $x < z$ (2) $x + z < y + z$ إذا وفقط إذا كان $x < y$
(3) إذا كان $x < y$ وكانت $z < w$ فان $x + z < y + w$ (4) إذا كان $z > 0$ فان $xz < yz$ إذا وفقط إذا كان $x < y$
(5) إذا كان $z < 0$ فان $xz < yz$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ (6) إذا كان $0 < x < y$ وكانت $0 < z < w$ فان $xz < yw$

البرهان:

ثالثا : بديهية الكمال The Completeness Axiom

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

(1) إذا كانت المجموعة A مقيدة من الأعلى فان A لها اصغر قيد أعلى(أي أن $\sup A$ موجود)

(2) إذا كانت المجموعة A مقيدة من الأسفل فان A لها اكبر قيد أسفل (أي أن $\inf A$ موجود)

نظام الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ حقل مرتب

مبرهنة (7.2.1)

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وليكن $a, b \in \mathbb{R}$ فان

(1) $\inf A = a$ إذا وفقط إذا كان

(أ) $a \leq x$ لكل $x \in A$ (ب) لكل عدد حقيقي موجب £ ($£ > 0$)، يوجد $y \in A$ بحيث أن $y < a + £$

(2) $\sup A = b$ إذا وفقط إذا كان

(أ) $x \leq b$ لكل $x \in A$ (ب) لكل عدد حقيقي موجب £ ($£ > 0$)، يوجد $y \in A$ بحيث أن $y > b - £$

البرهان:

(1)

الاتجاه الأول: نفرض $\inf A = a$

$\Leftarrow$ a قيد أسفل للمجموعة A $\Leftarrow$ $a \leq x$ لكل $x \in A$ $\Leftarrow$ الشرط (ا) متحقق

ألان نبرهن الشرط (ب) : ليكن $£ > 0$ $\Leftarrow$ $a + £ > a$

بما أن a اكبر قيد أسفل للمجموعة A $\Leftarrow$ $a + £$ ليس قيد أسفل للمجموعة A

$\Leftarrow$ يوجد $z \in A$ بحيث $z < a + £$.

الاتجاه الأخر: نفرض الشرطيين (ا) و(ب) متحققين

الشرط الأول يبين أن a قيد أسفل للمجموعة A

ليكن $c \in \mathbb{R}$ بحيث أن $a < c$. يجب أن نبرهن على أن c ليس قيد أسفل للمجموعة A

نضع $£ = c - a$ $\Leftarrow$ $£ > 0$

$\Leftarrow$ يوجد $y \in A$ (حسب الشرط ب) بحيث $y < a + £$ $\Leftarrow$ $y < a + (c - a) = c$.

وهذا يبين أن c ليس قيد أسفل للمجموعة A وعلية a اكبر قيد أسفل للمجموعة A $\Leftarrow$ $\inf A = a$

(2)

الاتجاه الأول: نفرض $\sup A = b$ $\Leftarrow$ b قيد أعلى للمجموعة A $\Leftarrow$ $x \leq b$ لكل $x \in A$ $\Leftarrow$ الشرط (ا) متحقق

ألان نبرهن الشرط (ب)

ليكن $£ > 0$ $-£ < 0$ $\Leftarrow$ $b - £ < b$

بما أن b اصغر قيد أعلى للمجموعة A $\Leftarrow$ $b - £$ ليس قيد أعلى للمجموعة A $\Leftarrow$ يوجد $y \in A$ بحيث $b - £ < y$.

الاتجاه الأخر: نفرض الشرطيين (ا) و(ب) متحققين

الشرط الأول يبين أن b قيد أعلى للمجموعة A

ليكن $d \in R$ بحيث أن $d < b$. يجب أن نبرهن على أن d ليس أعلى للمجموعة A

نضع $\pounds = b - d \;\Leftarrow\; \pounds > 0$

$\Leftarrow$ يوجد $y \in A$ (حسب الشرط ب) بحيث $y > b - \pounds \;\Leftarrow\; y > b - (b - d) = d$.

وهذا يبين أن d ليس قيد أعلى للمجموعة A وعلية b اصغر قيد أعلى للمجموعة $A \;\Leftarrow\; \sup A = b$

مبرهنة (8.2.1) (خاصية أرخميدس)

إذا كان كل من x, y عددا حقيقيا وكان $x > 0$ فأنة يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $nx > y$

البرهان:

سنبرهن بطريقة التناقض (نفرض الخاصية غير صحيحة)

نفرض يوجد $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث أن $x > 0$ وان $nx \le y$ لكل $n \in \mathbb{Z}$

نضع $A = \{nx : n \in \mathbb{Z}\}$

بما أن $1 \cdot x = x \in A \;\Leftarrow\; A$ مجموعة جزئية غير خالية في $\mathbb{R}$

بما أن $nx \le y$ لكل $n \in \mathbb{Z} \;\Leftarrow\; y$ قيد أعلى للمجموعة $A \;\Leftarrow\; A$ مجموعة مقيدة من الأعلى

بما أن $\mathbb{R}$ تحقق خاصية الكمال $\Leftarrow$ يوجد $b \in \mathbb{R}$ بحيث $b = \sup A$

بما أن $x > 0 \;\Leftarrow\; -x < 0 \;\Leftarrow\; b - x < b$

بما أن b اصغر قيد أعلى للمجموعة $A \;\Leftarrow\; b - x$ ليس قيد أعلى للمجموعة A

$\Leftarrow$ يوجد $m \in \mathbb{Z}$ بحيث $b - x \le mx \;\Leftarrow\; b \le mx + x \;\Leftarrow\; b \le (m+1)x$

بما أن $m + 1 \in \mathbb{Z} \;\Leftarrow\; (m+1)x \in A \;\Leftarrow\; b$ ليس قيد أعلى للمجموعة $A \;\Leftarrow\; A$ وهذا تناقض

نتيجة (9.2.1)

(1) لكل عدد حقيقي موجب x يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن $\frac{1}{n} < x$

(2) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $n > x$

(3) لكل عدد حقيقي x يوجد عددان صحيحان m, n بحيث أن $m < x < n$

(4) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح واحد فقط n بحيث أن $n \le x < n + 1$

(5) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث أن $x - 1 < n \le x$

(6) لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث أن $x - 1 \le n < x$

البرهان:

(1)

نضع $a = x, \; b = 1 \;\Leftarrow$ حسب خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب n بحيث

$$na > b \;\Leftarrow\; nx > 1 \;\Leftarrow\; \frac{1}{n} < x$$

(2)

نضع $a = 1, \; b = x \;\Leftarrow$ حسب خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $na > b \;\Leftarrow\; n > x$

(3)

بما أن x عدد حقيقي ،حسب (2) يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $n > x$

ألان يجب أن نبرهن يوجد عدد صحيح موجب m بحيث $m < x$

نضع $A=\{k\in Z: k>-x\}$ $\Leftarrow$ A مجموعة جزئية غير خالية في $\mathbb{R}$ و مقيدة من الأسفل
بما أن $\mathbb{R}$ يحقق خاصية الكمال $\Leftarrow$ يوجد $y\in\mathbb{R}$ بحيث $\inf A=y$ $\Leftarrow$ $y>-x$ $\Leftarrow$ $-y<x$
نضع $m=-y$ $\Leftarrow$ $m<x$

(4)

نضع $A=\{m\in Z: m\le x\}$ $\Leftarrow$ A مجموعة جزئية غير خالية في $\mathbb{R}$ و مقيدة من الأعلى
بما أن $\mathbb{R}$ يحقق خاصية الكمال $\Leftarrow$ يوجد $n\in\mathbb{R}$ بحيث $\sup A=n$ $\Leftarrow$ $n\le x$
بقي أن نبرهن $x<n+1$. نفرض $n+1\le x$ $\Leftarrow$ $n+1\in A$ وهذا تناقض $\sup A=n$
برهان الوحدانية واضح لان sup وحيد.   برهان 5، 6 يترك للقارئ.

3.1 حقل الأعداد النسبية Filed of Rational Numbers

مبرهنة(1.3.1)

كل حقل مرتب يحتوي على حقل جزئي يشابه حقل الأعداد النسبية

البرهان :

ليكن $(F,+,\cdot)$ حقلا مرتبا وليكن 0 العنصر المحايد الجمعي، 1 العنصر المحايد الضربي في F .
نرمز للعدد $1+1+\cdots+1$ n من المرات بالرمز $n\cdot 1$ حيث n عدد صحيح غير سالب $n\cdot 1=1+1+\cdots+1$
الآن: نريد أن نبرهن : إذا كان $n\cdot 1=0$ فان $n=0$
سنبرهن بطريقة التناقض: نفرض k اصغر عدد صحيح موجب بحيث $k\cdot 1=0$
بما أن $k\cdot 1=1+1+\cdots+1$ k من المرات $\Leftarrow$ $k>1$ $\Leftarrow$ $k-1>0$ $\Leftarrow$ $(k-1)\cdot 1>0$
وعلية $0<(k-1)\cdot 1<k\cdot 1=0$ وهذا غير ممكن. إذن إذا كان $n\cdot 1=0$ فان $n=0$ وبذلك نستنتج أن F يحتوي على عناصر من النوع $n\cdot 1$ لكل عدد صحيح غير سالب n وان $n\cdot 1=0$ إذا وفقط إذا كان $n=0$ وكذلك $m\cdot 1=n\cdot 1$ إذا وفقط إذا كان $m=n$
بما أن $(F,+,\cdot)$ حلقة فان F يحتوي على كل العناصر $-(n\cdot 1)$ حيث $-n\cdot 1$ هو $(-1)+(-1)+\cdots+(-1)$ n من المرات
ولهذا يمكن القول أن F يحتوي على نسخة من مجوعة الأعداد الصحيحة Z
بما أن $(F,+,\cdot)$ حقل $\Leftarrow$ لكل $n\in Z,\ n\neq 0$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n}\in F$ وعلية نستنتج أن F يحتوي على نسخة من حقل الأعداد النسبية.
والآن : نستنتج حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ يحتوي على حقل الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ لان $\mathbb{R}$ حقل مرتب وعلية $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.
والسؤال الذي يطرح هنا : هل أن $\mathbb{Q}=\mathbb{R}$؟ للإجابة على هذا السؤال نحتاج الحقائق الآتية :

مبرهنة(2.3.1)

لايوجد للمعادلة $x^2=2$ جذر في حقل الأعداد النسبية

البرهان :

سنبرهن بطريقة التناقض: نفرض أن $y\in\mathbb{Q}$ بحيث أن $y^2=2$
بما أن $y\in\mathbb{Q}$ $\Leftarrow$ $y=\frac{a}{b}$ حيث a,b أعداد صحيحة، $b\neq 0$ و $g.c.d(a,b)=1$

بما أن $y^2 = 2$ $\Leftarrow$ $\frac{a^2}{b^2} = 2$ $\Leftarrow$

$a^2 = 2b^2 \qquad \cdots (1)$

بما أن $2b^2$ عدد زوجي $\Leftarrow$ a^2 عدد زوجي $\Leftarrow$ a عدد زوجي $\Leftarrow$ $a = 2c$ $\Leftarrow$ $a^2 = 4c^2$

بما أن $a^2 = 2b^2$ $\Leftarrow$ $4c^2 = 2b^2$ $\Leftarrow$ $b^2 = 2c^2$

$\Leftarrow$ b^2 عدد زوجي $\Leftarrow$ b عدد زوجي $\Leftarrow$ $g.c.d(a,b) = 2$ وهذا تناقض $\Leftarrow$ $y \notin \mathbb{Q}$ وعلية لايوجد للمعادلة $x^2 = 2$ جذر في حقل الأعداد النسبية

مبرهنة(3.3.1)

للمعادلة $x^2 = 2$ جذر حقيقي موجب واحد فقط

البرهان :

لتكن $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, \quad x^2 < 2\}$ $\Leftarrow$ $A \neq \emptyset$ لان مثلا $1 \in A$. وكذلك A مقيدة من الأعلى لان مثلا 3 قيد أعلى لها.

بما أن $\mathbb{R}$ تحقق خاصية الكمال وان A مجموعة غير خالية ومقيدة من الأعلى. $\Leftarrow$ يوجد $y \in R$ بحيث $y = \sup A$

الآن : نريد أن نبرهن $y^2 = 2$.

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $y \neq 2$. هنالك احتمالان هما أما $y^2 < 2$ أو $y^2 > 2$

(1) إذا كان $y^2 < 2$ $\Leftarrow$ $y^2 - 2 < 0$ $\Leftarrow$ $2 - y^2 > 0$

لتكن $\varepsilon \in \mathbb{R}$ بحيث أن $0 < \varepsilon < 1$

$(y+\varepsilon)^2 = y^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2 = y^2 + \varepsilon(2y+\varepsilon)$

بما أن $\varepsilon < 1$ $\Leftarrow$ $2y + \varepsilon < 2y + 1$

بما أن $\varepsilon > 0$ $\Leftarrow$ $\varepsilon(2y+\varepsilon) < \varepsilon(2y+1)$ $\Leftarrow$ $y^2 + \varepsilon(2y+\varepsilon) < y^2 + \varepsilon(2y+1)$

وعلية $(y+\varepsilon)^2 < y^2 + \varepsilon(2y+1)$

(ا) إذا كانت $\varepsilon < \frac{2-y^2}{2y+1}$

$(y+\varepsilon)^2 < y^2 + \varepsilon(2y+1) < y^2 + 2 - y^2 = 2$

بما أن $y > 0$ و $\varepsilon > 0$ $\Leftarrow$ $y + \varepsilon > 0$

$\Leftarrow$ $(y+\varepsilon)^2 < 2, \quad y + \varepsilon > 0$ $\Leftarrow$ $y + \varepsilon \in A$

بما أن y قيد أعلى للمجوعة A $\Leftarrow$ $y + \varepsilon \leq y$ $\Leftarrow$ $\varepsilon \leq 0$ وهذا تناقض لان $0 < \varepsilon < 1$

(ب) إذا كانت $\varepsilon \geq \frac{2-y^2}{2y+1}$. نضع $\delta = \frac{2-y^2}{2y+1}$ $\Leftarrow$ $\varepsilon \geq \delta$

بما أن $y > 0$ $\Leftarrow$ $2y + 1 > 0$ وكذلك بما أن $2 - y^2 > 0$ $\Leftarrow$ $\delta > 0$

بما أن $\varepsilon < 1$ $\Leftarrow$ $\delta < 1$ وعلية $0 < \delta < 1$ وكذلك نحصل

$(y+\delta)^2 < y^2 + \delta(2y+1) = y^2 + 2 - y^2 = 2$

$\Leftarrow$ $y + \delta \in A$ $\Leftarrow$ $\delta \leq 0$ (نفس الطريقة في ا) وهذا تناقض

(2)

إذا كان $y^2 > 2$ $\Leftarrow$ $y^2 - 2 > 0$

لتكن $\in \mathbb{R}$ بحيث أن $0 < \quad < 1$

$(y - \quad)^2 = y^2 - 2\ \ y + \quad ^2 = y^2 - \quad (2y - \quad)$

بما أن $0 < \quad < 1 \Leftarrow -\quad < \quad < 1 \Leftarrow 2y - \quad < 2y + 1$

$> 0 \Leftarrow (2y - \quad) < \quad (2y + 1)$

$\Leftarrow - \quad (2y - \quad) > - \quad (2y+1) \Leftarrow y^2 - \quad (2y - \quad) > y^2 - \quad (2y+1)$

$(y - \quad)^2 > y^2 - \quad (2y+1)$

(أ) إذا كانت $\frac{y^2 - 2}{2y+1} \leq$ فان

$(2y+1) \leq y^2 - 2 \Leftarrow - \quad (2y+1) \geq 2 - y^2 \Leftarrow y^2 - \quad (2y+1) \geq 2 \Leftarrow (y - \quad)^2 > 2$

$\Leftarrow y - \quad$ قيد أعلى للمجوعة A

بما أن y اصغر قيد أعلى للمجوعة $A \Leftarrow y \leq y - \quad \Leftarrow \quad \leq 0$ وهذا تناقض.

(ب) إذا كانت $\frac{y^2 - 2}{2y+1} >$. نضع $¥ = \frac{y^2 - 2}{2y+1}$ وبنفس الطريقة نثبت أن $1 > ¥ > 0$ و $0 < 2^{(¥ - y)}$ وهذا يؤدي $y - ¥$ قيد أعلى للمجوعة A . وبذلك يكون $y \leq y - ¥$ وعلية $0 \leq ¥$ وهذا تناقض.

نستنتج من وجود التناقض في كل من (1) و (2) يؤدي إلى $y^2 = 2$ ، أي أن y جذر حقيقي موجب للمعادلة $x^2 = 2$

الآن : نبرهن على أن هذا الجذر الموجب y يكون وحيدا

نفرض أن z عدد حقيقي موجب أخر $(z \neq y)$ بحيث أن $z^2 = 2$

بما أن $z > 0$ و $z \neq y \Leftarrow$ أما $z > y$ أو $z < y$

بما أن $y > 0$ و $z > 0 \Leftarrow$ أما $z^2 > y^2$ أو $z^2 < y^2 \Leftarrow$ أما $z > y$ أو $z < y$ وهذا تناقض

$\Leftarrow z = y$

نتيجة(4.3.1)

حقل الأعداد النسبية حقل جزئي فعلي من حقل الأعداد الحقيقية

البرهان :

بما أن المعادلة $x^2 = 2$ تمتلك جذر حقيقي والذي يرمز له بالرمز $\sqrt{2} \Leftarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

وبما أن المعادلة $x^2 = 2$ لا تمتلك جذر في $\mathbb{Q} \Leftarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

ملاحظة

باستخدام نفس الأسلوب المستخدم في برهان المبرهنة السابقة ، يمكن أن نبرهن المبرهنة الآتية :

مبرهنة(5.3.1)

لكل عدد حقيقي موجب a ولكل عدد صحيح موجب n ، يوجد عدد حقيقي موجب واحد فقط يحقق المعادلة $x^n = a$. ويرمز لهذا العدد الوحيد بالرمز $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{\frac{1}{n}}$ ونطلق علية بالجذر النوني للعدد a .

مبرهنة(6.3.1)

حقل الأعداد النسبية غير كامل

البرهان :

لأجل برهان هذه المبرهنة يكفي أن نبرهن وجود مجموعة جزئية غير خالية من Q مقيدة من الأعلى وليس لها اصغر قيد أعلى.

لتكن $A=\{x\in\mathbb{Q}: x^2<2\} \Leftarrow A\neq\emptyset$ لان مثلا $1\in A$ وكذلك A مقيدة من الأعلى لان مثلا 3 قيد أعلى إلى A .

ألان : سنبرهن على أن $\sup A$ غير موجود . نبرهن بطريقة التناقض: نفرض يوجد $y\in\mathbb{Q}$ بحيث أن $\sup A=y$

$\Leftarrow y^2=2$ أو $y^2<2$ أو $y^2>2$

(1)

$y^2\neq 2$ لأنه لايوجد عدد نسبي مربعه يساوي 2

(2)

إذا كان $y^2<2$ ، نضع $z=\dfrac{4+3y}{3+2y} \Leftarrow z\in\mathbb{Q}$

$$z^2-2=\left(\frac{4+3y}{3+2y}\right)^2-2=\frac{y^2-2}{(3+2y)^2}<0 \qquad (\text{لان } y^2<2)$$

$$\Leftarrow z^2<2 \Leftarrow z\in A \Leftarrow z-y=\frac{4+3y}{3+2y}-y=\frac{2(2-y^2)}{3+2y}>0 \Leftarrow z>y$$

وهذا تناقض لان y قيد أعلى إلى A

(3)

إذا كان $y^2>2 \Leftarrow z^2>2 \Leftarrow z$ قيد أعلى إلى A

وهذا تناقض لان y اصغر قيد أعلى إلى A وعلية لايوجد عدد نسبي بحيث يكون اصغر قيد أعلى إلى A

مبرهنة (7.3.1) (كثافة الأعداد النسبية)

ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث أن $a<b$ ، يوجد عدد نسبي r بحيث إن $a<r<b$ وعلية فانه يوجد عدد غير منتهي من الأعداد النسبية بين أي عددين حقيقيين

البرهان :

(1)

إذا كان $0<a<b$

(ا) عندما $b-a>1$ ، نضع $A=\{n\in\mathbb{N}: n>a\}$

بما أن $a\in\mathbb{R} \Leftarrow$ حسب خاصية ارخميدس، يوجد $m\in\mathbb{N}$ بحيث $m>a \Leftarrow m\in A \Leftarrow A\neq\emptyset$

بما أن $\mathbb{N}$ مجموعة مرتبة ترتيب حسن وان A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$

$\Leftarrow A$ تحتوي على اصغر عنصر وليكن k

بما أن $k\in A \Leftarrow k>a$

بما أن k اصغر عنصر في $A \Leftarrow k-1\notin A \Leftarrow k-1\leq a \Leftarrow k\leq a+1$

بما أن $b-a>1 \Leftarrow b>a+1 \Leftarrow k<b$ وعلية $a<k<b$

وكذلك يكون k هو العدد النسبي المطلوب

(ب) عندما $b-a\leq 1$

بما أن $a<b \Leftarrow b-a>0$

بالاستخدام خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $n(b-a)>1$

$\Leftarrow nb-na>1$ وحسب الحالة (ا) يوجد k بحيث $na<k<nb$

$\Leftarrow \quad a<\dfrac{k}{n}<b$ ويكون $\dfrac{k}{n}$ هو العدد النسبي المطلوب

(2)

إذا كان $a<0<b$ فان 0 هو العدد النسبي المطلوب

(3)

إذا كان $a<b<0 \quad \Leftarrow \quad 0<-b<-a$ حسب الحالة (1) يوجد $r\in\mathbb{Q}$ بحيث ان

$-b<r<-a \quad \Leftarrow \quad a<-r<b$ فيكون $-r$ هو العدد النسبي المطلوب

4.1 الأعداد غير النسبية Irrational Numbers

لتكن $\mathbb{Q}^c$ تمثل المجموعة المتممة (المكملة) لمجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q}^c=\mathbb{R}\,|\,\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R}:x\notin\mathbb{Q}\}$$

يطلق على المجموعة $\mathbb{Q}^c$ مجموعة الأعداد غير النسبية .

بما أن $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}^c \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q}^c\neq$ ¤

مبرهنة(1.4.1)

إذا كان $x\in\mathbb{Q}$ وكان $y\in\mathbb{Q}^c$ فان

(1) $x+y\in\mathbb{Q}^c$ (2) $xy\in\mathbb{Q}^c$ بشرط $x\neq 0$

البرهان :

(1)

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $x+y\notin\mathbb{Q}^c$

بما أن $x+y\in\mathbb{R} \quad \Leftarrow \quad x+y\in\mathbb{Q}$

بما أن $x\in\mathbb{Q}$ وان $\mathbb{Q}$ حقل $\Leftarrow -x\in\mathbb{Q}$ وكذلك $(x+y)+(-x)\in\mathbb{Q} \quad \Leftarrow \quad y\in\mathbb{Q}$ وهذا تناقض.

(2)

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $xy\notin\mathbb{Q}^c \quad \Leftarrow \quad xy\in\mathbb{Q}$

بما أن $\mathbb{Q}$ حقل وان $x\in\mathbb{Q}$ ، $x\neq 0 \Leftarrow \dfrac{1}{x}=x^{-1}\in\mathbb{Q}$ وكذلك $\dfrac{1}{x}(xy)\in\mathbb{Q} \quad \Leftarrow \quad y\in\mathbb{Q}$ وهذا تناقض.

مبرهنة(2.4.1) (كثافة الأعداد غير النسبية)

ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث أن $a<b$ يوجد عدد غير نسبي s بحيث $a<s<b$ وعلية فأنة يوجد عدد غير منتهي من الأعداد غير النسبية بين أي عددين حقيقيين

البرهان :

بما أن $a<b \quad \Leftarrow \quad a-\sqrt{2}<b-\sqrt{2}$

بما أن كل من $a-\sqrt{2}$ و $b-\sqrt{2}$ عدد حقيقي

باستخدام كثافة الأعداد النسبية يوجد $r\in\mathbb{R}$ بحيث أن $a-\sqrt{2}<r<b-\sqrt{2} \quad \Leftarrow \quad a<r+\sqrt{2}<b$

بما أن r عدد نسبي و $\sqrt{2}$ عدد غير نسبي $s=r+\sqrt{2}$ عدد غبر نسبي وعلية $a<s<b$

ألان :

بما أن $a<s \quad \Leftarrow$ يوجد عدد غير نسبي s_1 بحيث أن $a<s_1<s$

وباستمرار هذه العملية نحصل على عدد غير منتهي من الأعداد غير النسبية تقع بين a و b .

تعريف(3.4.1)

ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث أن $a<b$

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\},\quad [a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\le b\},\quad (a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\le b\},\quad [a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\}$

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}:-\infty<x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}:-\infty<x\le b\}$

$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<\infty\},\quad [a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<\infty\}$

حسب كثافة الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية نستطيع أن نقول : كل فترة من الأعداد الحقيقية تحتوي على عدد غير منته من الأعداد النسبية وعلى عدد غير منه من الأعداد غير النسبية .أي انه لاتوجد فترات تتكون من أعداد نسبية فقط أو أعداد غير نسبية فقط

مثال(4.4.1)

اوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية

(1) $6x-5>4x+1$ (2) $-4\le -4x+2\le 6$ (3) $x^2+2x-3>0$ (4) $x^2<3x-2$ (5) $x^2+x+1>0$

(6) $x^2+x+1<0$ (7) $\frac{3}{x}<5,\ x\ne 0$ (8) $\frac{3}{x}<5$ ، $x\ne 0$ و $x+2<7-3x$ (9) $\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}$ ، $x\ne -2$

الحل:

(1) $6x-5>4x+1$

$6x-5>4x+1 \Rightarrow 6x-4x>1+5 \Rightarrow 2x>6 \Rightarrow x>3$ وعليه مجموعة الحل هي $\{x\in\mathbb{R}:x>3\}$

(2) $-4\le -4x+2\le 6$

$-4\le -4x+2\le 6 \Rightarrow -4-2\le -4x\le 6-2 \Rightarrow -6\le -4x\le 4 \Rightarrow \frac{3}{2}\ge x\ge -1 \Rightarrow -1\le x\le \frac{3}{2}$

وعليه مجموعة الحل هي $\{x\in\mathbb{R}:-1\le x\le 1.5\}=[-1,1.5]$

(3) $x^2+2x-3>0$

$x^2+2x-3>0 \Rightarrow (x+3)(x-1)>0 \Rightarrow$ ($x+3>0$ و $x-1>0$) أو ($x+3<0$ و $x-1<0$)

$\Rightarrow$ ($x>-3$ و $x>1$) أو ($x<-3$ و $x<1$) وعليه مجموعة الحل هي

$(\{x\in\mathbb{R}:x>-3\}\cap\{x\in\mathbb{R}:x>1\})\cup(\{x\in\mathbb{R}:x<-3\}\cap\{x\in\mathbb{R}:x<1\})$

$=\{x\in\mathbb{R}:x>1\}\cup\{x\in\mathbb{R}:x<-3\}=(1,\infty)\cup(-\infty,3)=\mathbb{R}|[-3,1]$

(4) $x^2<3x-2$

$x^2<3x-2 \Rightarrow x^2-3x+2<0 \Rightarrow (x-2)(x-1)<0 \Rightarrow$ ($x-2<0$ و $x-1>0$) أو ($x-2>0$ و $x-1<0$)

$\Rightarrow$ ($x<2$ و $x>1$) أو ($x>2$ و $x<1$) وعليه مجموعة الحل هي

$(\{x\in\mathbb{R}:x<2\}\cap\{x\in\mathbb{R}:x>1\})\cup(\{x\in\mathbb{R}:x>2\}\cap\{x\in\mathbb{R}:x<1\})=(1,2)\cup ¤=(1,2)$

(5) $x^2+x+1>0$

$x^2+x+1>0 \Rightarrow x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1>0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0 \Rightarrow$ مجموعة الحل هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

(6) $x^2+x+1<0$

$x^2+x+1<0 \Rightarrow x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1<0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}<0 \Rightarrow$ مجموعة الحل هي المجموعة الخالية ¤.

(7) $\frac{3}{x}<5,\ x\neq 0$

إذا كان $x>0$ فان $\frac{3}{x}<5 \Leftarrow 3<5x \Leftarrow x>\frac{3}{5}$ ،

أما إذا كان $x<0$ فان $\frac{3}{x}<5 \Leftarrow 3>5x \Leftarrow x<\frac{3}{5}$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل هي

$$(\{x\in\mathbb{R}:x>0\}\cap\{x\in\mathbb{R}:x>\frac{3}{5}\})\cup(\{x\in\mathbb{R}:x<0\}\cap\{x\in\mathbb{R}:x<\frac{3}{5}\})$$

$$=\{x\in\mathbb{R}:x>\frac{3}{5}\}\cup\{x\in\mathbb{R}:x<0\}=(\frac{3}{5},\infty)\cup(-\infty,0)=\mathbb{R}\,|\,[0,\frac{3}{5}]$$

(8) $\frac{3}{x}<5$ ، $x\neq 0$ و $x+2<7-3x$

من المتباينة $\frac{3}{x}<5$ ، $x\neq 0$ نحصل على مجموعة الحل هي $\mathbb{R}\,|\,[0,\frac{3}{5}]$ ومن المتباينة $x+2<7-3x$ نحصل على مجموعة الحل هي $(-\infty,\frac{5}{4})$ وعليه مجموعة الحل هي $\mathbb{R}\,|\,[0,\frac{3}{5}]\cap(-\infty,\frac{5}{4})=(-\infty,0)\cup(\frac{3}{5},\frac{5}{4})$

(9) $\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}$ ، $x\neq -2$

إذا كان $x+2>0$ فان $\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3} \Leftarrow 3(2x-3)<x+2 \Leftarrow 6x-9<x+2 \Leftarrow 5x<11 \Leftarrow x<\frac{11}{5}$ ،

أما إذا كان $x+2<0$

فان $\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3} \Leftarrow 3(2x-3)>x+2 \Leftarrow 6x-9>x+2 \Leftarrow 5x>11 \Leftarrow x>\frac{11}{5}$

$\Leftarrow$ مجموعة الحل هي

$$(\{x\in\mathbb{R}:x>-2\}\cap\{x\in\mathbb{R}:x<\frac{11}{5}\})\cup(\{x\in\mathbb{R}:x<-2\}\cap\{x\in\mathbb{R}:x>\frac{11}{5}\})$$

$$=\{x\in\mathbb{R}:-2<x<\frac{11}{5}\}\cup\varnothing=(-2,\frac{11}{5})$$

5.1 القيمة المطلقة Absolute Value

تعريف(1.5.1)

ليكن x عددا حقيقيا. القيمة المطلقة **(Absolute Value)** إلى x، يرمز لها بالرمز $|x|$ وتعرف بالصيغة التالية

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x\leq 0\end{cases}$$

مثلا : من الواضح (من التعريف مباشرة) أن : $|0|=0,\quad |2|=2,\quad |-2|=-(-2)=2,$

(1) $|x|\geq 0$ لكل $x\in\mathbb{R}$ (2) $|x|^2=x^2$ لكل $x\in\mathbb{R}$ (3) $|x|=0$ إذا وفقط إذا كان $x=0$

(4) $|x|=\max\{-x,x\}$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وعلية $|x|\geq -x$, $|x|\geq x$ (5) $|-x|=|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$

المبرهنة التالية تبين الخواص العامة للقيمة المطلقة وسنترك برهانها للقارئ لأنة ينتج مباشرة من التعريف.

مبرهنة(2.5.1) (خواص القيمة المطلقة)

(1) $|x|=\max\{-x,x\}$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وعلية $|x|\geq -x$, $|x|\geq x$ (2) $|x|\geq 0$ لكل $x\in\mathbb{R}$

(3) $|x|=0$ إذا وفقط إذا كان $x=0$ (4) $|-x|=|x|$ لكل $x\in R$ (5) $|x-y|=|y-x|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$

(6) $|xy|=|x||y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$ (7) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$ (8) $|x+y|\leq|x|+|y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$

(9) $|x-y|\leq|x|+|y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$ (10) $\big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$

مبرهنة(3.5.1)

ليكن $x,a\in\mathbb{R}$ ، $a>0$

(1) $|x|<a$ إذا وفقط إذا كان $-a<x<a$ (2) $|x|>a$ إذا وفقط إذا كان $x>a$ أو $x<-a$

(3) $|x|\leq a$ إذا وفقط إذا كان $-a\leq x\leq a$ (4) $|x|\geq a$ إذا وفقط إذا كان $x\geq a$ أو $x\leq -a$

البرهان :

مثال(4.5.1)

اوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية

(1) $|x-3|=13$ (2) $|2x-6|=|4-5x|$

الحل:

(1) $|x-3|=13$

أما $|x-3|=x-3$ أو $|x-3|=-(x-3)$ $\Leftarrow$ $x-3=13$ أو $-(x-3)=13$

$\Leftarrow$ $x=16$ أو $x=-10$ وعليه مجموعة الحل هي : $\{-10,16\}$

(2) $|2x-6|=|4-5x|$

أما $2x-6=4-5x$ أو $2x-6=-(4-5x)$ $\Leftarrow$ $7x=10$ أو $3x=-2$

$\Leftarrow$ $x=\dfrac{10}{7}$ أو $x=-\dfrac{2}{3}$ وعليه مجموعة الحل هي : $\{-\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{7}\}$

مثال(5.5.1)

اوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية

(1) $|3x-2|<4$ (2) $|2-5x|<3$ (3) $|3x-4|\leq 7$ (4) $|x+2|>5$ (5) $|x-3|\leq 3$, $|x-4|\geq 2,$

(6) $\left|\dfrac{2x-5}{x-6}\right|<3$ (7) $\left|\dfrac{1}{x}-7\right|<2$

الحل:

ر 331
Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

نظري : 3   مناقشة : 1   عدد الوحدات : 3

---

(1) $|3x-2|<4$

$-2<3x<6 \Leftarrow -4<3x-2<4 \Leftarrow |3x-2|<4$

$\Leftarrow -\frac{2}{3}<x<2$ وعليه مجموعة الحل هي : $(-\frac{2}{3},2)$

(2) $|2-5x|<3$

$-5<-5x<1 \Leftarrow -3<2-5x<3 \Leftarrow |2-5x|<3$

$\Leftarrow -\frac{1}{5}<x<1$ وعليه مجموعة الحل هي : $(-\frac{1}{5},1)$

(3) $|3x-4|\le 7$

$1\le x\le \frac{11}{3} \Leftarrow -3\le 3x\le 11 \Leftarrow -7\le 3x-4\le 7 \Leftarrow |3x-4|\le 7$

وعليه مجموعة الحل هي : $[-1,\frac{11}{3}]$

(4) $|x+2|>5$

$x+2>5$ أو $x+2<-5 \Leftarrow |x+2|>5$

$\Leftarrow x>3$ أو $x<-7$ وعليه مجموعة الحل هي : $(-\infty,-7)\cup(3,\infty)$

(5) $|x-4|\ge 2,\quad |x-3|\le 3$

الحالة الأولى : إذا كانت $|x-3|\le 3 \Leftarrow -3\le x-3\le 3 \Leftarrow 0\le x\le 6$

مجموعة الحل للحالة الأولى هي : $\{x\in\mathbb{R}: 0\le x\le 6\}=[0,6]$

الحالة الثانية : إذا كانت $|x-4|\ge 2 \Leftarrow x-4\ge 2$ أو $x-4\le -2 \Leftarrow x\ge 6$ أو $x\le 2$

مجموعة الحل للحالة الثانية هي : $(-\infty,2]\cup[6,\infty)$

مجموعة الحل للحالتين هي $[0,6]\cap((-\infty,2)\cup[6,\infty))=[0,2]\cup\{6\}$

(6) $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$

$-3<\frac{2x-5}{x-6}<3 \Leftarrow \left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$

الحالة الأولى : إذا كانت $x-6>0 \Leftarrow -3(x-6)<2x-5<3(x-6)$

$-3x+23<2x<3x-13 \Leftarrow -3x+18<2x-5<3x-18 \Leftarrow$

مجموعة الحل للحالة الأولى هي : $(6,\infty)\cap(\frac{23}{5},\infty)\cap(13,\infty)=(13,\infty)$

الحالة الثانية : إذا كانت $x-6<0 \Leftarrow x<13,\quad x<\frac{23}{5}$

مجموعة الحل للحالة الثانية هي : $(-\infty,6)\cap(-\infty,\frac{23}{5})\cap(-\infty,13)=(-\infty,\frac{23}{5})$

مجموعة الحل للحالتين هي $(13,\infty)\cup(-\infty,\frac{23}{5})=\mathbb{R}\,|\,[\frac{23}{5},13]$

(7) $\left|\frac{1}{x}-7\right|<2$

$$\left|\frac{1}{x}-7\right|<2 \;\Rightarrow\; -2<\frac{1}{x}-7<2 \;\Rightarrow\; 5<\frac{1}{x}<9$$

الحالة الأولى : إذا كانت $x>0 \;\Rightarrow\; 5x<1<9x$

$$5x<1,\; 1<9x \;\Rightarrow\; x<\frac{1}{5},\quad x>\frac{1}{9}$$

مجموعة الحل للحالة الأولى هي : $(\frac{1}{9},\frac{1}{5}) = (-\infty,\frac{1}{5})\cap(\frac{1}{9},\infty)\cap(0,\infty)$

الحالة الثانية : إذا كانت $x<0 \;\Rightarrow\; x>\frac{1}{5},\quad x<\frac{1}{9}$

مجموعة الحل للحالة الثانية هي : $\emptyset = (\frac{1}{5},\infty)\cap(-\infty,\frac{1}{9})\cap(-\infty,0)$

مجموعة الحل للحالتين هي $(\frac{1}{9},\frac{1}{5}) = \emptyset\cup(\frac{1}{9},\frac{1}{5})$

6.1 المجموعات المنتهية وغير المنتهية Finite and Infinite Sets

تعريف (1.6.1)

لتكن كل من A,B مجموعة . يقال عن المجموعة A بأنها تكافئ (Equivalent) المجموعة B ويكتب $(A\sim B)$ إذا وجد دالة تقابلية من المجموعة A على المجموعة B ويكتب $(A\nsim B)$ إذا كانت A لا تكافئ B .

مبرهنة(2.6.1)

العلاقة $\sim$ بين المجموعات هي علاقة تكافؤ.

البرهان :

(1) $\sim$ انعكاسية

$A\sim A$ لان الدالة $f:A\to A$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(2) $\sim$ متناظرة

نفرض $A\sim B$ ونبرهن $B\sim A$

بما أن $A\sim B \Rightarrow$ توجد دالة $f:A\to B$ تقابلية $\Rightarrow$ $f^{-1}:B\to A$ دالة تقابلية ، وعليه $B\sim A$.

(3) $\sim$ متعدية

نفرض $A\sim B$ وكذلك $B\sim C$ ونبرهن $A\sim C$

بما أن $A\sim B \Rightarrow$ توجد دالة $f:A\to B$ تقابلية وكذلك بما أن $B\sim C \Rightarrow$ توجد دالة $g:B\to C$ تقابلية

$\Rightarrow$ $g\circ f:A\to C$ دالة تقابلية ، وعليه $A\sim C$.

مثال (3.6.1)

(1) إذا كانت $A=\{1,2,3,4\}, B=\{6,7,8,9\}$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x+5$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(2) إذا كانت $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b\}$ فان $A\nsim B$ لان كل دالة $f:A\to B$ لا يمكن أن تكون تقابلية.

(3)) إذا كانت A,B مجموعتين فان $A\times B\sim B\times A$ لان الدالة $f:A\times B\to B\times A$ المعرفة بالصيغة

$f((x,y))=(y,x)$ لكل $(x,y)\in A\times B$ تقابلية.

(4) إذا كانت $A=[1,4],B=[3,9]$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة $f(x)=2x+1$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(5) إذا كانت $A=\mathbb{N},B=\{2,4,6,\cdots\}$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة $f(x)=2x$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(6) إذا كانت $A=\mathbb{N},B=\{1,3,5,\cdots\}$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة $f(x)=2x-1$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(7) إذا كانت $A=\mathbb{N},B=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x-1$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(8) إذا كانت A مجموعة ، فان $A\sim A\times\{1\}$ لان الدالة $f:A\to A\times\{1\}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=(x,1)$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(9) إذا كانت $A=(0,1),B=\mathbb{R}^+$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(10) إذا كانت $A=(-1,1),B=(a,b)$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة

$$f(x)=\frac{1}{2}(b-a)x+\frac{1}{2}(b+a)$$

لكل $x\in A$ تقابلية.

(11) إذا كانت $A=[0,1],B=[0,1)$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x=2^{-n},\quad n\in\mathbb{N}\\ x, & x\neq 2^{-n}\end{cases}$$

لكل $x\in A$ تقابلية.

(12) إذا كانت $A=(-1,1),B=\mathbb{R}$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\tan\frac{\text{®}}{2}x$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(13)إذا كانت $A=(-\frac{\text{®}}{2},\frac{\text{®}}{2}),B=\mathbb{R}$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f:A\to B$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\tan x$ لكل $x\in A$ تقابلية.

(14) إذا كانت $A=[0,1],B_1=(a,b),B_2=(a,b],B_3=[a,b),B_4=[a,b]$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f_i:A\to B_i$ المعرفة بالصيغة $f_i(x)=a+(b-a)x$ لكل $x\in A$ ولكل $i=1,2,3,4$ تقابلية.

(15) إذا كانت $A=[a,b],B=[c,d]$ فان $A\sim B$ لان الدالة $f_i:A\to B_i$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\dfrac{(b-x)a+(x-c)b}{d-c}$ لكل $x\in A$ تقابلية.

مبرهنة (4.6.1) مبرهنة كانتور

لكل مجموعة X ، فان المجموعة $P(X)$ لا تكافئ المجموعة X، أي أن $X\not\sim P(X)$

البرهان :

إذا كانت $X=\emptyset$ ، فالنتيجة واضحة ، أما إذا كانت $X\neq\emptyset$ ، سنبرهن بطريقة التناقض
نفرض $X\sim P(X)$ $\Leftarrow$ توجد دالة تقابلية $f:X\to P(X)$
لكل $x\in X$ فان $f(x)\in P(X)$ ، ولكن عناصر $P(X)$ مجموعات جزئية من X . $f(x)\subseteq X$
نضع $A=\{x\in X : x\notin f(x)\}\subseteq X$ $\Leftarrow$ $A\in P(X)$
بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow$ يوجد $y\in X$ بحيث أن $f(y)=A$
هنالك احتمالان هما
(1) إذا كان $y\in A$ ، فان $y\notin f(y)$ ولكن $f(y)=A$ $\Leftarrow$ $y\notin A$ وهذا تناقض
(2) إذا كان $y\notin A$ $\Leftarrow$ $y\in f(y)$ ولكن $f(y)=A$ $\Leftarrow$ $y\in A$ وهذا تناقض
وفي الحالتين نحصل على تناقض .

مبرهنة (5.6.1)

إذا كانت $2^X=\{f:X\to 2=\{0,1\}\}$ فان $P(X)\sim 2^X$

البرهان :

نعرف الدالة $\psi : P(X)\to 2^X$ بالصيغة $\psi(A)=\chi_A$ لكل $A\in P(X)$ ، حيث $\chi_A : A\to X$ الدالة المميزة للمجموعة A في X ، أي أن $\chi_A(x)=\begin{cases}0, & x\notin A\\ 1, & x\in A\end{cases}$

يجب أن نبرهن

(1) ψ دالة متباينة : نفرض $A,B\in P(X)$ بحيث أن $\psi(A)=\psi(B)$ $\Leftarrow$ $\chi_A=\chi_B$ وعليه فان
$\{x\in X : \chi_A(x)=0\}=\{x\in X : \chi_B(x)=0\}$ ومنه ينتج أن $A=B$ ،وعليه فان الدالة ψ متباينة

(2) ψ دالة شاملة : نفرض $f\in 2^X$
نضع $A=f^{-1}(\{0\})$ $\Leftarrow$ $A=\{x\in X : f(x)=0\}\subseteq X$ $\Leftarrow$ $A\in P(X)$ $\Leftarrow$ $\psi(A)=\chi_A=f$ وعليه فان الدالة ψ شاملة . $\Leftarrow$ ψ تقابلية وعليه فان $P(X)\sim 2^X$.

مبرهنة (6.6.1)

إذا كانت $X\sim Y,\ Z\sim W$ فان $X^Z\sim Y^W$

البرهان :

بما ان $X\sim Y$ $\Leftarrow$ توجد دالة تقابلية $f:X\to Y$ ، وكذلك بما ان $Z\sim W$ $\Leftarrow$ توجد دالة تقابلية $g:W\to Z$
بما ان $X^Z=\{\varphi : Z\to X\},\ Y^W=\{\psi : W\to Y\}$
نعرف الدالة $h:X^Z\to Y^W$ بالصيغة $h(\varphi)=f\circ\varphi\circ g$ لكل $\varphi\in X^Z$. يجب ان نبرهن h تقابلية
(1) ليكن $\varphi,\theta\in X^Z$ بحيث ان $h(\varphi)=h(\theta)$ $\Leftarrow$ $f\circ\varphi\circ g=f\circ\theta\circ g$
بما ان كل من f,g دالة تقابلية ، فان كل من f^{-1},g^{-1} دالة تقابلية
$\Leftarrow$ $f^{-1}\circ(f\circ\varphi\circ g)\circ g^{-1}=f^{-1}\circ(f\circ\theta\circ g)\circ g^{-1}$ $\Leftarrow$ $\varphi=\theta$ وعليه الدالة h متباينة
(2) ليكن $\psi\in Y^W$. نضع $\varphi=f^{-1}\circ\psi\circ g^{-1}$ $\Leftarrow$ $\varphi\in X^Z$ $\Leftarrow$ $h(\varphi)=h(f^{-1}\circ\psi\circ g^{-1})=\psi$
$\Leftarrow$ h دالة شاملة ، وعليه الدالة h تقابلية .

نتيجة (6.6.1)

إذا كانت $X\sim Y$ فان $P(X)\sim P(Y)$

البرهان :

بما أن $X \sim Y$ فان $2^X \sim 2^Y$ ولكن $2^X \sim P(X),\ \ 2^Y \sim P(Y)$ وعليه فان $P(X) \sim P(Y)$

تعريف (8.6.1)

لتكن A مجموعة ما . يقال عن A بأنها مجموعة منتهية (Finite Set) إذا كانت A مجموعة غير خالية أو تكافئ المجموعة N_k لبعض عدد طبيعي k .ويقال أن A مجموعة غير منتهية (Infinite Set) إذا لم تكن A مجموعة منتهية (أي أن المجموعات غير المنتهية هي مجموعات غير خالية ولا تكافئ N_K لكل عدد طبيعي k)

إذا كانت A مجموعة منتهية فان $A \sim N_k$ لبعض عدد طبيعي k وعلية توجد دالة متقابلة $f : N_k \to A$. ضع $f(i) = a_i$ لكل $i \in N_k \Leftarrow a_i \in A$ لكل $i = 1, 2, 3, \cdots, k$ وعلية فان $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$

مبرهنة (9.6.1)

لتكن كل من A, B مجموعة غير خالية بحيث أن $A \sim B$

(1) A منتهية إذا وفقط إذا كانت B منتهية

(2) A غير منتهية إذا وفقط إذا كانت B غير منتهية

البرهان:

(1) نفرض المجموعة A منتهية

بما أن $A \neq \emptyset \Leftarrow$ يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث أن $A \sim N_k$ ولكن $A \sim B \Leftarrow B \sim N_k$ وعليه B مجموعة منتهية

(2) نفرض المجموعة A غير منتهية

لو كانت B منتهية لكانت A منتهية (حسب 1) وهذا تناقض وعليه فان B غير منتهية

ملاحظات

(1) كل مجموعة جزئية من مجموعة منتهية تكون منتهية

(2) إذا كانت A مجموعة غير منتهية وكانت $A \subset B$ فان B مجموعة غبر منتهية

(3) إذا كانت A مجموعة غير منتهية وكانت B مجموعة ما فان $A \cup B$ تكون غير منتهية

تعريف (10.6.1)

لتكن A مجموعة ما . يقال عن A بأنها مجموعة قابلـة للـعد (أو يقال معدودة) (Countable Set) إذا كانت A منتهية أو تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.يقال عن A بأنها غير منتهية وقابلة للعد إذا كانت A مجموعة غير منتهية وتكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.ويقال عن A بأنها غير قابلة للعد (Uncountable) إذا كانت A مجموعة غير منتهية ولا تكافئ $\mathbb{N}$.

ملاحظـة

إذا كانت A مجموعة غير منتهية قابلة للعد فان $A \sim \mathbb{N}$ وعلية توجد دالة متقابلة $f : \mathbb{N} \to A$ ضع $f(n) = a_n$ لكل $n \in \mathbb{N} \Leftarrow a_n \in A$ لكل $n \in \mathbb{N}$ وعلية $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$

مثال (11.6.1)

(1) كل مجموعة منتهية تكون قابلة للعد

(2) كل من $\mathbb{N}, \mathbb{N} \cup \{0\}$ تكون قابلة للعد لان $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ وكذلك $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \cup \{0\}$

(2) مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية $E = \{2, 4, 6, \cdots\}$ مجموعة قابلة للعد لان الدالة $f : \mathbb{N} \to E$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 2x$ لكل $x \in \mathbb{N}$ تقابلية.

(3) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية $O = \{1, 3, 5, \cdots\}$ مجموعة قابلة للعد لان الدالة $f : \mathbb{N} \to O$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 2x - 1$ لكل $x \in \mathbb{N}$ تقابلية.

(4) مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ مجموعة قابلة للعد لان الدالة $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\frac{x+1}{2}$ عندما x عدد فردي ، $f(x)=-\frac{x}{2}$ عندما x عدد زوجي . تكون تقابلية.

(5) المجموعة $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$ تكون مجموعة قابلة للعد لان الدالة $f:\mathbb{N}\to A$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{x}$ لكل $x\in\mathbb{N}$ تقابلية.

(6) المجموعة $A=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\}$ تكون مجموعة قابلة للعد لان الدالة $f:\mathbb{N}\to A$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\frac{x}{x+1}$ لكل $x\in\mathbb{N}$ تقابلية.

(7) المجموعة $A=\{x^2: x\in\mathbb{N}\}$ تكون مجموعة قابلة للعد لان الدالة $f:\mathbb{N}\to A$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ لكل $x\in\mathbb{N}$ تقابلية .

(8) المجموعة $A=(0,1)$ تكون مجموعة غير قابلة للعد لأنه إذا كانت المجموعة A قابلة للعد ،فان $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ حيث a_n أعداد حقيقية ، يمكن التعبير على شكل كسور عشرية دورية منتهية أو غير منتهية . إذن $a_1=0.b_{11}b_{12}b_{13}\cdots, a_2=0.b_{21}b_{22}b_{23}\cdots,\cdots,a_n=0.b_{n1}b_{n2}b_{n3}\cdots$ حيث $b_{ij}\in\{0,1,2,\cdots,9\}$ ، أي أن : إذا كان $a_k\in A$ ، فان $a_k=0.b_{k1}b_{k2}b_{k3}\cdots$ حيث $b_{ij}\in\{0,1,2,\cdots,9\}$.

الآن ليكن $x=0.x_1x_2x_3\cdots$ حيث $0\neq x_1\neq b_{11},\ 0\neq x_2\neq b_{22},\cdots,0\neq x_n\neq b_{nn}$ ، كما أن $x\neq a_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$. وهذا تناقض

(9) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مجموعة غير قابلة للعد لان الدالة $f:\mathbb{R}\to(0,1)$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$ لكل $x\in\mathbb{R}$ تقابلية.

(10) كل فترة في $\mathbb{R}$ تكون مجموعة غير قابلة للعد .

مبرهنة (12.6.1)

كل مجموعة غير منتهية قابلة للعد تكون مكافئة لمجموعة جزئية فعلية منها

البرهان :

لتكن A مجموعة غير منتهية قابلة للعد $\Leftarrow$ $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$.

نضع $B=A|\{a_1\}$ $\Leftarrow$ B مجموعة جزئية فعلية من A . نعرف الدالة $f:A\to B$ بالصيغة $f(a_i)=a_{i+1}$

$\Leftarrow$ f دالة تقابلية وعليه $A\sim B$.

مبرهنة (13.6.1)

كل مجموعة غير منتهية تحتوي على مجموعة جزئية غير منتهية قابلة للعد

البرهان :

لتكن A مجموعة غير منتهية قابلة للعد $\Leftarrow$ $A\neq\emptyset$ $\Leftarrow$ يوجد على الأقل $x_1\in A$

نضع $A_1=A|\{x_1\}$ $\Leftarrow$ $A_1\neq\emptyset$ (لو كانت $A_1=\emptyset$ $\Leftarrow$ $A=\{x_1\}$ $\Leftarrow$ Aمنتهية وهذا تناقض)

بما أن $A_1\neq\emptyset$ $\Leftarrow$ يوجد على الأقل $x_2\in A_1$

نضع $A_2 = A|\{x_1,x_2\}$ $\Leftarrow$ $A_2 \neq \emptyset$ $\Leftarrow$ يوجد على الأقل $x_3 \in A_2$ وبهذه الطريقة نحصل على المجموعة $B=\{x_1,x_2,\cdots\}$ ، من الواضح أن B غير منتهية وقابلة للعد .

تمارين(6.1)

1.6.1 كل مجموعة تكون غير منتهية إذا وفقط إذا كانت تكافئ مجموعة جزئية فعلية منها .برهن ذلك
2.6.1 كل مجموعة منتهية لا يمكن أن تكافئ مجموعة جزئية فعلية منها. برهن ذلك
3.6.1 كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد .
4.6.1 لتكن A مجموعة قابلة للعد ولتكن B مجموعة ما ، فان $A\cap B$ تكون مجموعة قابلة للعد
5.6.1 المجموعة $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ قابلة للعد . برهن ذلك
6.6.1 إذا كانت كل من A,B مجموعة قابلة للعد فان المجموعة $A\times B$ تكون قابلة للعد. برهن ذلك
7.6.1 إذا كانت كل من A,B مجموعة قابلة للعد فان المجموعة $A\bigcup B$ تكون قابلة للعد . برهن ذلك
8.6.1 برهن على أن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد
9.6.1 $P(\mathbb{N})$ مجموعة غير قابلة للعد
10.6.1 إذا كانت $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ تمثل مجموعة جميع الدوال التي يمكن تعريفها على $\mathbb{N}$ ، فان $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ مجموعة قابلة للعد
11.6.1 إذا كانت المجموعة A قابلة للعد ، فان المجموعة $\mathcal{F}=\{B:A$ مجموعة جزئية منتهية من $B\}$ تكون أيضا قابلة للعد.

7.1 بعض المتراجحات المهمة Some Important Inequalities

مبرهنة (1.7.1)

إذا كان $a\ge 0, b\ge 0, p>1, q>1$ بحيث أن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فان $ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$ وتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان $a^p=b^q$

البرهان:

لتكن $f(t)=1-\alpha+\alpha t-t^\alpha$ حيث $t\ge 0, \alpha=\frac{1}{p}$

$f'(t)<0$ لكل $0<t<1$ **ولن** $f'(t)>0$ لكل $t>0$ $\Leftarrow$ $f(t)\ge f(1)=0$

وتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان $t=1$ وعلية $1-\alpha+\alpha t-t^\alpha\ge 0$، أي أن $t^\alpha\le 1-\alpha+\alpha t$

إذا كانت $b=0$ فان $ab=0\le\frac{1}{p}a^p$ ، أما إذا كانت $b>0$ فإننا نضع $t=\frac{a^p}{b^q}$ ، وعلية نحصل

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^\alpha\le 1-\alpha+\alpha\frac{a^p}{b^q}$$

بما أن $\alpha=\frac{1}{p}$ $\Leftarrow$ $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{\frac{1}{p}}\le 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q}$ $\Leftarrow$ $b^q\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(1-\frac{1}{p}\right)b^q+\frac{1}{p}a^p$

ولكن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $\Leftarrow$ $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$ وكذلك $b^q\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{\frac{1}{p}}=ab^{q-\frac{q}{p}}=ab^{q\frac{1}{q}}=ab$ $\Leftarrow$ $ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$

مبرهنة(2.7.1) (متراجحة هولدر Holder's Inequality)

إذا كان $p,q \in \mathbb{R}$ بحيث أن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فان $\sum_i |x_i y_i| \le (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ حيث x_i , y_i أعداد حقيقية.
وبصورة عامة إذا كانت كل من f,g دالة حقيقية قابلة للتكامل ريمانيا عل الفترة $[a,b]$ (سوف نتطرق لها في الفصول القادمة للجزء الثاني ، تحليل رياضي 2) فان

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

البرهان:

نضع $a=(\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad b=(\sum_i |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$

إذا كان $ab=0$ فان أما $a=0$ أو $b=0$ وينتهي البرهان.

أما إذا كان $ab>0$ فان $\frac{|x_i|}{a}\cdot\frac{|y_i|}{b} \le \frac{1}{p}(\frac{|x_i|}{a})^p + \frac{1}{q}(\frac{|y_i|}{b})^q$

$$\sum_i |x_i y_i| \le ab(\frac{1}{pa^p}\sum_i |x_i|^p + \frac{1}{qb^q}\sum_i |y_i|^q) = ab(\frac{1}{pa^p}a^p + \frac{1}{qb^q}b^q) = ab(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}) = ab$$

$$\Leftarrow \quad \sum_i |x_i y_i| \le (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

نتيجة(3.7.1) متراجحة كوشي– شوارز **(** Cauchy-Schwars Inequality **)**

$$\sum_i |x_i y_i| \le (\sum_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_i |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

حيث x_i , y_i أعداد حقيقية. وبصورة عامة إذا كانت كل من f,g دالة حقيقية قابلة للتكامل ريمانيا عل الفترة $[a,b]$ فان

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

البرهان:

مباشرة من المبرهنة عندما $p=2$ فان $q=2$.

مبرهنة(4.7.1) (متراجحة منكوفسكي Minkokowsk's Inequality**)**

إذا كان $p \ge 1$ فان

$$(\sum_{i=1} |x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

حيث x_i , y_i أعداد حقيقية. وبصورة عامة إذا كانت كل من f,g دالة حقيقية قابلة للتكامل ريمانيا عل الفترة $[a,b]$ فان

$$(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \le (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_a^b |g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

البرهان:

الحالة واضحة عندما $p=1$ ، أما إذا كانت $p>1$ ، نختار q بحيث أن $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$

$\Leftarrow$ $q>1$

$$\sum_i |x_i+y_i|^p \le \sum_i |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_i |y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

باستخدام متراجحة هولدر نحصل على

$$\sum_i |x_i||x_i+y_i|^{p-1} \le (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i+y_i|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}, \quad \sum_i |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \le (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i+y_i|^{q(p-1)})^{\frac{1}{q}}$$

ولكن $q(p-1)=p$ $\Leftarrow$

$$\sum_i |x_i||x_i+y_i|^{p-1} \le (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{q}}, \quad \sum_i |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \le (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_i |x_i+y_i|^p \le (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{q}} + (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$(\sum_i |x_i+y_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_i |x_i+y_i|^p)^{1-\frac{1}{q}} \le (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_i |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

ر 331

Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

2. الفضاءات المترية Metric Spaces

الفضاءات المترية هي **تعمم و**توضيح مفهوم **المسافة في خط** حقيقي .التعاريف **سوف توفر لنا** أداة مفيدة لمزيد من التطبيقات **العامة** لمفهوم **المسافة**. مفهوم الفضاءات المترية يعتبر من المفاهيم المهمة في الرياضيات الحديثة.

1.2 تعاريف وأمثلة Definitions and Examples

تعريف (1.1.2)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية. يقال عن الدالة $d : X \times X \to \mathbb{R}$ بأنها دالة مترية (Metric function) على X إذا تحققت البديهيات الآتية:

(1) $d(x,y) \geq 0$ لكل $x, y \in X$ (2) $d(x,y) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ لكل $x, y \in X$ (4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ لكل $x, y, z \in X$ (المتراجحة المثلثية)

الفضاء المتري (Metric Space) هو الثنائي (X, d) حيث X مجموعة غير خالية ، d دالة مترية على X. سوف نكتب X بدلا من (X, d) في حالة عدم وجود التباس . عناصر المجموعة X تسمى بالنقاط ولكل $x, y \in X$ يسمى العدد الحقيقي $d(x,y)$ بالبعد بين النقطتين x, y . كما تسمى d دالة البعد أو دالة المسافة . من البديهيتين (1) و(2) نستنتج إذا كانت $x \neq y$ فان $d(x,y) > 0$ وعليه البعد بين أي نقطتين مختلفتين يكون موجب .

مثال (2.1.2)

لتكن الدالة $d_u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $d_u(x,y) = |x-y|$ لكل $x.y \in \mathbb{R}$ فان d_u تكون دالة مترية على $\mathbb{R}$ ، وان $(\mathbb{R}, d_u)$ يسمى بالفضاء المتري الاعتيادي (Usual Metric Space)

الحل:

(1) ليكن $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x - y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x-y| \geq 0 \Rightarrow d_u(x,y) \geq 0$

(2) $x = y \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow d_u(x,y) = 0$

(3) ليكن $x, y \in \mathbb{R}$ ، $\Rightarrow d_u(x,y) = |x-y| = |y-x| = d_u(y,x)$

(4) ليكن $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x - y = (x-z) + (z-y) \Rightarrow |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$$

$\Rightarrow d_u(x,y) \leq d_u(x,z) + d_u(z,y) \Rightarrow d_u$ دالة مترية على $\mathbb{R}$

مثال (3.1.2)

لتكن الدالة $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $d(x,y) = |x-y| + 1$ لكل $x, y \in \mathbb{R}$.بين بان d ليست دالة مترية على $\mathbb{R}$

الحل:

ليكن $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث أن $x = y \Rightarrow d(x,y) = 1$ وهذا يعني أن البديهية الثانية ليست متحققة $\Leftarrow$ d ليست مترية

مثال (4.1.2)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن الدالة $d : X \times X \to \mathbb{R}$ بالصيغة

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

لكل $x, y \in X$. فان d دالة مترية على X ، وان (X, d) يسمى فضاء متري مبعثر (Discrete Metric Space)

الحل:-

(1) بما أن $d(x,y) = 0$ أو $d(x,y) = 1$ لكل $x, y \in X \Rightarrow d(x,y) \geq 0$ لكل $x, y \in X$

(2) ليكن $x, y \in X$ ، من التعريف مباشرة نحصل على أن $d(x, y) = 0$ عندما $x = y$.

(3) ليكن $x, y \in X$

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}=\begin{cases}0, & y=x\\ 1 & y\neq x\end{cases}=d(y,x)$$

(4) ليكن $x, y, z \in X$

(ا) إذا كان $x = y \Leftarrow d(x, y) = 0$

بما أن $d(z, y) \geq 0, d(x, z) \geq 0 \Leftarrow d(x, z) + d(z, y) \geq 0 \Leftarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(ب) إذا كان $x \neq y \Leftarrow d(x, y) = 1$

وبهذه الحالة يكون z لا يساوي احدهما على الأقل أي أن $z \neq x$ أو $z \neq y$

وليكن $z \neq x$ مثلا $d(x, z) = 1 \Leftarrow$ ، بما أن $d(z, y) \geq 0 \Leftarrow d(x, z) + d(z, y) \geq 1$

وعليه $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \Leftarrow d$ دالة مترية على X

مثال (5.1.2)

لتكن X مجموعة أحادية ولتكن الدالة $d : X \times X \to \mathbb{R}$ بالصيغة $d(x, y) = 0$ لكل $x, y \in X$. فان d دالة مترية على X ، وان (X, d) يسمى فضاء متريا متماسكا (Indiscrete Metric Space)

مبرهنة (6.1.2)

ليكن (X, d) فضاء متريا

(1) $|d(x,z)-d(z,y)| \leq d(x,y)$ لكل $x, y, z \in X$

(2) $|d(x,y)-d(z,w)| \leq d(x,z)+d(y,w)$ لكل $x, y, z, w \in X$

البرهان :-

(1)

$$d(x.z) \leq d(x,y)+d(y,z)=d(x,y)+d(z,y)$$
$$d(x,z)-d(z,y) \leq d(x,y) \quad \cdots(1)$$

وكذلك

$$d(z,y) \leq d(z,x)+d(x,y)=d(x,z)+d(x,y)$$
$$d(z,y)-d(x,z) \leq d(x,y)$$
$$-(d(x,z)-d(z,y)) \leq d(x,y)$$
$$d(x.z)-d(z,y) \geq -d(x,y) \quad \cdots(2)$$

من المتراجحتين(1)،(2) نحصل على

$$\Leftarrow -d(x,y) \leq d(x,z)-d(z,y) \leq d(x,y) \Leftarrow |d(x,z)-d(z,y)| \leq d(x,y)$$

(2)

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y) \leq d(x,z)+d(z,w)+d(w,y)=d(x,z)+d(z,w)+d(y,w)$$
$$d(x,y)-d(z,w) \leq d(x,z)+d(y,w) \quad \cdots(3)$$
$$d(z,w) \leq d(z,x)+d(x,w) \leq d(z,x)+d(x,y)+d(y,w)=d(x,z)+d(x,y)+d(y,w)$$
$$d(z,w)-d(x,y) \leq d(x,z)+d(y,w)$$
$$d(x,y)-d(z,w) \geq -(d(x,z)+d(y,w)) \quad \cdots(4)$$

من المتراجحتين(3)،(4) نحصل على

$$-(d(x,z)+d(y,w)) \le d(x,y)-d(z,w) \le d(x,z)+d(y,w)$$

وعلية $|d(x,y)-d(z,w)| \le d(x,z)+d(y,w)$

مبرهنة (7.1.2)

لتكن X مجموعة غير خالية فان الدالة $d: X \times X \to \mathbb{R}$ تكون دالة مترية إذا وفقط إذا تحقق الشرطين الآتيين :-

(1) $d(x,y)=0$ إذا وفقط إذا كان $x=y$ (2) $d(x,y) \le d(x,z)+d(y,z)$ لكل $x,y,z \in X$

البرهان:

نفرض d دالة مترية

الشرط(1) متحقق لأنه بديهية (2) من بديهيات الدالة المترية وكذلك الشرط (2) يتحقق من البديهيات (4) ، (2) من بديهيات الدالة المترية

الاتجاه المعاكس ، نفرض الشرطين (1) ، (2) متحققين.

(1) ليكن $x,y \in X$. باستخدام الشرط (2) نحصل على

$$d(x,x) \le d(x,y)+d(x,y)=2d(x,y)$$

ولكن $d(x,x)=0$ حسب الشرط (1) $\Leftarrow d(x,y) \ge 0$

(2) نفس الشرط (1)

(3) ليكن $x,y \in X$. باستخدام الشرط (2)

$$d(y,x) \le d(y,y)+d(x,y)=0+d(x,y)=d(x,y)$$

$$d(x,y) \le d(x,x)+d(y,x)=0+d(y,x)=d(y,x)$$

$$d(x,y)=d(y,x) \Leftarrow d(y,x) \le d(x,y), d(x,y) \le d(y,x) \Leftarrow$$

(4) ليكن $x,y,z \in X$

$$d(x,y) \le d(x,z)+d(y,z)=d(x,z)+d(z,y)$$

$\Leftarrow d$ دالة مترية على X

تعريف (8.1.2)

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية في X . قطر المجموعة A يرمز له بالرمز $\delta(A)$ ويعرف بالصيغة $\delta(A)=\sup\{d(x,y): x,y \in A\}$

وإذا كانت $A=\emptyset$ أو A تحتوي على عنصر واحد فقط فان $\delta(A)=0$.

بعد (المسافة) النقطة p عن المجموعة A يرمز له بالرمز $d(p,A)$ ويعرف بالصيغة

$$d(p,A)=\inf\{d(p,x): x \in A\}$$

ومن الواضح انه إذا كانت $p \in A$ فان $d(p,A)=0$ وإذا كانت $A=\emptyset$ فان $d(p,\emptyset)=\infty$.

لتكن B مجموعة جزئية غير خالية في X . البعد (المسافة) بين A,B يرمز له بالرمز $d(A,B)$ ويعرف بالصيغة

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y): x \in A, y \in B\}$$

ومن الواضح أيضا إذا كانت $A=\emptyset$ فان $d(\emptyset,B)=\infty$

مثال(9.1.2)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي ولتكن $A=[1,2), B=(2,4]$

نلاحظ أن

$¢(\mathrm{B})=1,\quad ¢(\mathrm{B})=2$

$d(\frac{5}{4},\mathrm{A})=0,\quad d(\frac{3}{2},\mathrm{B})=\frac{1}{2},\quad d(9/4,\mathrm{B})=0,\quad d(5,\mathrm{B})=1$

$d(\mathrm{A},\mathrm{B})=0$

مبرهنة(10.1.2)

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن كل من A,B مجموعة جزئية غير خالية في X

(1) $¢(\mathrm{A})\geq 0$ ، $d(p,\mathrm{A})\geq 0$ لكل $d(\mathrm{A},\mathrm{B})\geq 0, p\in \mathrm{X}$ (2) إذا كانت A منتهية فان $¢(\mathrm{A})<\infty$

(3) إذا كانت $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq ¤$ فان $d(\mathrm{A},\mathrm{B})=0$ (4) $|(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})|\leq d(p,q)$ لكل $p,q\in\mathrm{X}$

(5) إذا كانت $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ فان $d(p,A)\geq d(p,B)$ لكل $p\in\mathrm{X}$

البرهان :-

(1)، (2) نحصل عليها من التعريف مباشرة

(3)

بما أن $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq ¤$ $\Leftarrow$ يوجد على الأقل عنصر ينتمي إلى التقاطع وليكن x_0 مثلا، أي أن $x_0\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ $\Leftarrow$ $x_0\in\mathrm{A}$ و $x_0\in\mathrm{B}$

$d(\mathrm{A},\mathrm{B})=\inf\{d(x,y):x\in\mathrm{A},y\in\mathrm{B}\}\leq d(x,y)\ \forall x\in\mathrm{A},\forall y\in\mathrm{B}$

$\Leftarrow$ $d(\mathrm{A},\mathrm{B})\leq d(x_0,x_0)=0$ ولكن $d(\mathrm{A},\mathrm{B})\geq 0$ $\Leftarrow$ $d(\mathrm{A},\mathrm{B})=0$

(4)

بما أن $d(p,q)=d(q,p)\Leftarrow d(p,\mathrm{A})\geq d(q,\mathrm{A})$

$d(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})\geq 0$

$|d(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})|=d(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})\qquad\cdots(1)$

$d(p,\mathrm{A})=\inf\{d(p,x):x\in\mathrm{A}\}\leq d(p,x)\ \forall x\in\mathrm{A}$

بما أن $d(p,\mathrm{A})=\inf\{d(p,x):x\in\mathrm{A}\}\leq d(p,x)$

لكل $x\in\mathrm{A}$ $\Leftarrow d(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})\leq d(p,x)-d(q,\mathrm{A})$ لكل $x\in\mathrm{A}$

$|d(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})|\leq d(p,x)-d(q,\mathrm{A})\qquad\cdots(2)$

بما أن $d(q,\mathrm{A})=\inf\{d(q,y):y\in\mathrm{A}\}$ $\Leftarrow$ لكل $£>0$ يوجد $y\in\mathrm{A}$ بحيث ان $d(q,\mathrm{A})\geq d(q,y)-£$

$\Leftarrow\quad -d(q,\mathrm{A})\leq -d(q,y)+£\quad\Leftarrow$

$d(p,y)-d(q,\mathrm{A})\leq d(p,y)-d(q,y)+£$

$|d(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})|\leq d(p,y)-d(q,y)+£\qquad\cdots(3)$

بما أن

$|d(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})|\leq d(p,q)+£\Leftarrow d(p,y)-d(q,y)\leq d(p,q)\Leftarrow d(p,y)\leq d(p,q)+d(y,q)$

لكل $£>0$ $\Leftarrow$ $|d(p,\mathrm{A})-d(q,\mathrm{A})|\leq d(p,q)$

(5) لتكن $p\in\mathrm{X}$

بما أن $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\Leftarrow\{d(p,x):x\in\mathrm{A}\}\subset\{d(p,x):x\in\mathrm{B}\}\Leftarrow$ $\inf\{d(p,x):x\in\mathrm{A}\}\geq\inf\{d(p,x):x\in\mathrm{B}\}$

$\Leftarrow d(p,\mathrm{A})\geq d(p,\mathrm{B})$

ملاحظة

(1) إذا كان $d(p,A)=0$ فليس من الضروري أن يكون $p\in A$

(2) إذا كان $d(A,B)=0$ فليس من الضروري أن يكون $A\cap B\neq \emptyset$ والمثال التالي يوضح ذلك

مثال (11.1.2)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي

(1) إذا كانت $A=(a,b)$ فان $d(b,A)=0$ وان $b\notin A$

(2) إذا كانت $A=[0,1),B=(1,2]$ فان $d(A,B)=0$ وان $A\cap B=\emptyset$

الحل:

(1) نفرض $d(b,A)\neq 0$

بما أن $d(b,A)\geq 0 \Leftarrow d(p,A)>0 \Leftarrow$ حسب خاصية ارخميدس ، يوجد عدد صحيح موجب n

بحيث $\frac{1}{n}<d(p,A)$

بما أن $d(p,A)=\inf\{d(p,x):x\in A\} \Leftarrow d(p,A)\leq d(b,x)$ لكل $x\in A \Leftarrow \frac{1}{n}\leq d(b,x)$ لكل $x\in A$

ولكن $d(b,x)=|b-x|$ لان $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي

$\Leftarrow \frac{1}{n}\leq |b-x|$ لكل $x\in A \Leftarrow x<b-\frac{1}{n}$ لكل $x\in A \Leftarrow b-\frac{1}{n}\in A$ لان $x<b-\frac{1}{n}<b$

$\Leftarrow \frac{1}{n}<\left|b-(b-\frac{1}{n})\right|<\frac{1}{n}$ وهذا تناقض. وبالمثل نبرهن (2)

فضاء حاصل الضرب Product Space

لتكن كل من X,Y مجموعة الضرب الديكارتي(Cartesian Product) للمجموعتين Y,X يرمز له بالرمز $X\times Y$ ويعرف بالصورة $X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$. من الواضح أن $X\times Y\neq Y\times X$ وكذلك نلاحظ انه إذا كانت كل من X,Y مجموعة غير خالية فان $X\times Y$ غير خالية أيضا.

مثال (12.1.2)

إذا كان كل من (X,d_1), (Y,d_2) فضاء مترياً فان $(X\times Y,d)$ يكون فضاء مترياً حيث

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}$$

لكل $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

الحل:

(1) ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y \Leftarrow d_1(x_1,x_2)\geq 0,\quad d_2(y_1,y_2)\geq 0$

$\Leftarrow =\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}\geq 0 \Leftarrow d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\geq 0$

(2) ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0 \Leftrightarrow \max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}=0 \Leftrightarrow d_1(x_1,x_2)=0,\quad d_2(y_1,y_2)=0$$

$$\Leftrightarrow x_1=x_2,\quad y_1=y_2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

(3) ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d_1(x_1,x_2), d_2(y_1,y_2)\} = \max\{d_2(x_2,x_1), d_1(y_2,y_1)\} = d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$$

(4) ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in X \times Y$

$$\begin{aligned} d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \max\{d_1(x_1,x_2), d_2(y_1,y_2)\} \\ &\le \max\{d_1(x_1,x_3)+d_1(x_3,x_2), d_2(y_1,y_3)+d_2(y_3,y_2)\} \\ &\le \max\{d_1(x_1,x_3), d_2(y_1,y_3)\} + \max\{d_1(x_3,x_2), d_2(y_3,y_2)\} \\ &= d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d((x_3,y_3),(x_2,y_{23})) \end{aligned}$$

2.2 الفضاءات شبه المترية Pseudo-Metric Spaces

تعريف(1.2.2)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية. يقال عن الدالة $d:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathbb{R}$ بأنها دالة شبه مترية (Pseudo-Metric function) على X إذا تحققت البديهيات الآتية:

(1) $d(x,y)\ge 0$ لكل $x,y\in X$ (2) $d(x,x)=0$ لكل $x\in X$

(3) $d(x,y)=d(y,x)$ لكل $x,y\in X$ (4) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ لكل $x,y,z\in X$ (المتراجحة المثلثية)

من شرط الدالة المترية d على المجموعة X تكون مترية إذا كان $d(x,y)\ne 0$ لكل $x\ne y$. الفضاء شبه المتري (Pseudo-Metric Space) هو الثنائي (X,d) حيث X مجموعة غير خالية ، d دالة شبه مترية على X. سوف نكتب X بدلا من (X,d) في حالة عدم وجود التباس.

مبرهنة(2.2.2)

ليكن (X,d) فضاء شبه متري . نعرف العلاقة ~ على X كالأتي :

$x\sim y$ إذا وفقط إذا كان $d(x,y)=0$

(1) ~ تكون علاقة تكافؤ على X

(2) إذا كان $[x]$ يمثل صف التكافؤ إلى x وكانت $A=\{[x]:x\in X\}$ ، فان الدالة $d^*:A\times A\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d^*([x],[y])=d(x,y)$ تكون مترية على A ، أي إن (A,d^*) فضاء متريا

البرهان:

(1) بما أن $d(x,x)=0$ لكل $x\in X$ $\Leftarrow$ $x\sim x$ وعلية تكون العلاقة ~ انعكاسية

ليكن $x\sim y$ $\Leftarrow$ $d(x,y)=0$

ولكن $d(x,y)=d(y,x)$ $\Leftarrow$ $d(y,x)=0$ $\Leftarrow$ $y\sim x$ وعلية تكون العلاقة ~ متناظرة.

ليكن $x\sim y,\ \ y\sim z$ $\Leftarrow$ $d(x,y)=0,\ \ d(y,z)=0$

بما أن $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ $\Leftarrow$ $d(x,z)\le 0$

ولكن $d(x,z)\ge 0$ $\Leftarrow$ $d(x,z)=0$ $\Leftarrow$ $x\sim z$ وعلية تكون العلاقة ~ متعدية. وهذا يعني أن ~ علاقة تكافؤ على X

(2) إذا كان $a\in[x],\ b\in[y]$ فان $a\sim x,\ \ b\sim y$ $\Leftarrow$ $d(x,a)=0,\ \ d(y,b)=0$

بما أن $|d(x,y)-d(a,b)|\le d(x,a)+d(y,b)$ $\Leftarrow$ $|d(x,y)-d(a,b)|\le 0$

بما أن القيمة المطلقة غير سالبة فان $|d(x,y)-d(a,b)|=0$

$\Leftarrow$ $d(x,y)-d(a,b)=0$ $\Leftarrow$ $d(x,y)=d(a,b)$ وعلية d^* معرفة تعريفا حسنا.

بما أن $d(x,y)\ge 0$ لكل $x,y\in X$ $\Leftarrow$ $d^*([x],[y])\ge 0$ لكل $[x],[y]\in A$

ليكن $x,y\in X$

$$d^*([x],[y])=0 \iff d(x,y)=0 \iff x\sim y \iff [x]=[y]$$

ليكن $x,y\in X$

$$d^*([x],[y])=d(x,y)=d(y,x)=d^*([y],[x])$$

ليكن $x,y,z\in X$

$$d^*([x],[y])=d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)=d^*([x],[z])+d^*([z],[y])$$

وعلية (A,d^*) فضاء متريا .

مثال (3.2.2)

ليكن X تمثل مجموعة كل الدوال الحقيقية على الفترة المغلقة $[0,1]$ والقابلة للتكامل على تلك الفترة. عرف الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ بالصيغة $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$ لكل $f,g\in X$ ، فان d دالة شبه مترية وليست مترية على X .

الحل:

استخدام خواص التكامل الريماني نبرهن البديهيات الآتية:

(1) ليكن $f,g\in X \Leftarrow |f(x)-g(x)|>0 \Leftarrow d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx>0$

(2) ليكن $f\in X$

$$d(f,f)=\int_0^1|f(x)-f(x)|dx=\int_0^1|0|dx=0$$

(3) ليكن $f,g\in X$

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|g(x)-f(x)|dx=d(g,f)$$

(4) ليكن $f,g,h\in X$

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|dx$$

$$\le\int_0^1(|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)dx=\int_0^1|f(x)-h(x)|dx+\int_0^1|h(x)-g(x)|dx=d(f,h)+d(h,g)$$

$\Leftarrow$ d دالة شبه مترية، بقي أن نبرهن على أن d دالة ليست مترية.

نعرف الدالتين $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ بالشكل الأتي:

$$g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases}\quad,\quad f(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases}\ \Leftarrow\ f(x)-g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases}$$

$\Leftarrow$ $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=0$ ولكن $f\ne g$.

3.2 الفضاءات الإقليدية Euclidean Spaces

تعريف (1.3.2)

ليكن n عددا صحيحا موجبا . المتتابعة المنتهية $(x_1,\cdots,x_n)$ المكونة من n من الأعداد الحقيقية تسمى n من المركبات (n-tuples) . يقال للمجموعة التي عناصرها n من المركبات بالفضاء النوني الاقليدي (Euclidean n-spaces) ويرمز

له بالرمز R^n وعليه $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbb{R},\quad i=1,2,\cdots,n\}$ ، ويسمى كل عنصر في $\mathbb{R}^n$ نقطة في الفضاء $\mathbb{R}^n$. يعرف الجمع والضرب القياسي على R^n بالصيغة

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),\qquad \alpha(x_1,\cdots,x_n)=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n)$$

لكل $x=(x_1,\cdots,x_n),\,y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$ ولكل $\alpha\in\mathbb{R}$

فيما يلي بعض الأمثلة المهمة على الفضاءات الاقليدية.

مثال(2.3.2)

لتكن الدالة $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ لكل $x=(x_1,\cdots,x_n),\,y=(x_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ فأن d تكون دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

الحل:-

(1) ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n),\,y=(x_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

$\Leftarrow$ $x_i-y_i\in\mathbb{R}$ لكل $i=1,2,\cdots,n$ $\Leftarrow$ $(x_i-y_i)^2\geq 0$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow$ $d(x,y)\geq 0$

(2)

$$d(x,y)=0\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i.)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x_i-y_i)^2=0\quad\forall\, i=1,2,\cdots,n\quad\Leftrightarrow x_i-y_i=0\quad\forall\, i=1,2,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow x_i=y_i\quad\forall\, i=1,2,\cdots,.n\quad\Leftrightarrow x=y$$

(3) ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n),\,y=(x_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=d(y,x)$$

(4)

ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n),\,y=(x_1,\cdots,y_n),\,z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$. نضع $\alpha_i=x_i-z_i,\quad \beta_i=z_i-y_i$

$$d(x,z)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad d(z,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-z_i)+(z_i-y_i)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام مترا جحة منكوفسكي

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

وعليه $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ $\Leftarrow$ d دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

مثال (4.3.2)

لتكن الدالة $d:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$

لكل $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ فأن d تكون دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

الحل:

(1)، (2)، (3) واضحة

(4) ليكن $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n), z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$

نضع $\sim_i = x_i - z, \quad {}_i = z_i - y_i$

$$\mathrm{d}(x,\mathrm{z})=\sum_{i=1}^{n}|\sim_i| \quad , \quad d(z,y)=\sum_{i=1}^{n}|\ {}_i|$$

$$\Leftarrow \quad \mathrm{d}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\sim_i + \ {}_i|$$

بما أن $|\sim_i + \ {}_i| \le |\sim_i| + |\ {}_i|$ وعليه $d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z) \Leftarrow d$ دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

مثال (5.3.2)

لتكن الدالة $d:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $d(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_n-y_n|\}$

لكل $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ فأن d تكون دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

الحل:-

(1)، (2)، (3) واضحة

(4) ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n), z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$. نضع

$$\sim_i + \ {}_i = x_i - y_i \quad \Leftarrow \quad \sim_i = x_i - z, \quad {}_i = z_i - y_i$$

$$d(x,z)=\max\{|\sim_1|,|\sim_2|,\cdots,|\sim_n|\},\ d(z,y)=\max\{|\ {}_1|,|\ {}_2|,\cdots,|\ {}_n|\},$$

$$d(x,y)=\max\{|\sim_1+\ {}_1|,|\sim_2+\ {}_2|,\cdots,|\sim_n+\ {}_n|\}$$

بما أن $|\sim_i + \ {}_i| \le |\sim_i|+|\ {}_i|$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$$d(x,y)\le\max\{|\sim_1|+|\ {}_2|,|\sim_2|+|\ {}_2|,\cdots,|\sim_n|+|\ {}_n|\}\le\max\{|\sim_1|,|\sim_2|,\cdots,|\sim_n|\}+\max\{|\ {}_1|,|\ {}_2|,\cdots,|\ {}_n|\}=d(x,z)+d(z,y)$$

$\Leftarrow$ d دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

4.2 المقيدية Boundednes

ليكن (X,d) فضاء متري . ولتكن $A\subseteq X$.قطر المجموعة A (كما في التعريف 8) يعرف بالصيغة

$$¢(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

نلاحظ أن المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة من الأسفل لان $d(x,y)\ge 0$ لكل $x,y\in X$. لكي تكون المجموعة B مقيدة ،يجب أن تكون مقيدة من الأعلى

تعريف (1.4.2)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$.يقال عن المجموعة A بأنها مقيدة **(Bounded)** في X إذا كانت $¢(A)<\infty$.
بعبارة أخرى إذا كانت المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة في $\mathbb{R}$. وبصورة خاصة يقال عن X بأنه فضاء مقيد **(Bounded Space)** إذا كانت $¢(X)<\infty$.

مبرهنة(2.4.2)

لتكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. فان المجموعة A تكون مقيدة في X إذا وفقط إذا كان لكل $x_0\in A$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ (لا يعتمد على x_0) بحيث أن $d(x,x_0)<k$ لكل $x\in A$.

البرهان :

نفرض المجموعة A مقيدة $\Leftarrow \delta(A)<\infty \Leftarrow$ المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|a|<k$ لكل $a\in B$ $\Leftarrow$ $|d(x,y)|<k$ لكل $x,y\in A$

بما أن $d(x,y)\geq 0$ لكل $x,y\in X$ $\Leftarrow$ $d(x,y)<k$ لكل $x,y\in A$ وبصورة خاصة لكل $d(x,x_0)<k$ لكل $x_0\in A$

الاتجاه الأخر.

نفرض لكل $x_0\in A$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $d(x,x_0)<k$ لكل $x\in A$.

ليكن $x,y\in A \Leftarrow d(x,x_0)<k,\ \ d(y,x_0)<k$

$$d(x,y)\leq d(x,x_0)+d(y,x_0)<k+k=2k$$

$\Leftarrow$ المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ المجموعة A مقيدة

نتيجة(3.4.2)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. فان A تكون مقيدة في X إذا وفقط إذا يوجد $k\in Z^+$ بحيث أن $d(x,y)<k$ لكل $x,y\in A$.

مثال(4.4.2)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d)$.

(1) كل من الفترات $A_1=(a,b),\ A_2=(a,b],\ A_3=[a,b),\ A_4=[a,b]$ تكون مقيدة لان $\delta(A_i)=b-a$ لكل $i=1,2,3,4$

(2) الفضاء $\mathbb{R}$ غي مقيد لان $\delta(\mathbb{R})=\infty$.

مثال(5.4.2)

في الفضاء المتري المبعثر (X,d)

(1) X مجموعة مقيدة لان $\delta(X)=1$

(2) إذا كانت $x_0\in X$ وكانت $A=\{x\in X:d(x,x_0)<\frac{1}{2}\}$ فان $\delta(A)=0 \Leftarrow$ قطر المجموعة A يساوي صفر

نلاحظ أن المجموعة A عبارة عن كرة مركزها x_0 ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ وهذا يعني أن قطر الكرة لا يساوي ضعف نصف قطرها.

تعريف (6.4.2)

ليكن (X,d) فضاء متريا وليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاءً متريا اعتياديا. يقال عن الدالة $f:X\to\mathbb{R}$ بأنها مقيدة (Bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|f(x)|\leq M$ لكل $x\in X$. بعبارة أخرى إذا كان مستقر الدالة f مجموعه مقيدة في $\mathbb{R}$، أي أن المجموعة $f(X)=\{f(x):x\in X\}$ مجموعه مقيدة في $\mathbb{R}$.

3. تبولوجيات مترية Metric Topologies

لتكن τ عائلة من المجموعات الجزئية من مجموعة X. يقال عن τ بأنه تبولوجي (**Topology**) على X إذا تحققت البديهيات الآتية :

(1) $\emptyset, X \in \tau$ (2) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau$ فان $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ (3) إذا كانت $A_\alpha \in \tau$ لكل $\alpha \in \Lambda$ فإن $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \tau$

الفضاء التبولوجي (**Topological space**) هو الثنائي (X,τ) حيث X مجموعة غير خالية. τ تبولوجي على X. سوف نكتب X بدلاً من (X,τ) في حالة عدم وجود التباس. عناصر المجموعة τ تسمى بالمجموعات المفتوحة (**Open Sets**) ومكملاتها تسمى بالمجموعات المغلقة (**Closed Sets**) ، بعبارة أخرى إذا كانت $A \subseteq X$ فيقال عن A بأنها مجموعة مفتوحة في X إذا كانت $A \in \tau$ ويقال عن A بأنها مجموعة مغلقة في X إذا كانت A^c مجموعة مفتوحة في X.

من التعريف مباشرةً نستنتج الآتي :

(1) كل من $\emptyset, X$ مجموعة مفتوحة في X

(2) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجوعات مفتوحة في X فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مفتوحة X.

(3) إذا كانت A_α ،لكل $\alpha \in \Lambda$ مجموعة مفتوحة في X فان $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ تكون مجموعة مفتوحة في X.

وباستخدام قانوني دي موركان نستنتج الآتي

(1) كل من $\emptyset, X$ مجموعة مغلقة في X

(2) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجوعات مغلقة في X فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مغلقة X.

(3) إذا كانت A_α ،لكل $\alpha \in \Lambda$ مجموعة مغلقة في X فان $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ تكون مجموعة مغلقة في X.

في هذه المحاضرة سوف نبين أن كل فضاء متري يكون فضاء تبولوجيا ولكن العكس غير صحيح دائما.

1.3 الكرات The Balls

تعريف (1.1.3)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً، $x_0 \in X$ وليكن r عدد حقيقي موجب. المجموعة $\{x \in X : d(x,x_0) < r\}$ تسمى كرة مفتوحة (Open Ball) في X ويسمى x_0 مركزة الكرة و r نصف قطر الكرة ويرمز لها بالرمز ${}_r(x_0)$ وعليه

$$ {}_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\} $$

والكرة المغلقة(Closed Ball)التي مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها r يرمز لها بالرمز $\overline{}_r(x_0)$ وتعرف بالصيغة

$$ \overline{}_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) \le r\} $$

ملاحظة

كل من ${}_r(x_0), \overline{}_r(x_0)$ مجموعة غير خالية لان كلا منها تحتوي على المركز، أي أن $x_\circ \in {}_r(x_0)$ وكذلك $x_0 \in \overline{}_r(x_0)$

مثال(2.1.3)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d)$

(1) كل كرة مفتوحة فيه تكون فترة مفتوحة وبالعكس (2) كل كرة مغلقة فيه تكون فترة مغلقة وبالعكس

الحل:

بما ان $(\mathbb{R},d)$ فضاء متري اعتيادي $d(x,y) = |x-y|$ لكل $x,y \in \mathbb{R}$

(1) لتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و $r > 0$

$${}_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}:d(x,x_0)<r\}=\{x\in\mathbb{R}:|x-x_0|<r\}=\{x\in\mathbb{R}:-r<x-x_0<r\}=\{x\in\mathbb{R}:x_0-r<x<x_0+r\}=(x_0-r,x_0+r)$$

الآن نأخذ العكس. لتكن $\mathrm{A}=(a,b) \Leftarrow \mathrm{A}$ فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$.

نضع $x_0=\dfrac{a+b}{2}$, $r=\dfrac{b-a}{2} \Rightarrow r>0$

$$\mathrm{A}=(a,b)=(x_0-r,x_0+r)= {}_r(x_0) \Leftarrow x_0-r=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a,\quad x_0+r=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=b$$

وبالمثل نبرهن (2)

مثال(3.1.3)

ليكن $\mathrm{X}=[0,1]$ ولتكن الدالة $d:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $d(x,y)=|x-y|$ لكل $x,y\in\mathrm{X}$. ناقش

$\mathrm{B}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ، $\mathrm{B}_{\frac{1}{4}}(0)$

$$\mathrm{B}_1\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{x\in\mathrm{X}:d\left(x,\frac{1}{2}\right)<1\right\}=\left\{x\in\mathrm{X}:|x-\frac{1}{2}|<1\right\}=\left\{x\in\mathrm{X}:-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}=\{x\in\mathrm{X}:0\le x\le 1\}=\mathrm{X}$$

$$\mathrm{B}_{\frac{1}{4}}(0)=\left\{x\in\mathrm{X}:d(x,0)<\frac{1}{4}\right\}=\left\{x\in\mathrm{X}:|x-0|<\frac{1}{4}\right\}=\left\{x\in\mathrm{X}:-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}\right\}=\left[0,\frac{1}{4}\right)$$

مثال(4.1.3)

ناقش الكرات المفتوحة التي مركزها النقطة $(0,0)$ونصف قطرها 1 لكل من الدوال المترية التالية والمعرفة على $\mathbb{R}^2$

(1) $d_1(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

(2) $d_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

(3) $d_3(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

الحل: $r=1,\quad x_0=(0,0)$

(1) ${}_r(x_0)=\{x\in\mathrm{X}:d(x,x_0)<r\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:{x_1}^2+{x_2}^2<1\}$

(2) ${}_r(x_0)=\{x\in\mathrm{X}:d(x,x_0)<r\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:|x_1|+|x_2|<1\}$

(3) ${}_r(x_0)=\{x\in\mathrm{X}:d(x,x_0)<r\}=\{(x,x_2)\in\mathbb{R}^2:\max\{|x_1|,|x_2|\}<1\}$

وهذه المنطقة تكون محدودة بالمستقيمات $x_1=1$ ، $x_1=-1$ ، $x_2=1$ ، $x_2=-1$

مثال(5.1.3)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر وليكن $x_0\in\mathrm{X}$ وان r عدد حقيقي موجب

(ا) إذا كان $r>1$ فان $\mathrm{B}_r(x_0)=X$ (ب) إذا كان $r\le 1$ فان $\mathrm{B}_r(x_0)=\{x_0\}$

الحل:

(ا) ليكن $x\in\mathrm{X}$ ، بما أن $d(x,x_0)=\begin{cases}0, & x=x_0\\ 1, & x\ne x_0\end{cases} \Rightarrow d(x,x_0)<r$

$\Leftarrow x\in B_r(x_0) \Leftarrow X\subseteq B_r(x_0)$ ولكن $B_r(x_0)\subseteq X \Leftarrow B_r(x_0)=X$.

(ب) ليكن $x\in X$ بحيث $x\neq x_0 \Leftarrow d(x,x_0)=1 \Leftarrow d(x,x_0)\ge r \Leftarrow x\notin B_r(x_0)$ لكل $x\neq x_0$

بما أن $x_0\in B_r(x_0)$ (لأنها مركز الكرة) $\Leftarrow B_r(x_0)=\{x_0\}$.

2.3 المجموعات المفتوحة والمغلقة Open and Closed Sets

تعريف (1.2.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن A بأنها مجموعة مفتوحة (Open Set) في X إذا كان لكل $x\in A$ يوجد $r>0$ بحيث أن $B_r(x)\subset A$. بعبارة أخرى المجموعة A تكون مفتوحة إذا كان لكل $x\in A$ يوجد $r>0$ يحقق الشرط الآتي : أذا كان $y\in X$ وكان $d(x,y)<r$ فان $y\in A$. ويقال A بأنها مجموعة مغلقة (Closed Set) في X إذا كانت A^c مجموعة مفتوحة في X

مبرهنة (2.2.3)

في أي فضاء متري

(1) كل كرة مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة (2) كل كرة مغلقة تكون مجموعة مغلقة

البرهان

ليكن (X,d) فضاء متري وليكن $x_0\in X$ ، $r>0$

(1)يجب أن نبرهن $B_r(x_0)$ مجموعة مفتوحة : لتكن $x\in B_r(x_0) \Rightarrow d(x,x_0)<r \Rightarrow r-d(x,x_0)>0$

نضع $r_1=r-d(x,x_0) \Rightarrow r_1>0$. يجب أن نبرهن $B_{r_1}(x)\subseteq B_r(x_0)$

ليكن $y\in B_{r_1}(x) \Rightarrow d(y.x)<r_1 \Rightarrow d(y,x)<r-d(x,x_0) \Rightarrow d(y,x)+d(x,x_0)<r$

بما أن $d(y,x_0)\le d(y,x)+d(x,x_0) \Rightarrow d(y,x_0)<r \Rightarrow y\in B_r(x_0)$ وعليه $B_r(x_0)$ مجموعة مفتوحة

(2) يجب أن نبرهن $\overline{B}_r(x_0)$ مجموعة مغلقة. لتكن $A=(\overline{B}_r(x_0))^c$

بما أن $\overline{B}_r(x_0)=\{x\in X:d(x,x_0)\le r\} \Rightarrow A=\{x\in X:d(x,x_0)>r\}$

ليكن $x\in A \Rightarrow d(x,x_0)>r$. نضع $r_2=d(x,x_0)-r \Rightarrow r_2>0$

يجب أن نبرهن $B_{r_2}(x)\subset A$.

ليكن $y\in B_{r_2}(x) \Rightarrow d(y,x)<r_2 \Rightarrow d(y,x)<d(x,x_0)-r \Rightarrow d(x,x_0)-d(y,x)>r$

بما أن $d(x,x_0)\le d(x,y)+d(y,x_0) \Rightarrow d(x,x_0)-d(y,x)\le d(y,x_0)$

$\Rightarrow d(y,x_0)>r \Rightarrow y\in A \Rightarrow B_{r_2}(x)\subset A \Rightarrow A$ مجموعة مفتوحة وعليه $A^c=\overline{B}_r(x_0)$ مجموعة مغلقة .

نتيجة (3.2.3)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$

(1) كل فترة مفتوحة تكون مجموعة (2) كل فترة مغلقة تكون مجموعة مغلقة

مبرهنة(4.2.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$ فان المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت A تساوي اتحاد كرات مفتوحة .

البرهان :-

إذا كانت $A=\emptyset$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $A\neq\emptyset$

نفرض A مجموعة مفتوحة في $X \Rightarrow$ لكل $x\in A$ يوجد $r_x>0$ بحيث أن $B_{r_x}(x)\subseteq A$

$\Leftarrow \; \bigcup_{x\in A} B_{r_x}(x) \subset A \; \Leftarrow A \subseteq \bigcup_{x\in A} B_{r_x}(x) \Leftarrow A = \bigcup_{x\in A} B_{r_x}(x) \Leftarrow A$ تساوي اتحاد كرات مفتوحة

الاتجاه المعاكس: نفرض أن A تساوي اتحاد كرات مفتوحة

بما أن كل كرة مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة $\Leftarrow A$ تساوي اتحاد مجموعات مفتوحة وعليه A مجموعة مفتوحة .

مثال(5.2.3)

برهن على أن كل مجموعة جزئية في فضاء متري مبعثر تكون مفتوحة ومغلقة .

الحل :

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $A \subseteq X$

إذا كانت $A=\emptyset$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $A \neq \emptyset$. نفرض $x \in A$. نأخذ $r=\frac{1}{2}$

$$B_r(x)=\{y\in X : d(y,x)<\frac{1}{2}\}=\{y\in X : d(y,x)=0\}=\{y\in X : y=x\}=\{x\}\subset A$$

$\Leftarrow A$ مجموعة مفتوحة وعليه كل مجموعة جزئية من X تكون مجموعة مفتوحة.

بما أن $A \subseteq X \Leftarrow A^c \subseteq X \Leftarrow A^c$ مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow A$ مجموعة مغلقة في X

مبرهنة (6.2.3)

ليكن (X,d) فضاء مترياً

(1) كل من $\emptyset, X$ مجموعة مفتوحة في X

(2) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجوعات مفتوحة في X فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مفتوحة X .

(3) إذا كانت A_α، لكل $\alpha \in \Lambda$ مجموعة مفتوحة في X فان $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ تكون مجموعة مفتوحة في X .

البرهان:

(1) نفرض أن $\emptyset$ مجموعة غير مفتوحة $\Leftarrow$ يوجد $x \in \emptyset$ بحيث $B_r(x) \not\subseteq \emptyset$ لكل $r>0$. وهذا غير ممكن لان $\emptyset$ لا تحتوي على عناصر. $\Leftarrow \emptyset$ مجموعة مفتوحة

بما أن $B_r(x) \subseteq X$ لكل $x \in X, \; r>0 \Leftarrow X$ مجموعة مفتوحة.

(2) لتكن كل من $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعة مفتوحة في X . وليكن $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftarrow x \in A_i$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

بما أن A_i مجموعة مفتوحة في X لكل $i=1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow$ يوجد $r_i>0$ لكل $i=1,2,\cdots,n$ بحيث أن $B_{r_i}(x) \subset A_i$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

نضع $r=\min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\} \Leftarrow B_r(x) \subset B_{r_i}(x)$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$B_r(x) \subset A_i \Leftarrow B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ مجموعة مفتوحة في X

(3) لتكن A_α مجموعة مفتوحة في X لكل $\alpha \in \Lambda$ وليكن $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$

$\Leftarrow x \in A_\alpha$ لبعض قيم $\alpha \in \Lambda$. بما أن A_α مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow$ يوجد $r>0$ بحيث أن $B_r(x) \subset A_\alpha$

$\Leftarrow B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \Leftarrow \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ مجموعة مفتوحة في X .

ملاحظة

في أي فضاء متري ليس من الضروري أن يكون تقاطع أي عدد غير منتهي من المجموعات المفتوحة مجموعة مفتوحة. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (7.2.3)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي ولتكن $A_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ لكل $n\in Z^+$ نلاحظ أن A_n مجموعة مفتوحة لكل $n\in Z^+$ وان $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}$ مجموعة غير مفتوحة.

مبرهنة (8.2.3)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً

(1) كل من $\emptyset, X$ مجموعة مغلقة في X

(2) إذا كانت $A_1,A_2,\cdots,A_n$ مجموعات مغلقة في X فإن $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ تكون مجموعة مغلقة X.

(3) إذا كانت A_α، لكل $\alpha\in\Lambda$ مجموعة مغلقة في X فان $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ تكون مجموعة مغلقة في X.

البرهان:

(1) بما أن $\emptyset^c=X$ ، وان X مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ $\emptyset^c$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $\emptyset$ مجموعة مغلقة في X

بما أن $X^c=\emptyset$ ، وان $\emptyset$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ X^c مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ X مجموعة مغلقة في X

(2) لتكن كل من $A_1,A_2,...,A_n$ مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ A_i^c مجموعة مفتوحة في X لكل $i=1,2,...,n$

$\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ $(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c)^c=\bigcup_{i=1}^{n}A_n$ مجموعة مغلقة في X

(3) لتكن A_α مجموعة مغلقة في X لكل $\alpha\in\wedge$ وليكن $x\in\bigcup_{\alpha\in\wedge}A_\alpha$

$\Leftarrow$ A_α^c مجموعة مفتوحة في X لكل قيم $\alpha\in\wedge$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c)^c=\bigcap_{\alpha\in}A_\alpha$ مجموعة مغلقة في X

ملاحظة

في أي فضاء متري ليس من الضروري أن يكون اتحاد أي عدد غير منتهي من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (9.2.3)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي ولتكن $A_n=[\frac{1}{n},1]$ لكل $n\in Z^+$ نلاحظ أن A_n مجموعة مغلقة لكل $n\in Z^+$

وان $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1]$ مجموعة غير مغلقة.

مبرهنة (10.2.3)

في أي فضاء متري (X,d) تكون كل مجموعة أحادية مغلقة وعليه كل مجموعة منتهية تكون مغلقة .

البرهان :-

لتكن A مجموعة أحادية . نفرض $A=\{a\}$. يجب أن نبرهن A مغلقة .

ليكن $x\in A^c \Leftarrow x\neq a \Leftarrow d(a,x)>0$. نضع $r=d(a,x) \Leftarrow r>0$

بما أن $d(a,x)\geq r \Leftarrow a\notin B_r(x) \Leftarrow B_r(x)\cap A=\emptyset \Leftarrow B_r(x)\subset A^c \Leftarrow A^c$ مجموعة مفتوحة $A \Leftarrow$ مجموعة مغلقة .

الآن نبرهن كل مجموعة منتهية تكون مغلقة . لتكن B مجموعة جزئية منتهية من X إذا كانت $B=\emptyset$ ينتهي البرهان ، أما إذا كانت $B\neq\emptyset$ ، نفرض $B=\{b_1,...,b_n\}$ بما أن $\{b_i\}$ مغلقة لكل $i=1,2,...,n \Leftarrow B=\bigcup_{i=1}^{n}\{b_i\}$ مجموعة مغلقة في X .

3.3 النقاط الداخلية لمجموعة Interior points of set

تعريف (1.3.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن النقطة $x\in A$ بأنها نقطة داخلية **(Interior point)** في A إذا وجدت مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x\in G\subset A$ ، بعبارة أخرى إذا وجد $r>0$ بحيث أن $B_r(x)\subseteq A$.

مجموعة كل النقاط الداخلية في A تسمى داخل**(Interior)** المجموعة A (ويرمز لها بالرمز A° أو $\operatorname{int}(A)$ أي أن

$$A^\circ=\{x\in A:\exists r>0,\quad B_r(x)\subseteq A\}$$

وعليه $A^\circ\subset A$. ومن التعريف مباشرة نستنتج

(1) A° مجموعة مفتوحة في X . (2) A مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا كان $A^\circ=A$. (3) $(A^0)^0=A^0$.

(4) A° تساوي اتحاد جميع المجموعات المفتوحة في X والمحتواة في A ، وعليه A° تكون اكبر مجموعة مفتوحة في X ومحتواة في A .

مثال (2.3.3)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $A\subseteq X$. جد A^0 .

الحل:

بما أن (X,d) فضاء متري مبعثر $\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة في X وعليه $A^\circ=A$.

مثال(3.3.3)

لتكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي ولتكن $A\subseteq\mathbb{R}$.

(1) إذا كانت $A=(a,b)$ فان $A^\circ=(a,b)$ (2) إذا كانت $A=(a,b]$ فان $A^\circ=(a,b)$

(3) إذا كانت $A=[a,b)$ فان $A^\circ=(a,b)$ (4) إذا كانت $A=[a,b]$ فان $A^\circ=(a,b)$

(5) إذا كانت $A=[a,b]\cup\{c,d\}$ فان $A^\circ=(a,b)$ (6) إذا كانت A منتهية فان $A^\circ=\emptyset$

(7) إذا كانت $A=\mathbb{N}$ فان $A^\circ=\emptyset$ حيث $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية.

(8) إذا كانت $A=\mathbb{Z}$ فان $A^\circ=\emptyset$ حيث $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.

(9) إذا كانت $A=\mathbb{Q}$ فان $A^\circ=\emptyset$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية

(10) إذا كانت $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$ فان $A^\circ=\emptyset$

مبرهنة (4.3.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا وليكن $A,B\subseteq X$

(1) إذا كانت $A\subseteq B$ فان $A^\circ \subseteq B^\circ$ (2) $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ (3) $(A\cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

البرهان

(1) ليكن $x\in A^\circ \Leftarrow$ توجد $r>0$ بحيث أن ${}_r(x)\subseteq A$

بما أن $A\subseteq B \Leftarrow {}_r(x)\subseteq B \Leftarrow x\in B^\circ \Leftarrow A^\circ \subset B^\circ$

(2)

بما أن $A\cap B\subset A \quad , \quad A\cap B\subset B$

$$\Leftarrow \quad (A\cap B)^\circ \subset A^\circ, \quad (A\cap B)^\circ \subset B^\circ \Leftarrow (A\cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$$

الاتجاه الأخر : نفرض $x\in A^\circ \cap B^\circ \Leftarrow x\in A^\circ \,, x\in B^\circ$

$\Leftarrow$ توجد $r_1>0, r_2>0$ بحيث أن ${}_{r_2}(x)\subseteq B \qquad {}_{r_1}(x)\subseteq A,$

نضع $r=\min\{r_1,r_2\} \quad \Leftarrow \quad {}_r(x)\subseteq B \qquad {}_r(x)\subseteq A, \quad \Leftarrow \quad {}_r(x)\subseteq A\cap B$

$\Leftarrow \quad x\in (A\cap B)^\circ \Leftarrow A^\circ \cap B^\circ \subset (A\cap B)^\circ$ وعليه $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(3)

بما أن $A\subset A\cup B \quad , \quad B\subset A\cup B$

$$\Leftarrow A^\circ \subset (A\cup B)^\circ, B^\circ \subset (A\cup B)^\circ \quad \Leftarrow \quad A^\circ \cup B^\circ \subset (A\cup B)^\circ$$

ملاحظة

ليس بالضروري أن يكون $(A\cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ والمثال الأتي يوضح ذلك **:** ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متريا اعتياديا

ولتكن $A=[0,1]\,, B=[1,2]$ نلاحظ أن : $A^\circ=(0,1)\,, B^\circ=(1,2) \quad \Leftarrow \quad 1\notin A^\circ, 1\notin B^\circ \quad \Leftarrow \quad 1\notin A^\circ \cup B^\circ$

ولكن $A\cup B=[0,2] \quad \Leftarrow \quad (A\cup B)^\circ=(0,2)$ وان $1\in (A\cup B)^\circ$ وعليه $(A\cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$

4.3 المجموعة المشتقة Derived Set

تعريف(1.4.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة غاية (Limit point) أو (نقطة تراكم Accumulation point) أو (نقطة ملاصقة Cluster point) إلى المجموعة A إذا كان لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $y\neq x$ و $d(x,y)<r$. مجموعة كل نقاط الغاية إلى المجموعة A تسمى بمشتقة (Derived) المجموعة A ويرمز لها بالرمز A'.

$$A'=\{x\in X: \ \forall r>0, \exists y\in A \quad \ni \quad y\neq x, \quad d(x,y)<r\}$$

يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة منعزلة (**Isolated Point**) إلى المجموعة A إذا كانت $x\in A$ ، $x\notin A'$ ويقال عن A بأنها مجموعة منعزلة (**Isolated Set**) إذا كان $A\cap A' = ¤$. يقال عن المجموعة A بأنها مجموعة تامة (**Perfect Set**) إذا كانت $A=A'$. ويقال عن المجموعة A بأنها كثيفة بنفسها (**Dense in Itself**) إذا كانت $A\subset A'$.

مبرهنة (2.4.3)

ليكن (X,d)فضاء متريا ، ولتكن $x_0\in X$ $A\subseteq X$

(1) إذا كانت $A=¤$ فان $A'=¤$

(2) إذا كانت $x \in A'$ فان $x \in \left(A \mid \{x\}\right)'$

(3) $x_0 \in A'$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الأتي :-

كل كرة مفتوحة مركزها x_0 تحتوي على عدد غير منته من نقاط A

(4) $d(x_0, A) = 0$ إذا وفقط إذا كانت $x_0 \in A$ أو $x_0 \in A'$

البرهان :

(3) نفرض الشرط متحقق $\Leftarrow$ لكل $r > 0$ فان $B_r(x)$ تحتوي على عدد غير منتهي من نقاط $A \Leftarrow x \in A'$ (حسب التعريف)

الاتجاه المعاكس : سنبرهن بطريقة التناقض . نفرض يوجد $r > 0$ بحيث أن $B_r(x)$ تحتوي على عدد منتهي من نقاط A والتي تختلف عن x ولتكن هذه النقاط هي $x_n, \ldots, x_1$ أي أن $A \cap B_r(x) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

نضع $r_1 > 0 \Leftarrow r_1 = \min\{d(x, x_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ لأنه العنصر الأصغر لمجموعة منتهية من الأعداد الموجبة

$\Leftarrow B_{r_1}(x)$ لا تحتوي أي نقطة من نقاط A تختلف عن $x \Leftarrow x \notin A'$ وهذا تناقض

(4) نفرض $d(x_0, A) = 0$ ولتكن $x_0 \notin A$. يجب أن نبرهن على ان $x_0 \in A'$: ليكن $r > 0$

بما أن $d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, x) : x \in A\} = 0 \Leftarrow$ حسب تعريف (inf) يوجد $y \in A$ ، بحيث أن $d(x_0, y) < 0 + r = r$

بما أن $x_0 \notin A \quad \Leftarrow \quad y \neq x_0$ و عليه $x_o \in A'$

الاتجاه المعاكس : نفرض إن $x_o \in A$ أو $x_o \in A'$ إذا كانت $x_0 \in A \quad \Leftarrow \quad d(x_0, A) = 0$

أما إذا كانت $x_0 \notin A$ و $x_0 \in A' \Leftarrow$ لكل $r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x_0, y) < r$

وعليه لكل $r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $0 \le d(x_0, y) < r$

$\Leftarrow \quad \inf\{d(x_0, x) : x \in A\} = 0 \quad \Leftarrow \quad d(x_0, A) = 0$

مبرهنة(3.4.3)

ليكن (X, d) فضاء متربا ولتكن $A, B \subseteq X$

(1) إذا كانت $A \subseteq B$ فان $A' \subseteq B'$ (2) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$ (3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

البرهان

(1) ليكن $x \in A' \quad \Leftarrow$ لكل $r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x, y) < r$

بما أن $A \subseteq B \quad \Leftarrow \quad y \in B \quad \Leftarrow$ لكل $r > 0$ يوجد $y \in B$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x, y) < r \quad \Leftarrow \quad x \in B'$

وعليه $A' \subseteq B'$

(2) بما أن $A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B \Leftarrow (A \cap B)' \subset A',\ (A \cap B)' \subset B' \quad \Leftarrow \quad (A \cap B)' \subset A' \cap B'$

(3) بما أن $A \subset A \cup B,\ B \subset A \cup B \quad \Leftarrow \quad A' \subset (A \cup B)',\ B' \subset (A \cup B)' \quad \Leftarrow \quad A' \cup B' \subset (A \cup B)'$

الاتجاه الأخر: نفرض $x \notin A' \cup B' \quad \Leftarrow \quad x \notin A',\ x \notin B'$

$\Leftarrow x \notin A'$ يوجد $r_1 > 0$ بحيث لكل $y \in A$ وان $y \neq x$ فان $d(x, y) \ge r_1$

وكذلك $x \notin B \quad \Leftarrow$ يوجد $r_2 > 0$ بحيث لكل $z \in B$ وان $z \neq x$ فان $d(x, z) \ge r_2$

نضع $r = \min\{r_1, r_2\} \quad \Leftarrow$ يوجد $r > 0$ بحيث لكل $w \in A \cup B$ وان $w \neq x$ فان $d(x, w) \ge r$

$\Leftarrow \quad x \notin (A \cup B)'$ وعليه $(A \cup B)' \subset A' \cup B' \quad \Leftarrow \quad (A \cup B)' = A' \cup B'$

ملاحظة

ليس من الضروري أن يكون $(A\cap B)' = A'\cap B'$ والمثال التالي يوضح ذلك **:** ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متريا اعتياديا ولتكن $A=\{\frac{1}{n}:\ \ n\in\mathbb{N}\},\ \ B=\{-\frac{1}{n}:\ \ n\in\mathbb{N}\}$ فان

$A\cap B=$ ¤ $\Leftarrow$ $(A\cap B)'=$ ¤ ولكن $A'=\{0\},\ \ B'=\{0\}$ $\Leftarrow$ $A'\cap B'=\{0\}$

5.3 انغلاق المجموعة Closure of set

تعريف (1.5.3)

ليكن $(X,$²$)$ فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة ملاصقة (Adherent Point) أو نقطة انغلاق (Closure Point) أو نقطة اتصال (Contact point) إلى المجموعة A إذا كان لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $d(x,y)<r$. المجموعة التي ناصرها جميع نقاط الانغلاق للمجموعة A تسمى انغلاق (Closure) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$

$$\overline{A}=\{x\in X:\forall r>0,\exists y\in A\ \ \ni\ \ d(x,y)<r\}$$

وعليه $A\subset\overline{A}$. ومن التعريف مباشرة نستنتج.

(1) $\overline{A}$ مجموعة مغلقة في X . (2) A مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كان $\overline{A}=A$. (3) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

(4) $\overline{A}$ تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة في X والتي تحتوي على A ، أي أن

$$\overline{A}=\cap\{F\subseteq X: A\subset F \quad \text{بحيث} \quad X \quad \text{مجموعة مغلقة في} \quad F\ \}$$

وعليه $\overline{A}$ تكون اصغر مجموعة مغلقة في X وتحتوي على A .

مثال (2.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا مبعثرا ولتكن $A\subseteq X$. جد $\overline{A}$.

الحل:

بما أن (X,d) فضاء متريا مبعثر $\Leftarrow$ A مغلقة $\Leftarrow$ $\overline{A}=A$.

مثال (3.5.3)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متربا اعتياديا ولتكن $A\subseteq R$

(1) إذا كانت $A=(a,b)$ فان $\overline{A}=[a,b]$ (2) إذا كانت $A=(a,b]$ فان $\overline{A}=[a,b]$

(3) إذا كانت $A=[a,b)$ فان $\overline{A}=[a,b]$ (4) إذا كانت $A=[a,b]$ فان $\overline{A}=[a,b]$

(5) إذا كانت $A=\mathbb{N}$ فان $\overline{A}=\mathbb{N}$ حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية.

(6) إذا كانت $A=\mathbb{Z}$ فان $\overline{A}=\mathbb{Z}$ حيث $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة.

(7) إذا كانت $A=\mathbb{Q}$ فان $\overline{A}=\mathbb{R}$ ،حيث $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبية

(8) إذا كانت $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$ فان $\overline{A}=A\cup\{0\}$ (9) $A=\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ldots\}$ فان $\overline{A}=A\cup\{1\}$.

مبرهنة (4.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A,B\subseteq X$.

(1) إذا كانت $A\subset B$ فان $\overline{A}\subset\overline{B}$. (2) $\overline{(A\cap B)}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ (3) $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

البرهان :

(1) ليكن $x\in\overline{A}$ $\Leftarrow$ لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $d(x,y)<r$

بما أن $A\subset B$ $\Leftarrow$ $y\in B$ $\Leftarrow$ لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $d(x,y)<r$ $\Leftarrow$ $x\in\overline{B}$ وعليه $\overline{A}\subset\overline{B}$.

برهان آخر

بما ن $A\subset B$, $B\subset\overline{B}$ $\Leftarrow$ $A\subset\overline{B}$ ، $\overline{B}$ مجموعة مغلقة وتحتوي على A .

ولكن $\overline{A}$ اصغر مجموعة مغلقة تحتوي على A $\Leftarrow$ $\overline{A}\subset\overline{B}$.

بما أن $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$ $\Leftarrow$ $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}$, $\overline{A\cap B}\subset\overline{B}$ $\Leftarrow$ $\overline{A\cap B}\subset\overline{A\cap B}$

(2) بما أن $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$

$\Leftarrow$ $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$, $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\cup\overline{B}\subset(\overline{A\cup B})$

بما أن كل من $\overline{A},\overline{B}$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ $\overline{A}\cup\overline{B}$ مجموعة مغلقة

وكذلك بما أن $A\subset\overline{A}, B\subset\overline{B}$ $\Leftarrow$ $A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\cup\overline{B}$ مجموعة مغلقة وتحتوي على $A\cup B$

ولكن $\overline{(A\cup B)}$ أصغر مجموعة مغلقة وتحتوي على $A\cup B$

$\overline{(A\cup B)}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$ وعليه $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

ملاحظــــة

ليس من الضروري أن يكون $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ والمثال الأتي يوضح ذلك : ليكن (R,d_u) فضاء متريا اعتياديا

ولتكن $A=(0,1), B=(1,2)$ $\Leftarrow$ $\overline{A}=[0,1]$, $\overline{B}=[1,2]$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1\}$

ولكن $A\cap B=\emptyset$ $\Leftarrow$ $\overline{A\cap B}=\emptyset$ وعليه $\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$

مبرهنة (5.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$.

(1) $A'\subset\overline{A}$ (2) $\overline{A}=A\bigcup A'$ (3) إذا كانت $A'=\emptyset$ فان المجموعة A تكون مغلقة في X .

(4) المجموعة A تكون مغلقة في X إذا وفقط إذا كانت $A'\subset A$ (5) $\overline{A}=\{x\in X : d(x,A)=0\}$

البرهان:

(1) لتكن $x\in A'$ $\Leftarrow$ لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $y\neq x$ و $d(x,y)<r$

$\Leftarrow$ لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $y\neq x$ و $d(x,y)<r$ $\Leftarrow$ $x\in\overline{A}$ $\Leftarrow$ $A'\subset\overline{A}$

(2) بما أن $A'\subset\overline{A}$ $\Leftarrow$ $A\cup A'\subset A\cup\overline{A}$ ولكن $A\cup\overline{A}=\overline{A}$ لأن $A\subset\overline{A}$ $\Leftarrow$ $A\cup A'\subset\overline{A}$

الاتجاه الآخر: نفرض $x\in\overline{A}$ هناك احتمالان

(ا) إذا كان $x\in A$ $\Leftarrow$ $x\in A\cup A'$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\subset A\cup\overline{A}$

(ب) إذا كانت $x\notin A$

بما أن $x\in\overline{A}$ $\Leftarrow$ لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $d(x,y)<r$

بما أن $x\notin A$ $\Leftarrow$ $y\neq x$ $\Leftarrow$ $x\in A'$ $\Leftarrow$ $x\in A\cup A'$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\subset A\cup A$ وعليه $\overline{A}=A\cup A'$

(3) بما أن $\overline{A}=A\cup A'$ $\Leftarrow$ $\overline{A}=A\cup\emptyset=A$ $\Leftarrow$ A مغلقة

(4) لتكن A مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ $\overline{A}=A$ ، بما أن $A'\subset\overline{A}$ $\Leftarrow$ $A'\subset A$

الاتجاه الأخر : نفرض $A'\subset A$ $\Leftarrow$ $A\cup A'=A$

بما أن $\overline{A}=A\cup A'$ $\Leftarrow$ $\overline{A}=A$ $\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة.

(5) بما أن $\overline{A}=A\cup A'$ $\Leftarrow$ $x\in\overline{A}$ إذا وفقط إذا كان $d(x,A)=0$ $\Leftarrow$ $\overline{A}=\{x\in X : d(x,A)=0\}$

تعريف (6.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا وليكن $A,B\subseteq X$. يقال عن المجموعة A بأنها كثيفة (Dense) في B إذا كان $B\subset\overline{A}$.
وبصورة خاصة يقال عن المجموعة A بأنها كثيفة في X (أو تسمى أحيانا Every Where Dense) إذا كانت $\overline{A}=X$.

تعريف (7.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن المجموعة A بأنها متناثرة (Nowhere Dense) **(أو** تسمى مجموعة مخلخلة Rare set) **في** X **إذا كان** $\left(\overline{A}\right)^{\circ}=\emptyset$. يقال عن المجموعة A بأنها نحيلة (Meager) **(أو** مجموعة واهنة First Category set) إذا كانت A تساوي اتحاد عائلة قابلة للعد من المجموعات المتناثرة في X ، بعبارة أخرى إذا كانت $A=\cup A_{\S}$ **حيث** $\{A_{\S}\}$ عائلة قابلة للعد من المجموعات المتناثرة في X **.** ويقال عن المجموعة A بأنها غير نحيلة (Non meager) **(أو** مجموعة متينة Second Category set) **إذا لم تكن** A واهنــة .

مثال (8.5.3)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي ولتكن $A=\left\{\frac{1}{n}:n\in N\right\}$ نلاحظ على أن $\overline{A}=A\cup\{0\}\Leftarrow\emptyset=\left(\overline{A}\right)^{\circ}\Leftarrow A$ متناثرة .

تعريف(9.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة حدودية (Boundary point) أو (نقطة جبهوية **Frontier Point**) إلى المجموعة A إذا كان لكل $r>0$ يوجد $y\in A,\ z\in A^{c}$ بحيث أن $d(x,y)<r,\ d(x,z)<r$.
مجموعة كل النقاط الحدودية إلى المجموعة A تسمى جبهة(**Frontier**) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\partial(A)$ ، أي أن

$$\partial(A)=\{x\in X:\forall r>0,\ y\in A,\ z\in A^{c}\ \ni\ d(x,y)<r,\ d(x,z)<r\}$$

مبرهنة (10.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$

(1) $\partial(A)=\overline{A}\cap\left(\overline{A^{c}}\right)$ وعليه $\partial(A)\subset\overline{A}$ (2) $\partial(A)=\partial(A^{c})$

(3) $\partial(A)$ مجموعة مغلقة في X (4) $A^{\circ}=A\,|\,\partial(A)$ (5) $\overline{A}=A\cup\partial(A)$

البرهان

(1) نفرض أن $x\in\partial(A)$ $\Leftarrow$ لكل مجموعة مفتوحة G في X وتحتوي على x فان $G\cap A^{c}\neq\emptyset,\ G\cap A\neq\emptyset$

$$\Leftarrow\ x\in\overline{A}\ ,\ x\in\overline{A^{c}}\ \Leftarrow x\in\overline{A}\cap\left(\overline{A^{c}}\right)\Leftarrow\partial(A)\subseteq\overline{A}\cap\left(\overline{A^{c}}\right)$$

وبالمثل نبرهن $\overline{A}\cap\left(\overline{A^{c}}\right)\subseteq\partial(A)\ \Leftarrow\ \partial(A)=\overline{A}\cap\left(\overline{A^{c}}\right)$

(2) $\partial(A)=\overline{A}\cap\left(\overline{A^{c}}\right)=\left(\overline{A^{c}}\right)\cap\overline{A}=\partial(A^{c})$

(3) بما أن كل من $\overline{A},\left(\overline{A^{c}}\right)$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ $\partial(A)=\overline{A}\cap\left(\overline{A^{c}}\right)$

(4) ليكن $x\in A^{\circ}$. بما أن $A^{\circ}\subset A\ \Leftarrow\ x\in A$

بما أن A° مجموعة مفتوحة في X وتحتوي على x وان $A^{\circ}\cap A^{c}=\emptyset$

$\Leftarrow\ x\notin\partial(A)$ وعليه $x\in A\,|\,\partial(A)\Leftarrow A^{\circ}\subset A\,|\,\partial(A)$

والاتجاه الأخر : نفرض $y\in A\,|\,\partial(A)\ \Leftarrow\ y\in A,\ y\notin\partial(A)$

بما أن $y\notin\partial(A)\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي على x فانه أما $G\cap A=\emptyset$ أو $G\cap A^{c}=\emptyset$

بما أن $y\in G,y\in A\Leftarrow y\in G\cap A\Leftarrow G\cap A\neq\emptyset$

$$y \in A^\circ \Leftarrow y \in G \subset A \Leftarrow G \subset A \Leftarrow G \cap A^c = \varnothing \Leftarrow$$

$$A^\circ = A|\partial(A) \text{ وعليه } A|\partial(A) \subset A^\circ \Leftarrow$$

(5) بما أن $\partial(A) \subseteq \overline{A}$, $A \subseteq \overline{A} \Leftarrow A \cup \partial(A) \subseteq \overline{A}$: ليكن $x \in \overline{A}$ هنالك احتمالان

(ا) إذا كان $x \in A$ فان $x \in A \cup \partial(A)$ $\Leftarrow \overline{A} \subseteq A \cup \partial(A)$

(ب) إذا كان $x \notin A \Leftarrow x \in A^c \Leftarrow x \in \left(\overline{A^c}\right) \Leftarrow x \in \overline{A} \cap \left(\overline{A^c}\right)$

ولكن $\partial(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{A^c}\right) \Leftarrow x \in \partial(A) \Leftarrow x \in A \cup \partial(A) \Leftarrow \overline{A} \subset A \cup \partial(A)$ وعليه $\overline{A} = A \cup \partial(A)$

مثال(11.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا مبعثرا ولتكن $A \subseteq X$. جد $\partial(A)$

الحل:

بما أن A مجموعة مغلقة $\Leftarrow \overline{A} = A$ وكذلك A^c مغلقة $\Leftarrow \left(\overline{A^c}\right) = A^c \Leftarrow \partial(A) = \overline{A} \cap \left(\overline{A^c}\right) = A \cap A^c = \varnothing$

مبرهنة(12.5.3)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A, B \subseteq X$

(1) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$ (2) $\partial(A \cap B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$

البرهان

(1)

$$\partial(A \cup B) = \left(\overline{A \cup B}\right) \cap \left[\overline{(A \cup B)^c}\right] = \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A^c \cap B^c}\right)$$

$$\subseteq \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A^c} \cap \overline{B^c}\right) = \left[\overline{A} \cap \left(\overline{A^c} \cap \overline{B^c}\right)\right] \cup \left[\overline{B} \cap \left(\overline{A^c} \cap \overline{B^c}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\overline{A} \cap \overline{A^c}\right) \cap \overline{B^c}\right] \cup \left[\left(\overline{B} \cap \overline{B^c}\right) \cap \overline{A^c}\right] = \left[\partial(A) \cap \left(\overline{B^c}\right)\right] \cup \left[\partial(B) \cap \left(\overline{A^c}\right)\right] \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$$

$$\partial(A \cap B) = \left(\overline{A \cap B}\right) \cap \left[\overline{(A \cap B)^c}\right] \subseteq \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A^c \cup B^c}\right)$$

(2)

$$= \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \left(\left(\overline{A^c}\right) \cup \left(\overline{B^c}\right)\right) = \left[\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A^c}\right)\right] \cup \left[\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{B^c}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\overline{A} \cap \left(\overline{A^c}\right)\right) \cap \overline{B}\right] \cup \left[\overline{A} \cap \left(\overline{B} \cap \left(\overline{B^c}\right)\right)\right] = \left(\partial(A) \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \partial(B)\right) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$$

4. التقارب في الفضاءات المترية Convergence in Metric Spaces

ان مفهوم التقارب للمتتابعات يلعب دورا كبيرا في البناء الرياضي والتطبيقات وسوف نتعرض إلى تعريف المتتابعات، المتتابعات الحقيقية، التقارب في الفضاءات المترية، بعض المتتابعات الحقيقية، المتتابعات الجزئية، متتابعات كوشي والفضاءات المترية الكاملة، مبرهنة النقطة الصامدة.

1.4 المتتابعات Sequences

تعريف (1.1.4)

لتكن X مجموعة غير خالية. الدالة التي منطلقها مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومستقرها المجموعة X تسمى متتابعة **(Sequence)** في X. إذا كانت f متتابعة في X ، أي أن $f:\mathbb{N}\to X$ دالة، ومن تعريف الدالة نحصل على أن لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد عنصر واحد فقط $x_n\in X$ بحيث $f(n)=x_n$. لاحظ أن العناصر x_n تحدد الدالة f بصورة كاملة ولذلك سنرمز للدالة f بالرمز $\{x_n\}$ ويسمى x_n بالحد العام للمتتابعة أو الحد النوني أو الحد ذي الرتبة n للمتتابعة .

المدى للمتتابعة $\{x_n\}$ هي المجموعة $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ ولذا يجب التمييز بين المتتابعة $\{x_n\}$ وبين المدى لها.

مثلاً : إذا كانت $\{x_n\}$ متتابعة معرفة في $\mathbb{R}$ ، حيث $x_n=(-1)^n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فأن $\{x_n\}=\{(-1)^n\}=\{1,-1,1,-1,\cdots\}$ ، إما المدى يمثل المجموعة $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}=\{-1,1\}$

تعريف(2.1.4)

لتكن كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ متتابعة في المجموعة X يقال عن $\{y_n\}$ بأنها متتابعة جزئية **(Subsequence)** من المتتابعة $\{x_n\}$ إذا وجدت الدالة $¨ : N\to N$ بحيث أن

(1) $y_n = x_n \circ ¨$ (2) لكل $n\in\mathbb{N}$ يوجد $k\in N$ بحيث أن $¨(m)\geq n$ لكل $m\geq k$

بعبارة أخرى إذا كانت $\{x_n\}$ متتابعة في X وكانت $\{i_n\}$ متتابعة في $\mathbb{N}$ بحيث أن $i_n < i_{n+1}$ لكل $n\in\mathbb{N}$ فان $\{x_{i_n}\}$ تسمى متتابعة جزئية للمتتابعة $\{x_n\}$.

مثال(3.1.4)

لتكن $x_n=\frac{1}{n}, \pm_n=\frac{1}{2n-1}$ ،نلاحظ أن $\{\sigma_n\}$ متتابعة جزئية من المتتابعة $\{x_n\}$ لان إذا عرفنا الدالة $\Psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ بالشكل $\Psi(n)=2n-1$

$$\pm_n = x_n\circ\Psi = x_n(\Psi)=\frac{1}{2n-1}$$

وعليه فأن $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$ تكون متتابعة جزئية من المتتابعة $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

ملاحظة

إذا كانت $\{y_n\}$ متتابعة جزئية من المتتابعة $\{x_n\}$ و $\{z_n\}$ متتابعة جزئية من $\{y_n\}$ فان $\{z_n\}$ متتابعة جزئية من $\{x_n\}$.

المتتابعات الحقيقية Real Sequences

سبق وان عرفنا المتتابعة $\{x_n\}$ في ألمجموعه X على أنها داله من مجموعة الإعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ إلى المجموعة X. ويقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متتابعة حقيقية إذا كانت $X=\mathbb{R}$.

تعريف (4.1.4)

المتوالية العددية (Arithmetic Progression) هي المتتابعة التي يكون ناتج طرح كل حد فيها من الحد الذي سبقه مباشرة يساوي عدداً ثابتاً يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز d . وبالتالي فأنه يكفي تعيين متوالية عددية من معرفة حدها الأول وأساسها وذلك بإضافة الأساس على الحد الأول نحصل على الحد الثاني وبإضافة الأساس على الحد الثاني نحصل على الحد الثالث وهكذا ...

مثلاً : المتوالية العددية التي حدها الأول a وأساسها d هي : $\{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d, \cdots\}$

الحد العام (الحد النوني) للمتوالية العددية $\{x_n\}$ هو $x_n = a+(n-1)d$ حيث a يمثل الحد الأول ، d يمثل الأساس ، وأن المجموع الجزئي النوني هو

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (a+(k-1)d) = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

تعريف (5.1.4)

المتوالية الهندسية (Geometric Progression) هي المتتابعة التي يكون خارج قسمة كل حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عدداً ثابتاً يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز r . وبالتالي فأنه يكفي لتعيين المتوالية الهندسية معرفة حدها الأول وأساسها وذلك بضرب الحد الأول في الأساس ينتج الحد الثاني وبضرب الحد الثاني في الأساس ينتج الحد الثالث وهكذا ...

مثال(6.1.4)

المتوالية الهندسية التي حدها الأول a وأساسها r هي : $\{r, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, \cdots\}$ ، الحد العام (الحد النوني) للمتوالية الهندسية $\{x_n\}$ هو $x_n = ar^{n-1}$ حيث a يمثل الحد الأول ، r يمثل الأساس . وأن المجموع الجزئي النوني هو

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

أما إذا كان $r=1$ فأن $S_n = a+a+\cdots+a = na$. وفي حالة $|r|<1$ فأن $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

والمتوالية العددية الهندسية (Arithmetic-Geometric Progression) هي

$\{a, (a+d)r, (a+2d)r^2, \cdots, (a+(n-1)d)r^{n-1}, \cdots\}$

والحد العام (الحد النوني) لها هو $x_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$ ، وأن المجموع الجزئي النوني هو

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (a+(k-1)d)r^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + \frac{rd(1-nr^{n-1}+(n-1)r^n)}{(1-r)^2}, \quad r \neq 1$$

أذا كان $|r|<1$ فأن $\sum_{n=1}^{\infty} (a+(n-1)d)r^{n-1} = \frac{a}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2}$.

تعريف (7.1.4)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية. يقال عن $\{x_n\}$ بأنها

(1) مقيده من الأعلى (bounded above) إذا وجد عدد حقيقي M_1 بحيث إن $x_n \le M_1$ لكل قيم n .

(2) مقيده من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي M_2 بحيث إن $M_2 \le x_n$ لكل قيم n .

(3) مقيده (Bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|x_n| \le M$ لكل قيم n .

مثال (8.1.4)

(1) المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}$ مقيدة : لأنه $\left|\frac{1}{2}\right| < 2$ لكل قيم n .

(2) المتتابعة $\{\frac{n}{n+1}\}$ مقيدة : لأنه $\frac{n}{n+1} < 1$ لكل قيم n .

(3) المتتابعة $\{(-1)^n\}$ مقيدة : لأنه $|(-1)^n| \le 1$ لكل قيم n .

(4) المتتابعة $\{n\}$ غير مقيدة : لأنه لو فرضنا هذه المتتابعة مقيدة $\Leftarrow$ يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|n| \le M$ لكل قيم n . وهذا يناقض خاصية ارخميدس.لأنه يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $n > M$.

(5) المتتابعة $\{3^n\}$ غير مقيدة :

2.4 التقارب Convergence

تعريف (1.2.4)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة في المجموعة المرتبة جزئيا X .يقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متزايدة **(Increasing)** أذا كان $x_n \le x_{n+1}$ لكل قيم n. ويقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متناقصة (Decreasing) أذا كان $x_{n+1} \le x_n$ لكل قيم n وتسمى المتتابعة رتيبه **(Monotone)** أذا كانت متزايدة آو متناقصة .

مثال (2.2.4)

(1) المتتابعة $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ متناقصة $\Leftarrow$ رتيبه (2) المتتابعة $\{\frac{n}{n+1}\}$ متزايدة $\Leftarrow$ رتيبه (3) المتتابعة $\{(-1)^n\}$ ليست رتيبه

ملاحظة

يستخدم الرمز $x_n \uparrow$ أذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ متزايدة والرمز $x_n \uparrow x$ أذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ متزايدة وان $x = \sup\limits_{n\in N} x_n$ وكذلك يستخدم الرمز $x_n \downarrow$ أذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ متناقصة والرمز $x_n \downarrow x$ أذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ متناقصة وان $x = \inf\limits_{n\in N} x_n$.

تعريف (3.2.4)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة في المجموعة المرتبة جزئيا X .يقال عن المتتابعة بأنها $\{x_n\}$ متقاربة **(Converges)** إلى $x \in X$ أذا وجدت المتتابعتين $\{a_n\},\{b_n\}$ في X بحيث أن

(1) $a_n \le x_n \le b_n$ لكل قيم n (2) $a_n \uparrow x, \quad b_n \downarrow x,$

وان x تسمى نقطة التقارب ويكتب $(0)\lim x_n = x$ أو $x_n \xrightarrow{0} x$

تعريف (4.2.4)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة في المجموعة المرتبة جزئيا X .الغاية السفلى **(Inferior limit)** للمتتابعة $\{x_n\}$ يرمز لها بالرمز $\underline{\lim}\, x_n$ آو الرمز $\liminf x_n$ وتعرف بالشكل $\underline{\lim}\, x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{\inf\{x_k : k \ge n\} : n \ge 1\}$ يشترط أن الطرف الأيمن موجود .وكذلك الغاية العليا **(Superior limit)** للمتتابعة $\{x_n\}$ يرمز لها بالرمز $\overline{\lim}\, x_n$ أو الرمز $\limsup x_n$ وتعرف بالشكل $\overline{\lim}\, x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{\sup\{x_k : k \ge n\} : n \ge 1\}$ بشرط أن الطرف الأيمن موجود. إذا كانت كل من $\underline{\lim}\, x_n, \overline{\lim}\, x_n$ موجود وان $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x$ فان $x_n \xrightarrow{0} x$.

ملاحظة

أذا كانت $A=\{x\in X:\exists\{x_{i_n}\}\subseteq\{x_n\}\ni x_{i_n}\to x\}$ ، أي أن A تمثل مجموعة نقاط تقارب جميع المتتابعات الجزئية من المتتابعة $\{x_n\}$ ، فان $\underline{\lim}\ x_n=\inf\ A$ ، $\overline{\lim}\ x_n=\sup A$

التقارب في الفضاءات المترية Convergence in Metric spaces

تعريف (5.2.4)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة في الفضاء المتري (X,d). يقال عن $\{x_n\}$ بأنها

(1) متقاربة (**Convergent**) في X إذا وجد $x\in X$ بحيث أن، لكل $£>0$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث :

$$d(x_n,x)<£ \quad \text{لكل} \quad n>k$$

ويقال أن النقطة x هي نقطة تقارب للمتتابعة $\{x_n\}$ وتكتب بالشكل $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ أو $x_n\to x$ عندما $n\to\infty$

وهذا يعني أن : $x_n\to x \Leftrightarrow d(x_n,x)\to 0$ عندما $n\to\infty$

إذا كانت $\{x_n\}$ غير متقاربة تسمى متباعدة (**Divergent**). نقطة التقارب للمتتابعة الجزئية $\{x_{n_k}\}$ من المتتابعة $\{x_n\}$ تسمى نقطة تقارب تتابعي جزئيه (Subsequential limit point) للمتتابعة $\{x_n\}$. وبصورة خاصة إذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ حقيقية (في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$) فإنها تكون متقاربة إذا وجد $x\in\mathbb{R}$ يحقق الشرط الأتي : لكل $£>0$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|x_n-x|<£$ لكل $n>k$ ، ويمكن صياغة التعريف هندسيا كالأتي :

$$|x_n-x|<£ \ \text{لكل}\ n>k \quad\Leftarrow\quad -£<x_n-x<£ \ \text{لكل}\ n>k \quad\Leftarrow\quad x-£<x_n<x+£ \ \text{لكل}\ n>k$$

$\Leftarrow \quad x_n\in(x-£,x+£)$ لكل $n>k$. وهذا يعني أن المتتابعة $\{x_n\}$ تكون متقاربة في R إذا وجد $x\in\mathbb{R}$ بحيث أن لكل $£>0$ الفترة المفتوحة $(x-£,x+£)$ مركزها x تحتوي على معظم حدود المتتابعة.

(2) متتابعة كوشي (Cauchy sequence) في X إذا كان لكل $£>0$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $d(x_n,x_m)<£$ لكل $n,m>k$ وعليه المتتابعة $\{x_n\}$ تكون متتابعة كوشي إذا وفقط إذا كان $d(x_n,x_m)\to 0$ عندما $n,m\to\infty$

وبصورة خاصة إذا كانت المتتابعة $\{x_n\}$ حقيقية (في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$) فإنها تكون متتابعة كوشي (أو تسمى متتابعة أساسية) إذا كان لكل $£>0$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|x_n-x_m|<£$ لكل $n,m>k$

وعليه المتتابعة الحقيقية $\{x_n\}$ متتابعة كوشي إذا وفقط إذا كان $|x_n-x_m|\to 0$ عندما $n,m\to\infty$

مبرهنة (6.2.4)

في الفضاء المتري (X,d)

(1) كل متتابعة $\{x_n\}$ متقاربة لها نقطة تقارب وحيدة

(2) كل متتابعة متقاربة تكون متتابعة كوشي والعكس غير صحيح دائما.

البرهان :

(1) نفرض $x_n\to x$ ، $x_n\to y$ بحيث أن $x\neq y$: وليكن $d(x,y)=£ \Leftarrow £>0$

بما أن $x_n\to x \Leftarrow$ يوجد $k_1\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $d(x_n,x)<\frac{£}{2}$ لكل $n>k_1$

وكذلك $x_n\to y$ يوجد $k_2\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $d(x_n,y)<\frac{£}{2}$ لكل $n>k_2$

نضع $k=\max\{k_1,k_2\}$ ، فيكون $d(x_n,y)<\frac{£}{2},\quad d(x_n,x)<\frac{£}{2}$ لكل $n>k$

$$£=d(x,y)\le d(x_n,x)+d(x_n,y)<\frac{£}{2}+\frac{£}{2}=£$$

وهذا تناقض وعليه فأن $x=y$.

(2) لتكن $\{x_n\}$ متتابعة متقاربة في الفضاء المتري (X,d) $\Leftarrow$ يوجد $x\in X$ بحيث أن $x_n\to x$ ،

ليكن $£>0$. بما أن $x_n\to x$ $\Leftarrow$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $d(x_n,x)<\frac{£}{2}$ لكل $n>k$

إذا كان $n,m>k$ ، فأن $d(x_n,x)<\frac{£}{2},\quad d(x_m,x)<\frac{£}{2}$

$$d(x_n,x_m)\le d(x_n,x)+d(x_m,x)<\frac{£}{2}+\frac{£}{2}=£$$

وعليه فأن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في X .

والمثال التالي يوضح العكس غير صحيح دائما .

مثال (7.2.4)

ليكن $X=\mathbb{R}\,|\,\{0\}$ ولتكن الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $d(x,y)=|x-y|$

ولتكن $x_n=\frac{1}{n}$. لاحظ أن (X,d) فضاء مترياً وان $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في X ولكنهما غير متقاربة في X .

مثال (8.2.4)

(1) المتتابعة $\{x\}$ في الفضاء المتري (X,d) تكون متقاربة إلى x : لأنه لكل $£>0$ فان $d(x,x)=0<£$

(2) المتتابعة $\{\frac{1}{n}\}$ في الفضاء المتري $(\mathbb{R},d_u)$ تكون متقاربة ونقطة تقاربها الصفر : لأنه لكل $£>0$ (حسب خاصية أرخميدس) يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $\frac{1}{k}<£$ وعلية لكل $n>k$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n}<\frac{1}{k}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n}<£$

وبذلك $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<£$ لكل $n>k$

(3) المتتابعة $\{n\}$ (أي أن $x_n=n$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$) متباعدة : لأنه لو فرضنا تلك المتتابعة متقاربة $\Leftarrow$ يوجد $x\in\mathbb{R}$ بحيث أن $x_n\to x$ وعليه لكل $£>0$ فان الفترة المفتوحة $(x-£,x+£)$ تحتوي على معظم حدود المتتابعة

بما أن $x+£\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ يوجد (حسب خاصية أرخميدس) $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $x+£<k$

وبما أن $\cdots<x+£<k<k+1$ $\Leftarrow$ $k,k+1,k+2\notin(x-£,x+£)$

أي أن $(x-£,x+£)$ لا تحتوي على معظم حدود المتتابعة. وهذا تناقض.

(4) المتتابعة $\{x_n\}$ في الفضاء المتري $(\mathbb{R},d_u)$ بحيث أن

$$x_n=\begin{cases} n, & n\le 10^6 \\ 1, & n>10^8\end{cases}$$

متقاربة وتقترب إلى الواحد : لأنه لكل $£>0$ ، نأخذ $k>10^6$

لكل $n>k$ $\Leftarrow$ $x_n=1$ وعلية $|x_n-1|=0<\varepsilon$ وبذلك $x_n\to 1$.

(5) المتتابعة $\{(-1)^n\}$ متباعدة : لأنه لو فرضنا تلك المتتابعة

متقاربة $\Leftarrow$ يوجد $x\in\mathbb{R}$ بحيث أن $x_n=(-1)^n\to x$

ليكن $\varepsilon>0$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|x_n-x|<\varepsilon$ لكل $n>k$

$\Leftarrow$ $|(-1)^n-x|<\varepsilon$ لكل $n>k$ $\Leftarrow$ $x-\varepsilon<(-1)^n<x+\varepsilon$ لكل $n>k$

$\Leftarrow$ $(-1)^n\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ لكل $n>k$

لو فرضنا $x=1$. نأخذ $\varepsilon=\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ $\varepsilon>0$. $\Leftarrow$ $(-1)^n\in(1-\frac{1}{4},1+\frac{1}{4})$ لكل n عدد زوجي بينما $(-1)^n\notin(1-\frac{1}{4},1+\frac{1}{4})$ لكل n عدد فردي ، وهذا يعني أن الفترة $(1-\frac{1}{4},1+\frac{1}{4})$ لا تحتوي على معظم حدود المتتابعة وعلية المتتابعة لايمكن أن تقترب إلى 1 وبالمثل نبرهن على لا تقترب إلى -1 .

الآن : نفرض $x\neq 1$ وكذلك $x\neq -1$

ليكن $a_1=|1-x|$ و $a_2=|-1-x|$. نأخذ ε بحيث $\varepsilon<a_1$ و $\varepsilon<a_2$

نستنتج أن الفترة المفتوحة $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ لا تحتوي على أي حد من حدود المتتابعة $\{(-1)^n\}$ وعلية فان المتتابعة لايمكن أن تقترب إلى x .

مبرهنة (9.2.4)

كل متتابعة كوشي الحقيقية تكون مقيده.

البرهان:

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي : يجب أن نبرهن : المتتابعة $\{x_n\}$ مقيدة

ليكن $\varepsilon=1$

بما أن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي $\Leftarrow$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|x_n-x_m|<1$ لكل $n,m>k$

ليكن $m=k+1$ $\Leftarrow$ $\|x_n-x_{n+1}\|<1$ لكل $n>k$

بما أن $|x_n|-|x_{k+1}|\le|x_n-x_{k+1}|$ $\Leftarrow$ $|x_n|-|x_{k+1}|<1$ لكل $n>k$ وعليه $|x_n|<1+|x_{k+1}|$ لكل $n>k$

نضع $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_k|,|x_{k+1}|+1\}$ $\Leftarrow$ $|x_n|\le M$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$ وعليه المتتابعة $\{x_n\}$ مقيدة

نتيجة(10.2.4)

إذا كانت المتتابعة الحقيقية متقاربة فإنها مقيدة ولكن العكس ليس صحيحا دائما والمثال التالي يوضح ذلك :

المتتابعة $\{(-1)^n\}$ مقيدة ولكنها ليست متقاربة

مبرهنة (11.2.4)

(1) كل متتابعة حقيقية مقيده ورتيبة تكون متقاربة. (2) كل متتابعة حقيقية مقيده تحتوي على متتابعة جزئيه متقاربة.

البرهان:

(1)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية مقيدة وغير متناقصة

بما أن $\{x_n\}$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد عدد صحيح موجب M بحيث أن $|x_n|\le M$ لكل قيم n

نضع $A=\{x_n:n\in\mathbb{Z}^+\}$ $\Leftarrow$ $A\neq\emptyset$

بما آن $x_n \le M$ لكل n $\Leftarrow$ M قيد أعلى للمجوعة A $\Leftarrow$ A مجموعة مقيدة من الأعلى.

بما أن $A \subseteq \mathbb{R}$ (حسب خاصية الكمال للأعداد الحقيقية) يوجد $x \in R$ بحيث أن $\sup A = x$.

الآن: يجب أن نبرهن على أن : $x_n \to x$: ليكن $£ > 0$ $\Leftarrow$ $x - £ < x$

بما أن x اصغر قيد أعلى $\Leftarrow$ $x - £$ ليس قيد أعلى للمجوعة A $\Leftarrow$ يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $x - £ < x_k$

بما أن المتتابعة $\{x_n\}$ غير متناقصة $x_n \le x_{n+1}$ لكل قيم n

$\Leftarrow$ $x - £ < x_k \le x_{k+1}$ $\Leftarrow$ $x - £ \le x_n$ لكل قيم n

بما أن $x_n \le x$ لان x قيد أعلى للمجوعة A $\Leftarrow$ $x_n \le x < x + £$ $\Leftarrow$ $x - £ < x_n < x + £$ لكل $n > k$

$|x_n - x| < £$ لكل $n > k$ $\Leftarrow$ $x_n \to x$

(2)

يترك للقارئ

مبرهنة (12.2.4) (بعض المتتابعات الحقيقية الخاصة)

(1) إذا كان $P > 0$ فأن $x_n = \frac{1}{n^P} \to 0$ (2) إذا كان $P > 0$ فأن $\sqrt[n]{P} \to 1$ $x_n = P^{\frac{1}{n}}$

(3) $\sqrt[n]{n} \to 1$ $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ (4) إذا كانت $|a| < 1$ فأن $x_n = a^n \to 0$

(5) إذا كانت $a = 1$ فأن $x_n = a^n \to 1$ في الواقع $a^n = 1^n = 1$

(6) إذا كانت $\sim \in R, P > 0$ فأن $x_n = \frac{n^{\sim}}{(1+P)^n} \to 0$ -

(7) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \to e$ حيث $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

البرهان :

(1) ليكن $£ > 0$ ، نأخذ $k > (\frac{1}{£})^{\frac{1}{p}}$

لكل $n > k$ $\Leftarrow$ $n > (\frac{1}{£})^{\frac{1}{p}}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n^p} < £$ $\Leftarrow$ $\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < £$

(2)

(ا) إذا كان $P > 1$ $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{p} > 1$: نضع $y_n = \sqrt[n]{p} - 1$ $\Leftarrow$ $y_n > 0$

$\sqrt[n]{p} = 1 + y_n$ $\Leftarrow$ $p = (1 + y_n)^n = 1 + ny_n + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 + \cdots + y_n^2$

بما أن $y_n > 0$ لكل n

$p \ge 1 + ny_n$ $\Leftarrow$ $\frac{p-1}{n} \ge y_n$ $\Leftarrow$ $0 < y_n \le \frac{p-1}{n}$ $\Leftarrow$ $y_n \to 0$ $\Leftarrow$ $x_n \to 1$

(ب) إذا كان $P = 1$ $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{p} = 1$ لكل قيم n $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{p} \to 1$

(ج) إذا كان $0<P<1$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{p}>1$: نضع $ª=\frac{1}{p}$ $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{p}=\frac{1}{\sqrt[n]{ª}}$, $\sqrt[n]{ª}\to 1$ لان $ª>1$

$\Leftarrow$ $\sqrt[n]{p}\to 1$

(3)

ليكن $y_n=\sqrt[n]{n}-1$. بما أن $\sqrt[n]{n}>1$ لكل n $\Leftarrow$ $y_n>0$ لكل قيم n

$$n=(1+y_n)^n=1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2+\cdots+y_n^2 \Leftarrow \sqrt[n]{n}=1+y_n$$

$$y_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}} \Leftarrow |y_n|<\sqrt{\frac{2}{n-1}} \Leftarrow y_n^2<\frac{2}{n-1} \Leftarrow n>\frac{n(n-2)}{2}y_n^2$$ لكل $n\geq 2$

$$x_n\to 1 \Leftarrow y_n\to 0 \Leftarrow$$

(4)

يجبان نبرهن أن لكل $£>0$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|x_n|<£$ لكل $n>k$

(ا) إذا كانت $a=0$ فمن الممكن أن نأخذ $k=0$

(ب) إذا كانت $a\neq 0$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{|a|}$ موجود : نضع $b=|a|-1$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{|a|}=1+b$

بما أن $|a|<1$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{|a|}>1$ $\Leftarrow$ $b>0$

$$|a^n|=|a|^n=\frac{1}{(1+b)^n}$$

$$(1+b)^n=1+nb+\cdots+b^n>nb \Leftarrow \frac{1}{(1+b)^n}<\frac{1}{nb} \Leftarrow |a^n|<\frac{1}{nb}$$ لكل قيم n

نضع $k>\frac{1}{£b}$: لكل $n>k$ $\Leftarrow$ $n>\frac{1}{£b}$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{nb}<£$ $\Leftarrow$ $|a^n|<£$ $\Leftarrow$ $x_n=a^n\to 0$

مبرهنة (13.2.4)

ليكن كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ متتابعة حقيقية بحيث إن $x_n\to x$, $y_n\to y$ فأن

(1) $x_n+y_n\to x+y$ (2) $ªx_n\to ªx$ لكل $ª\in R$

(3) $ª+x_n\to ª+x$ لكل $ª\in R$ (4) $x_ny_n\to xy$

(5) $\frac{x_n}{y_n}\to\frac{x}{y}$ عندما $y_n\neq 0$ لكل قيم n . (6) $\frac{1}{y_n}\to\frac{1}{y}$ عندما $y_n\neq 0$ لكل قيم n .

(7) $|x_n|\to|x|$ (8) $|x_n-y_n|\to|x-y|$ (9) إذا كان $x_n\leq y_n$ لكل قيم n فان $x\leq y$.

البرهان :

(1) ليكن $£>0$

بما أن $x_n\to x$ $\Leftarrow$ يوجد $k_1\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $|x_n-x|<\frac{£}{2}$ لكل $n>k_1$

وكذلك $y_n\to y$ يوجد $k_2\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $|y_n-y|<\frac{£}{2}$ لكل $n>k_2$

نضع $k=\max\{k_1,k_2\}$ ، فيكون $|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2}$ و $|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n>k$

$$|(x_n-x)+(x_n-y)|\le|x_n-x|+|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

وعلية $x_n+y_n\to x+y$

(2) بما أن $x_n\to x \Leftarrow$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ لكل $n>k$

$$|\alpha x_n-\alpha x|=|\alpha(x_n-x)|=|\alpha||x_n-x|<|\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|}=\varepsilon$$

وعلية $\alpha x_n\to\alpha x$.

(3) يترك البرهان للقارئ

(4) ليكن $\varepsilon>0$

بما أن كل متتابعة متقاربة تكون مقيدة

$\Leftarrow$ كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد $M_1>0$ و $M_2>0$ بحيث أن

$|x_n|\le M_1$ لكل $n>k$ و $|y_n|\le M_2$ لكل $n>k$ وان $|x|\le M_1$ و $|y|\le M_2$

نضع $M=\max\{M_1,M_2\}$ ، فيكون

$|x_n|\le M$ لكل $n>k$ و $|y_n|\le M$ لكل $n>k$ وان $|x|\le M$ و $|y|\le M$

بما أن $x_n\to x \Leftarrow$ يوجد $k_1\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2M}$ لكل $n>k_1$

وكذلك $y_n\to y$ يوجد $k_2\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2M}$ لكل $n>k_2$

نضع $k=\max\{k_1,k_2\}$ ، فيكون

$|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{2M}$ و $|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{2M}$ لكل $n>k$

$$x_ny_n-xy=(x_ny_n-x_ny)+(x_ny-xy)=x_n(y_n-y)+(x_n-x)y$$

$$|x_ny_n-xy|=|x_n(y_n-y)+(x_n-x)y|\le|x_n||y_n-y|+|x_n-x||y|<M.\frac{\varepsilon}{2M}+M.\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$ وعلية $x_ny_n\to xy$

(5) ليكن $\varepsilon>0$

بما أن $y\ne0 \Leftarrow |y|>0 \Leftarrow \frac{1}{2}|y|>0$

بما أن $y_n\to y \Leftarrow$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|y_n-y|<\frac{1}{2}|y|$ لكل $n>k$

بما أن $y=(y-y_n)+y_n \Leftarrow |y|=|(y-y_n)+y_n| \Leftarrow\Leftarrow |y|\le|y-y_n|+|y_n| \Leftarrow |y|-|y_n|\le|y-y_n|$

$|y|-|y_n|<\frac{1}{2}|y|$ لكل $n>k \Leftarrow -|y_n|<-\frac{1}{2}|y|$ لكل $n>k \Leftarrow |y_n|>\frac{1}{2}|y|$ لكل $n>k$

نضع $d=\min\{|y_1|,|y_2|,\cdots,|y_k|,\frac{1}{2}|y|\} \Leftarrow |y_n|\ge d$ لكل $n>k$ وان $|y|\ge d$

بما أن $\{x_n\}$ متقاربة $\Leftarrow$ $\{x_n\}$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد $M>0$ بحيث أن $|x_n|\le M$ لكل $n>k$ وان $|x|\le M$

بما أن $x_n \to x \Leftarrow$ يوجد $k_1\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $|x_n - x| < \frac{£\, d}{2}$ لكل $n>k_1$

وكذلك $y_n \to y$ يوجد $k_2\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $|y_n - y| < \frac{£\, d^2}{2M}$ لكل $n>k_2$

نضع $k=\max\{k_1,k_2\}$ ، فيكون

$|x_n - x| < \frac{£\, d}{2}$ و $|y_n - y| < \frac{£\, d^2}{2M}$ لكل $n>k$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{yx_n - xy_n}{yy_n}\right| = \frac{|yx_n - xy_n|}{|yy_n|} = \frac{|yx_n - x_ny_n + x_ny_n - xy_n|}{|y||y_n|} = \frac{|x_n(y-y_n)+y_n(x_n-x)|}{|y||y_n|}$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right| \le \frac{1}{|y||y_n|}\left(|x_n||y-y_n| + |y_n||x_n - x|\right) = \frac{|x_n||y-y_n|}{|y||y_n|} + \frac{|x_n - x|}{|y|} < \frac{M£\frac{d^2}{2M}}{d^2} + \frac{\frac{£d}{2}}{d} = \frac{£}{2}+\frac{£}{2} = £$$

$$\Leftarrow \quad \frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$$

(6) مباشرة من (5) بوضع $x_n = 1$ لكل قيم n نحصل على $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y}$

(7) ليكن $£ > 0$

بما أن $x_n \to x$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|x_n - x| < £$ لكل $n>k$

بما أن $\big|\,|x_n| - |x|\,\big| \le |x_n - x| \Leftarrow \big|\,|x_n|-|x|\,\big| < £$ لكل $n>k$ وعلية $|x_n| \to |x|$

والمثال التالي : يوضح أن $|x_n| \to |x|$ ولكن $x_n \not\to x$

لو فرضنا $x_n = (-1)^n$. نلاحظ أن المتتابعة $\{|x_n|\}$ متقاربة ولكن $\{x_n\}$ غير متقاربة.

مبرهنة (14.2.4)

لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء المتري (X,d) ، فان $x\in\overline{A}$ إذا وفقط إذا ، توجد متتابعة $\{x_n\}$ في A بحيث أن $x_n \to x$.

البرهان:

نفرض $x\in\overline{A}$

بما أن $\overline{A} = A\cup A' \Leftarrow x\in A\cup A' \Leftarrow x\in A$ أو $x\in A'$

إذا كان $x\in A$ فان من الواضح أن المتتابعة $\{x\}$ في X وان $x\to x$

أما إذا كانت $x\notin A$ فان $x\in A'$

ليكن $n\in\mathbb{Z}^+ \Leftarrow r=\frac{1}{n}>0 \Leftarrow B_r(x)$ مجموعة مفتوحة وتحتوي على x

بما أن $x\in A' \Leftarrow A\cap(B_r(x)\,|\,\{x\})\neq\Phi \Leftarrow x_n\in A\cap(B_{\frac{1}{n}}(x)\,|\,\{x\})$ لكل $n\in Z^+$

نلاحظ أن $\{x_n\}$ متتابعة في A . بقي أن نبرهن ، بأن $x_n \to x$

ليكن $£ > 0$ $\Leftarrow$ باستخدام خاصية أرخميدس يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $\frac{1}{k} < £$

بما أن $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \Leftarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$

ليكن $n > k \Leftarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{k} \Leftarrow d(x_n, x) < \frac{1}{k} < £ \Leftarrow x_n \to x$.

الاتجاه المعاكس: نفرض $\{x_n\}$ متتابعة في A بحيث $x_n \to x$

يجب أن نبرهن أن $x \in \overline{A}$ ، أي أن $x \in A \cup A'$

إذا كانت $x \in A$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $x \notin A$ ،نفرض G مجموعة مفتوحة في $\mathbf{X}$ وتحتوي على $x \Leftarrow$ يوجد $r > 0$ بحيث أن $B_r(x) \subset G$.

بما أن $r > 0$ ، $x_n \to x \Leftarrow$ يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $d(x_n, x) < r$ لكل $n > k$

$\Leftarrow$ $x_n \in B_r(x)$ لكل $n > k$

بما أن $x_n \in A$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ $\Leftarrow$ $A \cap (B_r(x) | \{x\}) \neq ¤$

بما أن $B_r(x) \subset G \Leftarrow A \cap (G | \{x\}) \neq ¤ \Leftarrow x \in A' \Leftarrow x \in \overline{A}$.

مبرهنة (15.2.4)

إذا كانت متتابعة كوشي في فضاء متري تمتلك متتابعة جزئية متقاربة فأنها متقاربة.

البرهان:

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في الفضاء المتري (X, d) ولتكن $\{x_{i_n}\}$ متتابعة جزئية من المتتابعة $\{x_n\}$ وهي متقاربة إلى $x_0 \in X$ ، أي أن $x_{i_n} \to x_0$

$\Leftarrow$ $\{x_{i_n}\}$ متتابعة كوشي $\Leftarrow$ لكل $£ > 0$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث أن $d(x_{i_n}, x_{i_m}) < £$ لكل $n, m \geq k$

بما أن $\{i_m\}$ متتابعة متزايدة حديا من الأعداد الصحيحة.

عندما $m \to \infty$ نحصل على $d(x_n, x_0) < £$ لكل $n \geq k$ $\Leftarrow$ $x_n \to x_0$ وعلية فان المتتابعة $\{x_n\}$ متقاربة

مبرهنة (16.2.4)

(1) لكل عدد حقيقي تـوجد متتابعة كوشي من الأعداد النسبية تقترب إليه .

(2) لكل عدد حقيقي تـوجد متتابعة كوشي من الأعداد غير النسبية تقترب إليه .

(3) توجد متتابعة كوشي من الأعداد النسبية لا تقترب إلى أي عدد نسبي .

البرهان :

(1) ليكن $r \in \mathbb{R}$

بما أن $r - \frac{1}{n} < r < r + \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ وعلية (حسب كثافة الأعداد النسبية) لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ يوجد $r_n \in \mathbb{Q}$ بحيث أن $r - \frac{1}{n} < r_n < r + \frac{1}{n}$ وبذلك نحصل على المتتابعة $\{r_n\}$ في $\mathbb{Q}$ بحيث أن $r - \frac{1}{n} < r_n < r + \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftarrow$ $|r_n - r| < \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$

الآن: يجب أن نبرهن على أن : $r_n \to r$

ليكن $0 < £$ (حسب خاصية أرخميدس) يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\frac{1}{k} < £$

لكل $n > k \Leftarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{k} \Leftarrow |r_n - r| < \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < £ \Leftarrow r_n \to r$

(2) نستخدم نفس الأسلوب (1) باستبدال العدد النسبي بغير نسبي .

(3) ليكن $r = \sqrt{2} \Leftarrow r \in \mathbb{R}$.

باستخدام (1) توجد متتابعة كوشي من الأعداد النسبية $\{r_n\}$ تقترب إلى r. أي أن $r_n \to r$

بما أن التقارب وحيد وان $r \notin \mathbb{Q} \Leftarrow \{r_n\}$ لا تقترب إلى عدد نسبي

ملاحظة

الفقرة (3) في المبرهنة أعلاه تبين وجود متتابعات كوشي في حقل الأعداد النسبية ولكنها غير متقاربة ضمن هذا الحقل (أي نقطة التقارب لا تنتمي للحقل)

مبرهنة (17.2.4)

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ متتابعة في X بحيث أن $y_n \to y , x_n \to x$ حيث $x, y \in X$ فان $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$

البرهان:

$$d(x_n,y_n)-d(x,y)=(d(x_n,y_n)-d(x_n,y))+(d(x_n,y)-d(x,y))$$

$$|d(x_n,y_n)-d(x,y)| \le |d(x_n,y_n)-d(x_n,y)|+|d(x_n,y)-d(x,y)| \le d(y_n,y)+d(x_n,x) \longrightarrow 0 \quad as \quad n \to \infty$$

$$d(x_n,y_n) \longrightarrow d(x,y)$$

نتيجة (18.2.4)

إذا كانت كل من $\{x_n\},\{y_n\}$ متتابعة كوشي في الفضاء المتري (X,d) فان $\{d(x_n,y_n)\}$ تكون متتابعة كوشي في $\mathbb{R}$ وبالتالي تكون متقاربة.

البرهان

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m)-d(y_n,y_m) \longrightarrow 0 \quad as \quad n,m \longrightarrow \infty$$

مثال (19.2.4)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $\{x_n\}$ متتابعة في X. بين أن $x_n \longrightarrow x$ حيث $x \in X$ إذا وفقط إذا وجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $x_n = x$ لكل $n > k$.

الحل :

الاتجاه الأول : نفرض $x_n \to x \Leftarrow$ لكل $0 < £$ يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $d(x_n, x) < £$ لكل $n > k$

بما أن $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \Leftarrow d(x_n, x) = 0$ لكل $n > k \Leftarrow x_n = x$ لكل $n > k$.

3.4 الفضاءات المترية الكاملة Complete Metric Spaces

تعريف (1.3.4)
يقال عن الفضاء المتري (X,d) بأنه كاملاً (Complete) إذا كانت كل متتابعة كوشي فيه متقاربة.

مثال(2.3.4)
لتكن $d:Q\times Q\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالصيغة $d(x,y)=|x-y|$ لكل $x,y\in\mathbb{Q}$
لاحظ أن (Q,d) فضاء متري ولكنه غير كامل وذلك حسب المبرهنة (23) توجد متتابعة كوشي في $\mathbb{Q}$ ولكن غير متقاربة في $\mathbb{Q}$.
وهذا المثال يبين أن فضاء الأعداد النسبية فضاء غير كامل، بينما سنرى فيما بعد أن فضاء الأعداد الحقيقية فضاء كامل.

تعريف (3.3.4)
ليكن $a_n,b_n\in\mathbb{R}$ بحيث أن $a_n\le b_n$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$ ولتكن $I_n=[a_n,b_n]$. يقال عن المتتابعة $\{I_n\}$ المكونة من الفترات المغلقة بأنها متتابعة معشعشه (nested sequence) إذا كان $I_{n+1}\subset I_n$ لكل قيم n أي إن $a_n\le a_{n+1}\le b_{n+1}\le b_n$ لكل قيم n . العدد غير السالب b_n-a_n يسمى طول الفترة I_n ويرمز له بالرمز $|I_n|$ أي إن $|I_n|=b_n-a_n$.

مبرهنة(4.3.4)
لتكن $\{I_n\}$ متتابعة معشعشه فان
(1) $\bigcap_n I_n\neq$ ¤ (2) إذا كانت $|I_n|\to 0$ فان $\bigcap_n I_n$ يحتوي على نقطه واحده فقط .

البرهان :
(1) لتكن $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$ و $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$
بما أن $I_{n+1}\subset I_n$ لكل قيم n وعلية إذا كان $n\le m$ فان $I_m\subset I_n \Leftarrow [a_m,b_m]\subset[a_n,b_n]$
$\Leftarrow a_n\le a_m$ وكذلك $b_m\le b_n$
بما أن $a_n<b_n$ و $a_m<b_m \Leftarrow a_m<b_m<b_n$ لكل $n,m\in Z^+$
$\Leftarrow b_n$ قيد أعلى للمجموعة A (أي أن كل عنصر في B هو قيد أعلى للمجموعة A)
بما أن $A\neq$ ¤ وان $A\subseteq\mathbb{R}$ (حسب خاصية الكمال للأعداد الحقيقية)، يوجد $y\in\mathbb{R}$ بحيث أن $\sup A=y$
$\Leftarrow a_n\le y$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$
بما أن b_n قيد أعلى للمجموعة A و y اصغر قيد أعلى للمجموعة A
$\Leftarrow a_n\le y\le b_n$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+ \Leftarrow y\in[a_n,b_n]$ لكل $n\in Z^+$
$\Leftarrow y\in\bigcap_n I_n$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+ \Leftarrow \bigcap_n I_n\neq$ ¤

(2) سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض يوجد $x,y\in\bigcap_n I_n$ بحيث أن $x\neq y \Leftarrow x,y\in I_n$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$
نضع £ $=|x-y| \Leftarrow$ £ >0
بما أن $|I_n|\to 0 \Leftarrow$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\big||I_n|-0\big|<$ £ لكل $n>k \Leftarrow |I_n|<$ £ لكل $n>k$
ليكن $m>k \Leftarrow |I_m|<$ £
بما أن $x,y\in I_m \Leftarrow$ £ $=|x-y|\le|I_m|<$ £ وهذا تناقض $\Leftarrow x=y$. وبذلك ينتهي البرهان.

ملاحظات

(1) إذا كانت الفترات I_n غير مغلقة فان المبرهنة السابقة غير صحيحة والمثال التالي يوضح ذلك

لتكن $I_n=(0,\frac{1}{n})$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$

$$I_1=(0,1),\quad I_2=(0,\frac{1}{2}),\cdots$$

نلاحظ أن $I_{n+1}\subset I_n$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$ ولكن $\bigcap_n I_n=\emptyset$

(2) لكل $n\in\mathbb{Z}^+$ ، نضع $I_n=\{x\in Q:\sqrt{2}-\frac{1}{n}<x<\sqrt{2}+\frac{1}{n}\}$ فان $\bigcap_n I_n=\sqrt{2}$ وهذا يبين أن التقاطع لا يحتوي على عدد نسبي.

المبرهنة التالية تبين أن فضاء الأعداد الحقيقية هو فضاء كامل .

مبرهنة(5.3.4)

كل متتابعة كوشي الحقيقية تكون متقاربة ،وعليه تكون المتتابعة الحقيقية $\{x_n\}$ متقاربة أذا وفقط إذا كانت $\{x_n\}$ كوشي .

البرهان :

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في $\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{x_n\}$ مقيدة ، يوجد $M>0$ بحيث أن $|x_n|\le M$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$ $\Leftarrow$ $-M\le x_n\le M$ لكل $n\in\mathbb{Z}^+$

نضع $I_1=[-M,M]$. نلاحظ أن الفترة المغلقة I_1 تحتوي على جميع حدود المتتابعة وان

$$|I_1|=M-(-M)=2M$$

نقسم الفترة I_1 إلى فترتين مغلقتين I_2,I_2' متساويتين في الطول ، أي أن $|I_2|=\frac{1}{2}|I_1|=\frac{2M}{2}$

إحدى الفترتين I_2,I_2' تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$ ولتكن هذه الفترة I_2 .

نقسم الفترة I_2 إلى فترتين مغلقتين I_3,I_3' متساويتين في الطول ، أي أن $|I_3|=\frac{1}{2}|I_2|=\frac{2M}{2^2}$

بما أن I_2 تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$

إحدى الفترتين I_3,I_3' تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$ ولتكن هذه الفترة I_3 .

باستخدام الاستقراء الرياضي ، نحصل على المتتابعة من الفترات المغلقة $\{I_n\}$ بحيث أن كل من I_n تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots \text{ لكل } n\in Z^+ \text{ و } |I_n|=\frac{2M}{2^{n-1}}$$

$\Leftarrow$ $|I_n|\to 0$ باستخدام مبرهنة الفترات المعشعشة نحصل على $\bigcap_n I_n$ يحتوي على نقطه واحده فقط . ولتكن x ،

أي أن $\bigcap_n I_n=\{x\}$

الآن يجب أن نبرهن : $x_n\to x$: ليكن $\varepsilon>0$

بما أن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي $\Leftarrow$ يوجد $k_1\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n.m>k_1$

بما أن $|I_n| \to 0$ $\Leftarrow$ يوجد $k_2 \in Z^+$ بحيث أن $|I_n| < \frac{\pounds}{2}$ لكل $n > k_2$

نضع $k = \max\{k_1, k_2\}$

$|x_n - x_m| < \frac{\pounds}{2}$ و $|I_n| < \frac{\pounds}{2}$ لكل $n. m > k$

لكل $n. > k$ يجب أن نبرهن : $|x_n - x| < \pounds$

بما أن I_n تحتوي على عدد غير منتهي من حدود المتتابعة $\{x_n\}$ وعلية $m \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $m > k$ وان $x_m \in I_n$

بما أن $\bigcap_n I_n = \{x\}$ $\Leftarrow$ $x \in I_n$ $\Leftarrow$ $|x_n - x| \le |I_n| < \frac{\pounds}{2}$

$$|I_n - x| \le |x_n - x_m| + |x_m - x| < \frac{\pounds}{2} + \frac{\pounds}{2} = \pounds$$

وعلية $|x_n - x| < \pounds$ لكل $n. > k$ $\Leftarrow$ $x_n \to x$.

مثال(6.3.4)

الفضاء الاقليدي $(\mathbb{R}^n, d)$ يكون فضاء مترياً كاملاً.

الحل :

نعرف الدالة $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بالصيغة

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

لكل $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\ ,\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

لتكن $\{x_m\}$ متتابعة كوشي في $\mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$ $x_m = (x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$ ، $x_m \in \mathbb{R}^n$

ليكن $\pounds > 0$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $d(x_m, x_l) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(l)})^2}$

$\Leftarrow$ $\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(l)})^2 < \pounds^2$ $\Leftarrow$ $|x_i^{(m)} - x_i^{(l)}| < \pounds$ لكل $m, l > k$

$\Leftarrow$ $\{x_m\}$ متتابعة كوشي في R لكل $i = 1, \cdots, n$

بما أن $\mathbb{R}$ حقل كامل $\Leftarrow$ $x_i \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1^{(m)} \longrightarrow x_i$ لكل $i = 1, \cdots, n$

نضع $x = (x_1, \cdots, x_n)$ $\Leftarrow$ $x \in \mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$ $x_m \longrightarrow x$ وعليه المتتابعة $\{x_m\}$ تكون متقاربة في $\mathbb{R}^n$

مبرهنة (7.3.4)

ليكن (Y, d_Y) فضاء جزئياً من الفضاء المتري الكامل (X, d) ، فان (Y, d_Y) يكون كامل إذا كانت Y مجموعة مغلقة في X .

البرهان :

نفرض (Y, d_Y) فضاء متري كامل

ليكن $x \in \overline{A}$ $\Leftarrow$ توجد متتابعة $\{x_n\}$ في A بحيث أن $x_n \to x$ $\Leftarrow$ $\{x_n\}$ متتابعة متقاربة وعليه $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في Y.

بما أن (Y,d_Y) فضاء متري كامل $\Leftarrow$ يوجد $y\in Y$ بحيث أن $x_n \to y$
ولكن التقارب وحيد $\Leftarrow$ $y=x$ وعليه فأن $x\in Y$ $\Leftarrow$ Y مجموعة مغلقة في X .
الآن نبرهن الاتجاه المعاكس نفرض Y مجموعة مغلقة في X .
لتكن $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في Y
بما أن $Y\subset X \Leftarrow \{x_n\}$ متتابعة كوشي في X
وبما أن (X,d) فضاء متري كامل $\Leftarrow \{x_n\}$ متقاربة في X ، أي يوجد $x\in X$ بحيث أن $x_n \to x$
بما آن $x_n \in Y$ $\Leftarrow$ $x\in \overline{Y}$ وبما أن Y مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ $\overline{Y}=Y$ وعليه فأن $x\in Y$
لذلك المتتابعة $\{x_n\}$ متقاربة في $Y \Leftarrow (Y,d_Y)$ فضاء متري كامل .

ملاحظة

إذا كان (Y,d_Y) فضاء جزئياً من الفضاء المتري الكامل (X,d) ، فانه ليس من الضروري (Y,d_Y) يكون كامل.
والمثال التالي يوضح ذلك

مثال (8.3.4)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$. نلاحظ أن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متريا كاملا، وان $(\mathbb{Q},d_u)$ فضاء جزئيا من $(\mathbb{R},d_u)$ ولكنة غير كامل.

4.4 مبرهنة النقطة الصامدة Fixed Point Theorem

تعريف (1.4.4)

ليكن (X,d) فضاء متريا. يقال عن الدالة $f:X\to X$ بأنها دالة انكماشية ً (Contracting Function) **أو(** انكماش Contraction**)** على X إذا وجد عدد حقيقي k ,$0\le k<1$ بحيث أن $d(f(x),f(y))\le k\,d(x,y)$ لكل $x,y\in X$.

مثال (2.4.4)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R}^2,d_u)$ تكون الدالة $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ معرفة بالصيغة $f(x)=\dfrac{1}{2}x$ لكل $x\in\mathbb{R}^2$

انكماش على $\mathbb{R}^2$.

الحل:

ليكن $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$d(f(x),f(y))=d(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y)=d((\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{2}x_2),(\frac{1}{2}y_1,\frac{1}{2}y_2))=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}=\frac{1}{2}d(x,y)$$

مبرهنة (3.4.4)

ليكن (X,d) فضاء متريا كاملا ولتكن $f:X\to X$ دالة انكماشية ً على X ، فأنة إذا وجد نقطة واحدة فقط x في X بحيث أن $f(x)=x$ ، وتسمى هذه النقطة بالنقطة الصامدة.

البرهان:

بما أن الدالة $f:X\to X$ انكماشية ً على $X \Leftarrow$ يوجد عدد حقيقي k ,$0\le k<1$ بحيث أن $d(f(x),f(y))\le k\,d(x,y)$
لكل $x,y\in X$. $\Leftarrow$ $d(f^2(x),f^2(y))\le kd(f(x),f(y))\le k^2d(x,y)$ لكل $x,y\in X$.
وبصورة عامة إذا كان n عدد صحيح موجب فان $d(f^n(x),f^n(y))\le k^n d(x,y)$ لكل $x,y\in X$.
الآن لتكن x_0 أية نقطة في X . نضع

$x_1 = f(x_0)$
$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$
$\vdots$
$x_n = f(x_{n-1}) = \cdots = f^n(x_0)$

يجب أن نبرهن على أن المتتابعة $\{x_n\}$ هي متتابعة كوشي في X .
ليكن m,n أي عددين صحيحين موجبين بحيث أن $n < m$.

$$f^m(x_0) = f^n(x_{m-n})$$

$$d(x_m, x_n) = d(f^n(x_0), f^n(x_0)) \le k^n d(x_{m-n}, x_0) \le k^n \sum_{i=0}^{m-n-1} d(x_i, x_{i+1}) \le k^n \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i d(x_0, x_1) = \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

بما أن $k < 1$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ $\Leftarrow$ لكل $0 < £$ يوجد n بحيث أن $d(x_m, x_n) \le \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) < £$

$\Leftarrow$ $\{x_n\}$ متتابعة كوشي في X .

بما أن الفضاء المتري (X,d) كاملا $\Leftarrow$ يوجد $x \in X$ بحيث أن $x_n \to x$ وعلية $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ الآن

$f(x_n) = x_{n+1}$ لذلك $\{f(x_n)\}$ متتابعة جزئية من المتتابعة $\{x_n\}$ وعلية المتتابعة $\{f(x_n)\}$ تكون متقاربة إلى x ، أي أن $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x$ ، وبما أن التقارب يكون وحيد $\Leftarrow$ $f(x) = x$.

لأجل أن نبرهن النقطة الصامدة وحيدة.نفرض $y \in X$ بحيث أن $f(y) = y$

$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \le kd(x,y)$ $\Leftarrow$ $kd(x,y) \ge d(x,y)$

إذا كان $d(x,y) \ne 0$ فان $k \ge 1$ ، وهذا تناقض لان $0 < k \le 1$

$\Leftarrow$ $d(x,y) = 0$ $\Leftarrow$ $x = y$

5.4 التقارب اللانهائية

تعريف (1.5.4)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية . يقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متقاربة إلى ∞ إذا كان لكل عدد حقيقي موجب M يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن $x_n \ge M$ لكل $n \ge k$. ويكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ أو $x_n \to \infty$.

ويقال عن المتتابعة $\{x_n\}$ بأنها متقاربة إلى $-\infty$ أذا كان لكل عدد حقيقي موجب M يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $x_n < M$ لكل $n > k$ ويكتب $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ أو $x_n \to -\infty$.

تعريف(2.5.4)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية ولتكن ألمجموعة A تحتوي على جميع نقاط التقارب ألتتابعي الجزئي للمتتابعة $\{x_n\}$ ،أي إن $x \in A$ إذا وفقط إذا وجدت متتابعة جزئيه $\{x_{n_K}\}$ من $\{x_n\}$ بحيث أن $x_{n_K} \to x$. اصغر قيد أعلى للمجموعة A $(\sup A)$ يسمى بالغاية العليا Upper limit or superior limit ويرمز لها الرمز $\overline{\lim} x_n$ أو الرمز $\lim_n \sup x_n$ ، أي أن $\overline{\lim} x_n = \lim_n \sup x_n = \sup A$

واكبر قيد أسفل للمجموعة A $(\inf\ A)$ يسمى بالغاية الدنيا Lower limit or interior limit ويرمز لها بالرمز $\underline{\lim} x_n$ أو الرمز $\lim\limits_n \inf x_n$ أي إن $\underline{\lim}\, x_n = \lim\limits_n \inf x_n = \inf A$

من الواضح إن A مجموعه مغلقه في $\mathbb{R}$ وان

(1) $\sup A \in A$

(2) إذا كان $\sup A < x$ فأنه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن $x_n < x$ لكل $n > k$ وبالمثل نحصل نتيجة بالنسبة $\inf A$.

مبرهنة (3.5.4)

لتكن $\{x_n\}$ متتابعة حقيقية

(1) $\overline{\lim} x_n = \lim\limits_n \sup x_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k \ge n} x_k$ (2) $\underline{\lim}\, x_n = \lim\limits_n \inf x_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k \ge n} x_k$.

(3) $\overline{\lim} x_n = x$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطين الآتيين:

(أ) لكل $£ > 0$ يوجد k بحيث أن $x_n < x + £$ لكل $n \ge k$. (ب) لكل $£ > 0$ ولكل n يوجد $m \ge n$ بحيث إن $x_m > x - £$.

مبرهنة (4.5.4)

لتكن كل من $\{x_n\}$ ،$\{y_n\}$ متتابعة حقيقية

(1) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$ (2) $\underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ إذا وفقط إذا كان $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = x$

(4) إذا كان $x_n < y_n$ لكل $n \ge k$ بحيث k ثابت فأن

(أ) $\underline{\lim} x_n \le \underline{\lim} y_n$ (ب) $\overline{\lim} x_n \le \overline{\lim} y_n$

(5) $\underline{\lim}\ x_n + \underline{\lim}\ y_n \le \underline{\lim}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}\ x_n + \underline{\lim}\ y_n \le \overline{\lim}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}\ x_n + \overline{\lim}\ y_n$

بشرط لا يوجد مجموع بالصيغة $\infty - \infty$

(6) (أ) $\overline{\lim} x_n$ اكبر نقطه ملاصقه للمتابعة $\{x_n\}$ (ب) $\underline{\lim} x_n$ اصغر نقطه ملاصقه للمتابعة $\{x_n\}$

ر 331

Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

نظري : 3　　مناقشة: 1　　عدد الوحدات: 3

---

5. المتسلسلات اللانهائية Infinite Series

تعريفها وأمثلة، بعض المتسلسلات اللانهائية الخاصة، اختبار التقارب، المتسلسلات المتناوبة، التقارب المطلق والتقارب المشروط، اختبارات أخرى.

1.5 تعاريف وأمثلة Definitions and Examples

لتكن $\{a_n\}$ متتابعة حقيقية وليكن

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ تسمى متسلسلة لانهائية ويرمز لها عادة بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. يطلق على الإعداد $a_1, a_2, a_3, \ldots$ حدود المتسلسلة غير المنتهية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ويطلق على الإعداد $S_1, S_2, S_3, \ldots$ المجاميع الجزئية **(Partial sums)** للمتسلسلة غير المنتهية .

مما تقدم يمكن صياغة التعريف الأتي :

تعريف (1.1.5)

لتكن $\{a_n\}$ متتابعة حقيقية وليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ يطلق على المتتابعة $\{S_n\}$ متسلسلة لانهائية ويرمز لها بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

تعريف (2.1.5)

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها متقاربة (أو تتقارب إلى القيمة S) أذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة إلى S (أي أذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n = S$). ويطلق على العدد S مجموع المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، أي أن $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. وإذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ متباعدة (أي أن $\lim_{n\to\infty} S_n$ غير موجود) فنقول إن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة وليس لها مجموع .

مثل (3.1.5)

هل أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة ؟

الحل :

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\Leftarrow$ $S_n \to 1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة.

مبرهنة (4.1.5) (بعض المسلسلات اللانهائية الخاصة)

(1) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ حيث $r \neq 0, a \neq 0$ (تسمى بالمتسلسلة الهندسية **Geometric Series** ويطلق على العدد r بأساس المتسلسلة). تكون متقاربة أذا كان $|r| < 1$ وان $S = \frac{a}{1-r}$ وماعدا ذلك تكون متباعدة.

(2) المسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (تسمى بالمتسلسلة التوافقية **Harmonic series** وتكون متباعدة)

البرهان:

(1)

(ا) إذا كانت $r = 1$ فان $S_n = a + a + \cdots + a = na$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{na\}$ غير متقاربة ، لو كانت متقاربة فإنها مقيدة ، وهذا يعني انه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|na| \leq M$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ $\Leftarrow$ $n|a| \leq M$ $\Leftarrow$ $n \leq \frac{M}{|a|}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ وهذا يناقض خاصية ارخميدس.

وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متباعدة.

(ب) إذا كانت $r = -1$ فان $\{S_n\} = \{a, 0, a, 0, \cdots\}$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ متباعدة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متباعدة.

(ج) إذا كانت $|r| \neq 1$ فان

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}, \quad rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

$$\Leftarrow \quad S_n - rS_n = a - ar^n \quad \Leftarrow \quad (1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

- إذا كانت $|r| > 1$ فان المتتابعة $\{r^n\}$ غير متقاربة ، لو كانت متقاربة فإنها مقيدة ، وهذا يعني انه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|r^n| \leq M$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ ، حسب خاصية أرخميدس، يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $k > M$

بما أن $|r| > 1$ $\Leftarrow$ $M|r| > M$ $\Leftarrow$ $n|a| \leq M$ $\Leftarrow$ $n \leq \frac{M}{|a|}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ وهذا يناقض خاصية أرخميدس

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{r^n\}$ غير متقاربة $\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ غير متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متباعدة.

- إذا كانت $|r| < 1$ فان المتتابعة $\{r^n\}$ متقاربة وان $r^n \to 0$

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \to \frac{a}{1-r} - 0 = \frac{a}{1-r}$$

أي أن $S_n \to \dfrac{a}{1-r}$. إذن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متقاربة وان $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$.

(2)

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ $S_{2n} - s_n \ge \dfrac{1}{2}$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ وهذا يعني انه إذا كان $m = 2n$ ، $n \ge 1$ فان $|S_m - s_n| \ge \dfrac{1}{2}$ لكل $n, m \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ ليست متتابعة كوشي $\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ غير متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ متباعدة.

مثل (5.1.5)

(1) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ متقاربة لان $r = \dfrac{1}{2}$ وان $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 2$

(2) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}$ متباعدة لان $r = 4$

(3) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} (-\dfrac{1}{6})^{n-1}$ متقاربة لان $r = -\dfrac{1}{6}$ وان $\sum_{n=1}^{\infty} (-\dfrac{1}{6})^{n-1} = \dfrac{6}{7}$

(4) المتسلسلة الهندسية اللانهائية $0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$ متقاربة لان

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}$$

أي أن $a = \dfrac{1}{10}, \quad r = \dfrac{1}{10} \quad \Leftarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{9}$

(5) العدد $0.16666\cdots$

$$0.16^{\circ} = 0.16666\cdots = 0.1 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots = 0.1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{100} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}$$

أي أن $a = \dfrac{6}{100}, \quad r = \dfrac{1}{10} \quad \Leftarrow \quad 0.16^{\circ} = 0.1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{10^{n+1}} = \dfrac{1}{6}$

مبرهنة(6.1.5)

لتكن كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائيـة متقــاربة

(1) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ متقاربة وان $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\, a_n$ متقاربة لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ وان $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\, a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

البرهان:

(1) ليكن $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ و $T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$

بما أن كل $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متسلسلة لانهايـة متقـاربة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$ و $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=T$

$\Leftarrow$ كل من $\{S_n\}$ ، $\{T_n\}$ متقاربة وعلية $S_n\to S$ ، $T_n\to T$ $\Leftarrow$ $S_n+T_n\to S+T$

$$S_n+T_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\to S+T$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=S+T=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

نتيجة (7.1.5)

أذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة وكانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعدة فأن

(1) المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ متباعدة. (2) المسلسلة أللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\, b_n$ متباعدة لكل $\alpha\neq 0$.

البرهان:

(1)

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ متقاربة

بما إن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة $\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية $-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n-a_a)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متقاربة وهذا تناقض.

مثال (8.1.5)

المتسلسلتان ألانهائيتين $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ، $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ مبتاعتان ولكن $\sum_{n=1}^{\infty}0=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n})$ متقاربة

2.5 اختبار التقارب A converging Test

في هذا البند سوف نتطرق إلى الشروط الكافية لجعل المتسلسلة اللانهائية متقاربة ونتطرق أيضا إلى كيفية أيجاد مجموع المتسلسلة المتقاربة. والمبرهنة الآتية تعطي شرطاً ضرورياً للتقارب

مبرهنة (1.2.5)

أذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة فان $a_n\to 0$

البرهان:

ليكن $\varepsilon>0$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

بما أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة $\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة وعلية $\{S_n\}$ متتابعة كوشي $\Leftarrow$ يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|S_n - S_m| < \pounds$ لكل $n, m > k$

إذا كان $n > k$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}, \quad S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$
$$|a_{n+1} - 0| = |a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \pounds$$

وعلية $a_n \to 0$.

ملاحظة

إذا كان $a_n \to 0$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ليس بالضرورة أن تكون متقاربة والمثال التالي يوضح ذلك

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة بالرغم من $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

نتيجة(2.2.5)

(1) أذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متباعدة .

(2) أذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وكان $a_n \neq 0$ لكل قيم n فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ تكون متباعدة.

مثال(3.2.5)

بين أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{3n^2-1}$ متباعدة

الحل :

$$a_n = \frac{n^2+2n+3}{3n^2-1} \Rightarrow a_n \to \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow$$ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{3n^2-1}$ متباعدة

تعريف (4.2.5)

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بأنها مهيمنة أو متغلبة(**Dominate** على المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أذا كان $|a_n| \leq b_n$ لكل قيم n .

مبرهنة (5.2.5) اختبار المقارنة

لتكن كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائية غير سالبة الحدود ولتكن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مهيمنة على $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، بحيث أن $a_n \leq b_n$ لكل قيم n . (يمكن صياغة أعلاه بالشكل ليكن $0 \leq a_n \leq b_n$ لكل قيم n).

(1) أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

(2) أذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة

البرهان:

(1)

ليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ و $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة $\Leftarrow$ المتتابعة $\{T_n\}$ متقاربة وعلية المتتابعة $\{T_n\}$ مقيدة

$\Leftarrow$ يوجد $M > 0$ بحيث أن $|T_n| \le M$ لكل قيم n

بما أن $0 \le a_n \le b_n$ لكل قيم n $\Leftarrow$ $0 \le \sum_{k=1}^{n} a_n \le \sum_{k=1}^{n} b_n$ لكل قيم n

$\Leftarrow$ $0 \le S_n \le T_n$ $\Leftarrow$ $0 \le S_n \le M$ $\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ مقيدة

بما أن $a_n \ge 0$ لكل قيم n $\Leftarrow$ $S_n \le S_{n+1}$ لكل قيم n

$\Leftarrow$ المتتابعة $\{S_n\}$ غير متناقصة وعلية المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة $\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة

(2)

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة $\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وهذا تناقض

$\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة .

مثال (6.2.5)

ناقش تقارب المتسلسلات اللانهائية الآتية :

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \qquad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

الحل:

(1)

بما أن $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$ $\Leftarrow$ $(n+1)^2 > n(n+2) > n(n+1)$ لكل قيم n

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ لكل قيم n

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ متقاربة

(2)

بما أن $n > \ln n$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$ لكل قيم n

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة فان المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ متباعدة

مثال(7.2.5)

ليكن $a_n > 0$ لكل قيم n ، فإذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ متقاربة أيضا .

الحل :

$$a_n > 0 \Rightarrow 1+a_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{1+a_n} < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{1+a_n} < a_n$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ متقاربة

تعريف (8.2.5)

لتكن $P \in \mathbb{R}$ ، يطلق على المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متسلسلة- p (P - Series)

مبرهنة (9.2.5)

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ تكون متقاربة أذا كان $P > 1$ وأنها متباعدة أذا كان $P \le 1$.

البرهان :

(1) إذا كانت $p = 1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة

(2) إذا كانت $P < 1$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^p}$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متباعدة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متباعدة عندما $P \le 1$.

(3) إذا كانت $P > 1$ نقارن مع المتسلسلة الهندسية التي فيها $a = 1,\ r = \frac{2}{2^p}$

بما أن $p > 1$ $\Leftarrow$ $r < 1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2^p})^{n-1}$ متقاربة

بما أن $\frac{1}{n^p} < (\frac{2}{2^p})^{n-1}$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ متقاربة.

مبرهنة (10.2.5)

ليكن $b_n > 0, a_n \ge 0$ لكل قيم n. أذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L > 0$ فأنه أما كلتا المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتان أوكلتاهما متباعدتان.

نتيجة (11.2.5)

ليكن $b_n > 0 , a_n > 0$ لكل قيم n . أذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$ وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فان المسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أيضاً.

مبرهنة (12.2.5) **اختبار النسبة** Ratio test

ليكن $a_n > 0$ لكل قيم n ولتكن المتتابعة $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ متقاربة إلى العدد الحقيقي r ، أي أن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ فأن المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون (1) متقاربة إذا كان $r < 1$. (2) متباعدة إذا كان $r > 1$.

وفي حالة $r = 1$ فأن الاختبار يكون فاشل أي لا يعطي معلومات عن المتسلسلة وعليه يجب تطبيق اختبار آخر لمعرفه فيما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة .

البرهان :

(1)

إذا كان $r < 1$ $\Leftarrow$ يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث أن $r < \alpha < 1$ (حسب كثافة الأعداد النسبية) $\Leftarrow$ $\alpha - r > 0$

بما أن $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to r$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \alpha - r$ لكل $n > k$

$\Leftarrow$ $-(\alpha - r) < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < \alpha - r$ لكل $n > k$ $\Leftarrow$ $2r - \alpha < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha$ لكل $n > k$

ليكن $n > k$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}} \cdot \frac{a_{k+4}}{a_{k+3}} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha \,.\, \alpha \ldots \alpha = \alpha^{n-k}$$

$\Leftarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_{k+1}} < \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^n}{\alpha^k}$ $\Leftarrow$ $a_{n+1} < \frac{a_{k+1}}{\alpha^k} \,.\, \alpha^n$

بما أن $\alpha < 1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{\alpha^k}\alpha^n$ متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة (حسب اختبار المقارنة)

(2)

إذا كان $r > 1$ $\Leftarrow$ يوجد $\beta \in \mathbb{R}$ بحيث أن $1 < \beta < r$ (حسب كثافة الأعداد النسبية) $\Leftarrow$ $r - \beta > 0$

بما أن $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to r$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ بحيث $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < r - \beta$ لكل $n > k$

$\Leftarrow$ $-(r - \beta) < \frac{a_{n+1}}{a_n} - r < r - \beta$ لكل $n > k$ $\Leftarrow$ $\beta < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2r - \beta$ لكل $n > k$

$\Leftarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \beta$ لكل $n > k$ وعلية نحصل على $\Leftarrow$ $a_{n+1} > \frac{a_{k+1}}{\beta^k}\beta^n$ لكل $n > k$

بما أن $\beta > 1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة الهندسية اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{\beta^k}\beta^n$ متباعدة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة (حسب اختبار المقارنة)

(3) عندما $r = 1$ فان الاختبار فاشل وكما موضح في المثال

(ا) لتكن $a_n = \frac{1}{n}$ نلاحظ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة وان

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

(ب) لتكن $a_n = \frac{1}{n^2}$ نلاحظ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة وان

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

مبرهنة (13.2.5)

ليكن $a_n > 0$ لكل قيم n .إذا وجد عدد صحيح موجب k وعدد موجب $b < 1$ بحيث إن $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$ لكل $n > k$

فان المتسلسلة اللانهائية تكون متقاربة .

البرهان :

يترك للقارئ

مثال (14.2.5)

ناقش تقارب المتسلسلات اللانهائية الآتية :

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

الحل:

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \qquad a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = 2\frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ متقاربة.

$$(2) \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \qquad a_n = \frac{2^n}{n^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ متباعدة.

$$(3) \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \qquad a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^n}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$$ وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$ متقاربة.

مبرهنة (15.2.5) **اختيار الجذر** The Root Test

ليكن $a_n \geq 0$ لكل قيم n .

(1) إذا وجد عدد صحيح موجب k وعدد موجب $b<1$ بحيث إن $\sqrt[n]{a_n}<b$ لكل $n>k$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متقاربة .

(2) إذا كان $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ لعدد غير منتهي من الحدود a_n فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تكون متباعدة .

البرهان :

(1) نفرض يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ وعدد موجب $b<1$ بحيث إن $\sqrt[n]{a_n}<b$ لكل $n>k$ $\Leftarrow$ $a_n<b^n$ لكل $n>k$

بما أن $b<1$ $\Leftarrow$ المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty}b^n$ متقاربة

وعلية تكون المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة (حسب اختبار المقارنة)

(2) نفرض يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$ لكل $n>k$ $\Leftarrow$ $a_n\geq 1$ لكل $n>k$

بما أن المتسلسلة الهندسة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}1$ متباعدة لان أساسها يساوي واحد (أي أن $r=1$)

وعلية تكون المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متباعدة (حسب اختبار المقارنة)

مثال(16.2.5)

ناقش تقارب المتسلسلات اللانهائية الآتية :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^3}$

الحل:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$

أولا: نختبر المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$.

$\Leftarrow a_n=\frac{2^n}{n^n} \Leftarrow \sqrt[n]{a_n}=\frac{2}{n} \Leftarrow \sqrt[n]{a_n}\leq\frac{2}{3}$ لكل $n>2$

$\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$. متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$. متقاربة (حسب المبرهنة6 فرع 2)

(2) يترك للقارئ

ملاحظة

المبرهنة التالية تسمى بمبرهنة القيمة الوسطى للتكامل والتي سنذكرها بدون برهان وذلك لحاجتنا في مبرهنة اختبار التكامل

مبرهنة (17.2.5)

أذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة فانه يوجد $c\in(a,b)$ بحيث أن $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

مبرهنة (18.2.5) اختبار التكامل Integral Test

لتكن f دالة مستمرة ، موجبة ومتناقصة ومعرفة لكل $x\geq 1$. وليكن $a_n = f(n)$ لكل قيم n من الإعداد الصحيحة الموجبة فان المتسلسلة غير المنتهية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة أذا وفقط أذا كان التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متقاربا**.**

البرهان:

ليكن k عدد صحيح موجب ولنأخذ التكامل المحدد $\int_{k-1}^{k} f(x)dx$ باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل ، يوجد $c\in(k-1,k)$ بحيث أن

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx = f(c)(k-(k-1)) = f(c)$$

بما أن الدالة f متناقصة $f(k-1)\geq f(c)\geq f(k)$ وعليه فان

$$f(k-1)\geq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq f(x)$$

لذلك يكون لكل عدد صحيح موجب n

$$\sum_{k=2}^{n} f(k-1)\leq \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)\geq \int_{1}^{k} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k)-f(1) \qquad \cdots(1)$$

الآن : إذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx = L$ فان $\int_1^{\infty} f(x)dx = L \qquad \cdots(2)\cdots$

من (1) ، (2) نحصل على $\sum_{k=1}^{n} f(k)\leq f(1)+\int_1^{n} f(x)dx \leq f(1)+L$

$\Leftarrow$ متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ لها قيد أعلى هو العدد $f(1)+L$ وبما أن المتتابعة $\{S_n\}$ متزايدة $\Leftarrow \{S_n\}$ متقاربة وعلية المتسلسلة اللانهائية متقاربة. إذا لم يكن للتكامل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ قيدا أعلى فسوف لن يكون للمتتابعة $\{S_n\}$ قيد أعلى أيضا لان $\sum_{k=1}^{n} f(k)\geq \int_1^{n} f(x)dx$ لجميع قيم n ، وبذلك تكون المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة

مثال(19.2.5)

استخدم اختبار التكامل لإثبات مبرهنة متسلسلة- p

الحل:

$a_n = \frac{1}{n^p} \Leftarrow a_n = f(n) = \frac{1}{n^p}$ لكل $n \ge 1$

$$\int_1^t f(x)dx = \int_1^t x^{-p}dx = \begin{cases} \frac{t^{1-p}-1}{1-p}, & p \ne 1 \\ \ln t, & p = 1 \end{cases}$$

(1) عندما $p > 1$ فان $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$ وعليه $\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)dx = -\frac{1}{1-p}$

(2) عندما $p < 1$ فان $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$ وعندما $p = 1$ فان $\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$ وعليه $\int_1^\infty f(x)dx$ غير موجود عندما $p \le 1$

وبذلك تكون المتسلسلة- P متقاربة عندما $p > 1$ ومتباعدة عندما $p \le 1$.

مثال(20.2.5)

هل أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^\infty ne^{-n}$ متقاربة ؟

الحل :

$a_n = ne^{-n}$ لكل $n \ge 1$ $\Leftarrow$ $f(x) = xe^{-x}$ كل $x \ge 1$ $\Leftarrow$ f مستمرة ، موجبة

$f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(1-x) < 0$ لكل $x \ge 1$ $\Leftarrow$ f متناقصة وكذلك $f(x) > 0$ لكل $x \ge 1$

$$\int_1^t f(x)dx = \int_1^t xe^{-x}dx = -e^{-x}(x+1)\,|_1^t = -\frac{t+1}{e^t} + \frac{2}{e}$$

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t f(x)dx = -0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$

$\Leftarrow$ المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^\infty ne^{-n}$ متقاربة

3.5 المتسلسلات المتناوبة Alternations Series

في هذا الجزء من المحاضرة سنتطرق إلى تقارب أو تباعد المتسلسلات اللانهائية التي حدودها موجبة وسالبه على التناوب .

تعريف(1.3.5)

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}a_n$ بأنها متناوبة إذا كان $a_n > 0$ لكل قيم n .

مبرهنة(2.3.5)

إذا كان $0 < a_{n+1} < a_n$ لكل عدد صحيح موجب n وكان $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ فــان المتسلسلتين المتناوبتين $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ، $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ متقاربتان .

مبرهنة(3.3.5)

لتكن $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ متسلسلة متناوبة بحيث أن $0 < a_{n+1} < a_n$ لكل عدد موجبn وان $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ فان الخطأ الناتج من مجموع اخذ أول k من الحدود كتقريب لمجموع المتسلسلة اللانهائية المتناوبة هو اقل من a_{k+1} ، الذي هو القيمة المطلقة لأول حد من الحدود المهملة.

تعريف(4.3.5)

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها متقاربة مطلقا أو تقترب بصوره مطلقه(Absolutely convergent) إذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة . و يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ بأنها متقاربة شرطياً أو تقترب بصورة مشروطة(Conditionally Convergent) إذا كانت المتسلسلة اللانهائية متقاربة ولكنها ليست متقاربة مطلقاً (إي أن المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة).

مثل (5.3.5)

(1) المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ متقاربة مطلقا لان المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ متقاربة

(2) المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ متقاربة ولكن المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ متباعدة وعليه المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ متقاربة شرطيا.

مبرهنة(6.3.5)

كل متسلسلة لانهائية متقاربة مطلقا تكون متقاربة والعكس غير صحيح دائما ،أي إذا كانت المتسلسلة اللانهائية متقاربة فليس بالضرورة إن تكون متقاربة مطلقاً .

البرهان :

المبرهنة الآتية تبين أهمية التقارب المطلق

مبرهنة(7.3.5)

لتكن$a_n \neq 0$ لكل قيم n وليكن $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = P$ حيث $P \in R$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون

(1)متقاربة مطلقاً إذا كان$P < 1$. متباعدة إذا كان$P > 1$.

وفي حالة$P = 1$ فان الاختبار يكون فاشل

البرهان:

نفس برهان المبرهنة (12.2.5)

مبرهنة(8.3.5)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة لانهائية ولتكن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة تحصل عليها من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بإعادة ترتيب حدود المتسلسلة بأية طريقة كانت .إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارباً مطلقاً إلى S فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تكون متقاربة مطلقاً أيضاً ولنفس المجموع S .

4.5 ضرب المتسلسلات اللانهائية Product Infinites Series

لتكن كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائية وليكن $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

$$S_n T_n = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$$

يرمز للمتسلسلة اللانهائية التي متتابعة المجاميع الجزئية لها هي المتتابعة $\{S_n T_n\}$ بالرمز $\sum P_n$ فأن

$$S_n T_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

$$\begin{aligned} P_n &= S_n T_n - S_{n-1} T_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) \\ &= ((a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n)((b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) b_n + a_n (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + a_n b_n = S_{n-1} b_n + a_n T_n \end{aligned}$$

$$\Leftarrow \quad P_n = S_{n-1} b_n + a_n T_n$$

مما تقدم نستطيع إن نقول إذا كانت $S_n \to S$ ، $T_n \to T$ فان المتسلسلة $\sum P_n$ متقاربة وأن $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = ST$.

مبرهنة(1.4.5)

إذا كانت كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائية متقاربة مطلقاً فان ضرب المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ يكون أيضا متقاربة مطلقاً وكذلك $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = ST$ حيث $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$.

الآن نتطرق إلى تعريف آخر لضرب المتسلسلات والذي يسمى ضرب كوشي .

تعريف(2.4.5)

لتكن كل من $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة لانهائية تسمى المتسلسلة $\sum C_n$ بضرب كوشي للمتسلسلتين $\sum a_n, \sum b_n$ إذا كان $C_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.

مبرهنة(3.4.5)

لتكن كل من $\sum a_n, \sum b_n$ متسلسلة لانهائية .

(1) إذا كانت كل من $\sum a_n, \sum b_n$ متقاربة مطلقا فان ضرب كوشي $\sum C_n$ يكون متقاربا مطلقاً وان $\sum C_n = (\sum a_n)(\sum b_n) = ST$.

(2) إذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum a_n$ متقاربة مطلقاً وان $\sum a_n = S$ وكانت المتسلسلة اللانهائية $\sum b_n$ متقاربة وان $\sum b_n = T$ فان ضرب كوشي $\sum C_n$ يكون متقارب وان $\sum C_n = ST$.

البرهان :

تمارين(5)

ر 331
تحليل رياضي (1) Mathematical Analysis I
نظري : 3   مناقشة : 1   عدد الوحدات : 3

6. الاستمرارية Continuity

الاستمرارية من المفاهيم المهمة في الرياضيات

1.6 تعريف وأمثلة Definitions and Examples

تعريف (1.1.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا. يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها مستمرة(Continuous)عند النقطة $x_0\in X$ إذا كان لكل مجموعة مفتوحة U في Y تحتوي على النقطة $f(x_0)$ ، توجد مجموعة مفتوحة V في X تحتوي على النقطة x_0 بحيث أن $f(V)\subset U$. يقال عن الدالة f بأنها مستمرة على المجموعة $A\subseteq X$ إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من نقاط A . وبصورة عامة يقال عن الدالة f بأنها مستمرة إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من نقاط X . يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها تشاكل تبولوجي (Homeomorphism) إذا كانت الدالة f تقابلية وكل من f,f^{-1} دالة مستمرة. ويقال عن الفضائيين X,Y بأنهما متشاكلين تبولوجيا (Homeomorphic) إذا وجد تشاكلا تبولوجيا بينهما ويكتب $X\cong Y$.

مبرهنة(2.1.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا . فأن الدالة $f:X\to Y$ تكون مستمرة عند النقطة $x_0\in X$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الأتي :

لكل كرة مفتوحة $_{\text{£}}(f(x_0))$ في Y، توجد كرة مفتوحة $_{\text{¢}}(x_0)$ في X بحيث أن $f(\,_{\text{¢}}(x_0))\subset \,_{\text{£}}(f(x_0))$ وهذا يكافئ الشرط الأتي: لكل $\text{£}>0$، يوجد $\text{¢}>0$ بحيث أن لكل $x\in X$ فان $d_2(f(x),f(x_0))<\text{£} \Leftarrow d_1(x,x_0)<\text{¢}$

البرهان:

نفرض أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0

ليكن $\text{£}>0$. نضع $U=\,_{\text{¢}}(f(x_0))$ $\Leftarrow$ U كرة مفتوحة في Y $\Leftarrow$ U مجموعة مفتوحة في Y تحتوي على النقطة $f(x_0)$.

بما أن f مستمرة عند النقطة x_0 في X $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة V في X تحتوي على النقطة x_0 بحيث أن $f(V)\subset U$.

بما أن V مجموعة مفتوحة في X تحتوي على النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد $\text{¢}>0$ بحيث أن $_{\text{¢}}(x_0)\subset V$

$\Leftarrow$ $f(\,_{\text{¢}}(x_0))\subset f(V)\subset U=\,_{\text{£}}(f(x_0))$

الاتجاه المعاكس

نفرض الشرط في المبرهنة متحقق ونبرهن f مستمرة عند النقطة x_0

ليكن Uمجموعة مفتوحة في Y تحتوي على النقطة $f(x_0)$

$\Leftarrow$ يوجد $\text{£}>0$ بحيث أن $_{\text{£}}(f(x_0))\subset U$ $\Leftarrow$ توجد كرة مفتوحة $_{\text{¢}}(x_0)$ في X بحيث أن $f(\,_{\text{¢}}(x_0))\subset \,_{\text{£}}(f(x_0))$

نضع $V=\,_{\text{¢}}(x_0)$ $\Leftarrow$ V مجموعة مفتوحة في X تحتوي على النقطة x_0 بحيث أن $f(V)=f(\,_{\text{¢}}(x_0))\subset \,_{\text{£}}(f(x_0))=U$. وعليه f مستمرة عند النقطة x_0.

مثال(3.1.6)

ليكن $(\mathbb{R},d)$ فضاء متريا اعتياديا .بين أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ لكل $x\in\mathbb{R}$ تكون مستمرة.

الحل:

ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ وليكن $\varepsilon>0$

$$|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0^2|=|(x-x_0)(x+x_0)|=|x-x_0||x+x_0|$$

بما أن $|x+x_0|\le|x|+|x_0|$

$$|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0|(|x|+|x_0|)\qquad ...(1)$$

بما أن $x=(x-x_0)+x_0 \Leftarrow |x|=|(x-x_0)+x_0| \Leftarrow$

$$|x|\le|x-x_0|+|x_0|$$

$$|x|-|x_0|\le|x-x_0|$$

إذا كان $|x-x_0|<1$ فان $|x|-|x_0|<1$

$$|x|<1+|x_0|\qquad ...(2)$$

من $(1),(2)$ نحصل على

$$|f(x)-f(x_0)|<|x-x_0|(1+2|x_0|)\qquad ...(3)$$

نختار $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$. الآن ليكن $x\in R$ بحيث أن $|x-x_0|<\delta$

$\Leftarrow\ |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$ و $|x-x_0|<1 \ \Leftarrow\ |x-x_0|<(1+2|x_0|)<\varepsilon$

من (3) نحصل على $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \ \Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 وعلية الدالة f مستمرة.

مثال(4.1.6)

ليكن $(\mathbb{R},d)$ فضاء متريا اعتياديا. برهن على أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{x}$ لكل $x\in\mathbb{R}^+$ تكون مستمرة عند النقطة 2.

الحل :

ليكن $\varepsilon>0$

$$|f(x)-f(2)|=\left|\frac{1}{x}-2\right|=\left|\frac{2-x}{2x}\right|=\frac{|2-x|}{2x}\qquad (\text{لان } x>0)$$

إذا كان $|x-2|<1 \ \Leftarrow\ -1<x-2<1 \ \Leftarrow\ 1<x<3 \ \Leftarrow\ x>1 \ \Leftarrow\ \frac{1}{x}<1 \ \Leftarrow\ \frac{|2-x|}{2x}<\frac{1}{2}|2-x|$

نختار $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$. الآن ليكن $x\in\mathbb{R}^+$ بحيث أن $|x-2|<\delta$

$\Leftarrow \quad |x-2|<2£$ و $|x-2|<1 \quad \Rightarrow \quad £ > |x-2|\frac{1}{2}$ ، ومنها نحصل على ان $\quad |f(x)-f(2)|<\frac{1}{2}|2-x|<£$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة 2.

مثال(5.1.6)

ليكن $(\mathbb{R},d)$ فضاء متريا اعتياديا. برهن على أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

مستمرة عند جميع نقاط $\mathbb{R}$ ماعدا النقطة 0.

الحل:

سنبرهن أولا في حالة $x>0$. ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $x_0>0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0)=1$

ليكن $£>0$. حسب كثافة الأعداد النسبية يوجد $r\in\mathbb{R}$ بحيث أن $0<r<x_0$. نضع $¢=x_0-r$

$_{¢}(x_0)=(x_0-¢,x_0+¢)=(r,2x_0-r)$

بما أن $r>0$

$f(\ _{¢}(x_0))=\{1\}$

$_{£}(f(x_0))=(f(x_0)-£,f(x_0)+£)=(1-£,1+£)$

بما أن $1\in(1-£,1+£) \quad \Rightarrow \quad f(\ _{¢}(x_0))\subseteq\ _{£}(f(x_0))$

وبالمثل نبرهن في حالة $x<0$ ، (تلميح نضع $¢=r-x_0$).

وأخيرا نبرهن الدالة غير مستمرة عند النقطة 0 ، نبرهن على أنة يوجد $£>0$ بحيث أن لكل $¢>0$ فان

$f(\ _{¢}(0))\not\subset\ _{£}(f(0))$

نأخذ $£=\frac{1}{2}$

$_{£}(f(0))=(f(0)-£,f(0)+£)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

ليكن $¢>0$

$_{¢}(0)=(-¢,¢)$

$f(\ _{¢}(0))=f((-¢,¢))=f((-¢,0))\cup f(\{0\})\cup f((0,¢))=\{-1,0,1\}$

بما أن $-1\notin\ _{£}(f(0)) \quad \Rightarrow \quad f(\ _{¢}(0))\not\subset\ _{£}(f(0)) \quad \Rightarrow \quad f$ غير مستمرة عند النقطة 0.

مبرهنة(6.1.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ، ولتكن $f:X\to Y$ دالة فأن العبارات الآتية متكافئة

(1) الدالة f مستمرة (2) إذا كانت G مجموعة مفتوحة في Y فأن المجموعة $f^{-1}(G)$ تكون مفتوحة في X

(3) إذا كانت H مجموعة مغلقة في Y فأن المجموعة $f^{-1}(H)$ تكون مغلقه في X

(4) $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ لكل $A\subset X$ (5) $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$ لكل $B\subset Y$ (6) $f^{-1}(B^{\circ})\subseteq(f^{-1}(B))^{\circ}$ لكل $B\subset Y$

البرهان:

$(2)\Leftarrow(1)$

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y. إذا كانت $f^{-1}(G)=\emptyset$ ينهي البرهان. أما إذا كانت $f^{-1}(G)\neq\emptyset$. ليكن $x\in f^{-1}(G)\Rightarrow f(x)\in G$. بما أن G مجموعة مفتوحة في Y $\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon>0$ بحيث $_{\varepsilon}(f(x_0))\subset G$

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ f مستمرة في x

$\Leftarrow$ توجد كرة مفتوحة $_{\delta}(x)$ في X بحيث أن $f(\ _{\delta}(x))\subset\ _{\varepsilon}(f(x))\subset G$.

$\Leftarrow$ $_{\delta}(x)\subseteq f^{-1}(G)$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X .

$(3)\Leftarrow(2)$

لتكن H مجموعة مغلقة في Y $\Leftarrow$ المجموعة $H^c=Y\setminus H$ مفتوحة في Y باستخدام (2) نحصل على المجموعة $f^{-1}(H^c)$ تكون مفتوحة في X . ولكن $f^{-1}(H^c)=f^{-1}(Y\setminus H)=X\setminus f^{-1}(H)$

$\Leftarrow$ المجموعة $X\setminus f^{-1}(H)$ مفتوحة في X $\Leftarrow$ المجموعة $f^{-1}(H)$ مغلقة في X

$(4)\Leftarrow(3)$

لتكن $A\subset X \Rightarrow f(A)\subset Y \Rightarrow$ المجموعة $\overline{f(A)}$ مغلقة في Y

باستخدام (3) نحصل على أن المجموعة $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ تكون مغلقة في X

بما أن $f(A)\subset\overline{f(A)} \Rightarrow A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$

بما إن $\overline{A}$ اصغر مجموعة مغلقة في X وتحتوي على $A \Rightarrow \overline{A}\subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \Rightarrow f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$

$(5)\Leftarrow(4)$

لتكن $B\subset Y \Rightarrow f^{-1}(B)\subset X$

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\subseteq\overline{f\left(f^{-1}(B)\right)}\subseteq\overline{B}$$

$$\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right)\subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right)$$

برهان $(5)\Rightarrow(6)\Rightarrow(1)$ يترك للقارئ

مبرهنة(7.1.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2),(Z,d_3)$ فضاءً مترياً ولتكن كل من $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ دالة مستمرة فأن الدالة $g\circ f:X\to Z$ تكون مستمرة

البرهان:

لتكن G مجموعة مفتوحة في Z .

بما إن الدالة $g:Y\to Z$ مستمرة $\Leftarrow$ المجموعة $g^{-1}(G)$ تكون مفتوحة في Y

بما أن الدالة $f:X\to Y$ مستمرة $\Leftarrow$ المجموعة $f^{-1}\left(g^{-1}(G)\right)$ مفتوحة في X .

لكن $f^{-1}\left(g^{-1}(G)\right)=\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(G)=(g\circ f)^{-1}(G)$

$\Leftarrow$ المجموعة $(g\circ f)^{-1}(G)$ تكون مفتوحة في X ، $\Leftarrow$ $g\circ f$ مستمرة

مثال(8.1.6)

ليكن كل $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ولتكن $f:X\to Y$ دالة. برهن على أن

(1) إذا كانت الدالة f ثابتة فأنها مستمرة (2) إذا كانت الفضاء المتري (X,d_1) مبعثر فان f مستمرة

الحل

(1) بما أن الدالة f ثابتة $\Leftarrow$ يوجد $b\in Y$ بحيث أن $f(x)=b$ لكل $x\in X$

نفرض G مجموعة مفتوحة في Y

$$f^{-1}(G)=\begin{cases}\phi, & b\notin G\\ X, & b\in G\end{cases}$$

بما أن كل من ϕ, X مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ f مستمرة

(2)

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)\subseteq X$

بما أن (X,d_1) مبعثر $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ f مستمرة

مبرهنة(9.1.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة. أذا كان (Z,d_Z) فضاءً جزئيا من الفضاء المتري (X,d_1) فأن f_Z مقصور الدالة f على Z تكون مستمرة

البرهان:

بما أن الدالة $f_Z:Z\to Y$ هي مقصور الدالة f على Z $\Leftarrow$ $f_Z(x)=f(x)$ لكل $x\in Z$

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $Z\cap f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Z

بما أن $f_Z^{-1}(G)=Z\cap f^{-1}(G)$ حسب تعريف f_Z

$\Leftarrow$ المجموعة $f_Z^{-1}(G)$ مفتوحة في Z $\Leftarrow$ f_Z مستمرة.

2.6 الاستمرارية التتابعية Sequentially Continuity

تعريف(1.2.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا . يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها مستمرة تتابعيا عند النقطة $x_0\in X$ إذا كانت كل متتابعة $\{x_n\}$ في X بحيث أن $x_n\to x_0$ فان $f(x_n)\to f(x_0)$ في Y

مبرهنة(2.2.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا .فان الدالة $f:X\to Y$ مستمرة عند النقطة $x_0\in X$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة تتابعيا عند تلك النقطة.

البرهان

نفرض الدالة f مستمرة في النقطة x_0 .ولتكن $\{x_n\}$ متتابعة في X بحيث أن $x_n\to x_0$. يجب أن نبرهن أن $f(x_n)\to f(x_0)$: ليكن $\varepsilon>0$ ،بما أن f مستمرة في النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد $\delta>0$ بحيث لكل $x\in X$

$$d_1(x,x_0)<\delta \Rightarrow d_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

بما أن $x_n \to x_0$, $¢ > 0$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $d_1(x_n, x_0) < ¢$ لكل $n > k$
وعليه فأن $d_2(f(x_n), f(x_0)) < £$ لكل $n > k$. ومن ذلك ينتج أن $f(x_n) \to f(x_0)$ ، وهذا يعني أن الدالة f مستمرة تتابعينا عند النقطة $x_0 \in X$.
وبالعكس .نفرض أن الدالة f مستمرة تتابعينا عند النقطة $x_0 \in X$. ونبرهن أن f مستمرة في النقطة x_0 . سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض أن f غير مستمرة عند النقطة x_0 .
$\Leftarrow$ يوجد $£ > 0$ بحيث لكل $¢ > 0$ يوجد $x \in X$ وان $d_1(x, x_0) < ¢ \Leftarrow d_2(f(x), f(x_0)) \geq £$
$\Leftarrow$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ يوجد $x_n \in X$ بحيث آن $d_1(x, x_0) < \frac{1}{n} \Leftarrow d_2(f(x), f(x_0)) \geq £$
وهذا يعني أن $x_n \to x_0$ في X ولكن $f(x_n) \not\to f(x_0)$ في Y وهذا تناقض $\Leftarrow$ f مستمرة في النقطة x_0 .

مثال(3.2.6)
ليكن $(\mathbb{R}, d)$ فضاء متريا اعتياديا. بين ان الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

غير مستمرة عند النقطة 0.
الحل:
نأخذ $x_n = \frac{1}{n}$ $\Leftarrow$ المتتابعة $\{x_n\}$ في R وان $x_n \to 0$
بما أن $\frac{1}{n} > 0$ لكل $n \in Z^+$ $\Leftarrow$ $f(\frac{1}{n}) = 1$ $\Leftarrow$ $f(x_n) = 1$
$\Leftarrow$ $f(x_n) \to 1$ $\Leftarrow$ $f(x_n) \not\to f(0) = 0$ $\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة عند النقطة 0.

مثال(4.2.6)
ليكن $(\mathbb{R}, d)$ فضاء متريا اعتياديا. بين أن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \cap [a,b] \\ 2, & x \in [a,b], x \notin Q \end{cases}$$

غير مستمرة عند جميع نقاط الفترة $[a,b]$ حيث Q تمثل مجموعة الأعداد النسبية.
الحل:
ليكن $x \in [a,b]$
(1) إذا x عددا نسبيا فان $f(x) = 1$ ، توجد متتابعة $\{x_n\}$ من الأعداد غير النسبية في $[a,b]$ بحيث $x_n \to x$
بما أن x_n عدد غير نسبي لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ $\Leftarrow$ $f(x_n) = 2$ لكل $n \in Z^+$
$\Leftarrow$ $f(x_n) \not\to 1$ ، أي أن $f(x_n) \not\to f(x)$
الدالة f غير مستمرة عند النقطة x $\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة عند كل عدد نسيبي في $[a,b]$
(2) إذا x عددا غير نسبيا فان $f(x) = 2$
توجد متتابعة $\{x_n\}$من الأعداد النسبية في $[a,b]$ بحيث $x_n \to x$

بما أن x_n عدد نسبي لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ $\Leftarrow$ $f(x_n)=1$ لكل $n \in Z^+$

$\Leftarrow$ $f(x_n) \not\to 2$ ، أي أن $\Leftarrow$ $f(x_n) \not\to f(x)$

الدالة f غير مستمرة عند النقطة x $\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة عند كل عدد غير نسيبي في $[a,b]$

$\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة عند جميع نقاط الفترة $[a,b]$

مبرهنة(5.2.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية في X . إذا كانت كل من $f:X \to Y,\ g:X \to Y$ دالة مستمرة بحيث أن $f(x)=g(x)$ لكل $x \in A$ فان $f(x)=g(x)$ لكل $x \in \overline{A}$

البرهان:

ليكن $x \in \overline{A}$ $\Leftarrow$ توجد متتابعة $\{x_n\}$ في A بحيث أن $x_n \to x$

بما أن كل من $f:X \to Y,\ g:X \to Y$ دالة مستمرة $\Leftarrow$ $f(x_n) \to f(x), \quad g(x_n) \to g(x)$

بما أن $x_n \in A$ لكل $n \in Z^+$ $\Leftarrow$ $f(x_n)=g(x_n)$ لكل $n \in Z^+$

$\Leftarrow$ كل من $\{f(x_n)\},\{g(x_n)\}$ متتابعة واحدة (أي نفس المتتابعة)

بما أن التقارب وحيد $\Leftarrow$ $f(x)=g(x)$ وعلية فان $f(x)=g(x)$ لكل $x \in \overline{A}$

3.6 الاستمرارية المنتظمة Uniform Continuity

تعريف(1.3.6)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا. يقال عن الدالة $f:X \to Y$ بأنها مستمرة بانتظام على X إذا تحقق الشرط الأتي : لكل $0 < £$، يوجد $0 < ¢$ بحيث أن لكل $x,y \in X$ فان

$$d_1(x,y) < ¢ \quad \Rightarrow \quad d_2(f(x),f(y)) < £$$

مبرهنة(2.3.6)

كل دالة مستمرة بانتظام تكون مستمرة والعكس غير صحيح دائما.

البرهان:

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ، ولتكن الدالة $f:X \to Y$ مستمرة بانتظام . ليكن $x_0 \in X$، يجب أن نبرهن على أن الدالة f تكون مستمرة عند النقطة x_0

ليكن $0 < £$

بما أن الدالة f مستمرة بانتظام $\Leftarrow$ يوجد $0 < ¢$ بحيث أن لكل $x,y \in X$ فان

$$d_1(x,y) < ¢ \quad \Rightarrow \quad d_2(f(x),f(y)) < £$$

بما أن $x_0 \in X$ $\Leftarrow$ لكل $x \in X$ فان $d_1(x,x_0) < ¢$ يؤدي إلى $d_2(f(x),f(x_0)) < £$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 وعلية الدالة f مستمرة لان النقطة x_0 لا على التعين في X

والمثال التالي يوضح العكس غير صحيح دائما

مثال(3.3.6)

ليكن $(\mathbb{R},d)$ فضاء متريا اعتياديا ولتكن الدالة $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ لكل $x \in \mathbb{R}$ فأنها مستمرة (راجع المثال (3.1.6)) ولكنها ليست مستمرة بانتظام كما موضح في الأتي :

سوف نبرهن يوجد $0 < £$ بحيث لكل $0 < ¢$ يوجد $x,y \in \mathbb{R}$ وان

$|f(x)-f(y)|>£$ يودي إلى $|x-y|<¢$

ليكن $¢>0$، باستخدام خاصية ارخميدس يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\frac{1}{k}<¢$

نضع $x=k,\quad y=k+\frac{1}{k} \quad\Leftarrow\quad |x-y|=\frac{1}{k}<¢$ ولكن $|f(x)-f(y)|=2+\frac{1}{k^2}>2$

$\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة بانتظام .

4.6 الدوال ذات القيم الحقيقية Real-Valued Functions

الدوال التي مستقرها مجموعه جزئية من مجموعة الإعداد الحقيقية تسمى بالدوال ذات القيم الحقيقية. سوف نرمز للدوال ذات القيم الحقيقية والمعرفة على المجموعة X بالرمز $RV(X)$، أي أن $RV(X)=\{f:X\to R,$ دالة $f\}$. في هذا البند سوف نتطرق إلى الدوال المستمرة والمعرفة من الفضاء المتري (X,d) إلى الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$ ونرمز لمجموعة هذه الدوال بالرمز $C(X)$.

تعريف(1.4.6)

ليكن $f,g\in RV(X)$, $ª\in R$, نعرف $f+g$, $ªf$, fg, $\frac{f}{g}$, $|f|$, كالأتي

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (ª\ f)(x)=ª\ f(x),\quad (fg)(x)=f(x)g(x),\quad |f|(x)=|f(x)|$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0,$$

لكل $x\in X$

مبرهنة(2.4.6)

إذا كانت $f,g\in C(X)$, $ª\in R$, فان

(1) $f+g\in C(X)$ (2) $ª\ f\in C(X)$ (3) $f\,g\in C(X)$

(4) $\frac{f}{g}\in C(X)$ عندما $g(x)\neq 0$ لكل $x\in X$ (5) $|f|\in C(X)$

البرهان:

لتكن $x_0\in X$ وليكن $£>0$

بما أن $f,g\in C(X)$ $\Leftarrow$ كل من $f:X\to\mathbb{R}$ ،$g:X\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة $\Leftarrow$ كل من g,f مستمرة عند النقطة x_0

بما أن الدالة $f:X\to\mathbb{R}$ مستمرة عند النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد $¢_1>0$ بحيث أن لكل $x\in X$ فان $d(x,x_0)<¢_1$ يؤدي إلى $|f(x)-f(x_0)|<\frac{£}{2}$ وكذلك الدالة $g:X\to\mathbb{R}$ مستمرة عند النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد جوار $0<¢_2$ بحيث أن لكل $x\in X$ فان $d(x,x_0)<¢_2$ يؤدي إلى $|g(x)-g(x_0)|<\frac{£}{2}$

نضع $¢=\min\{¢_1,¢_2\} \Rightarrow ¢>0$: لكل $x\in X$ فان $d(x,x_0)<¢$

$$(f+g)(x)-(f+g)(x_0)=(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))=(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))$$

$$\left|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)\right|=\left|\left(f(x)-f(x_0)\right)+\left(g(x)-g(x_0)\right)\right|\le\left|f(x)-f(x_0)\right|+\left|g(x)-g(x_0)\right|<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

$\Leftarrow$ الدالة $f+g$ مستمرة عند النقطة x_0 وعليه مستمرة في جميع نقاط X $\Leftarrow f+g\in C(X)$ وبالمثل نبرهن $(5),(4),(3),(2)$.

ملاحظه

من المبرهنة أعلاه نستنتج على أن كل دالة متعددة حدود P حيث $p(x)=a_\circ+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ تكون دالة مستمرة

5.6 خاصية القيمة المتوسطة Intermediate Value Property

تعريف(1.5.6)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاءً متريا اعتياديا . يقال عن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بأنها تحقق خاصية القيمة المتوسطة إذا كان لكل $x,y\in[a,b]$ ولكل s يقع بين $f(x),f(y)$ يوجد z بين x,y ، بحيث أن $f(z)=s$.

مثال(2.5.6)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاءً متريا اعتياديا ولتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x$ لكل $x\in[a,b]$ فان الدالة تحقق خاصية القيمة المتوسطة

الحل :

ليكن $x,y\in[a,b]$ بحيث أن $x<y$ وليكن s يقع بين $f(x),f(y)$ ، أي أن $f(x)<s<f(y)$

بما أن $f(x)=x$ لكل $x\in[a,b]$ $\Leftarrow$ $x<s<y$

بما أن $f(s)=s$ $\Leftarrow$ f تحقق خاصية القيمة المتوسطة

المبرهنة التالية تبين أن الدالة المستمرة تحقق خاصية القيمة المتوسطة على كل فترة مغلقة في منطلقها .

مبرهنة (3.5.6) مبرهنة القيمة المتوسطة (Intermediate value theorem)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاءً متريا اعتياديا . إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة فان لكل عدد حقيقي s يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد z في الفترة $[a,b]$ بحيث أن $f(z)=s$.

البرهان :

لتكن s يقع بين $f(a)$ و $f(b)$

(1) إذا كانت $f(a)<f(b)$ فان $f(a)<s<f(b)$ ، لتكن $\mathrm{I}=[a,b]$ ، $m=\dfrac{a+b}{2}$

إذا كان $f(m)=s$ ، ففي هذه الحالة يكون $z=m$ وينتهي البرهان ، أما إذا كانت $f(m)\ne s$

فانه أما $f(m)>s$ أو $f(m)<s$

- إذا كانت $f(m)<s$ ، نضع $\mathrm{I}_1=[a_1,b_1]=[m,b]$

$$f(a_1)=f(m)<s<f(b)=f(b_1)$$
$$f(a_1)<s<f(b_1)$$
$$|\mathrm{I}_1|=b-m=b-\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}|\mathrm{I}|$$

أما إذا كانت $f(m)>s$ ، نضع $\mathrm{I}_1=[a_1,b_1]=[a,m]$

$$f(a_1)=f(a)<s<f(m)=f(b_1)$$
$$f(a_1)<s<f(b_1)$$

$$|I_1| = m - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}|I|$$

ونفس الطريقة ، إذا كانت $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

• إذا كانت $f(m_1) < s$ ، نضع $I_2 = [a_2, b_2] = [m_1, b_1]$

$$f(a_2) = f(m_1) < s < f(b_1) = f(b_2)$$
$$f(a_2) < s < f(b_2)$$
$$|I_2| = b_1 - m_1 = b_1 - \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2}|I_1| = \frac{1}{2^2}|I|$$

أما إذا كانت $f(m_1) > s$ ، نضع $I_2 = [a_2, b_2] = [a_1, m_1]$

$$f(a_2) = f(a_1) < s < f(m_1) = f(b_2)$$
$$f(a_2) < s < f(b_2)$$
$$|I_2| = m_1 - a_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - a_1 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2}|I_1| = \frac{1}{2^2}|I|$$

وبصورة عامة وباستخدام الاستقراء الرياضي نحصل على متتابعة من الفترات المغلقة $I_n = [a_n, b_n]$ بحيث أن

$I_n \subset I_{n-1}$ لكل $n > 1$ وان $f(a_n) < s < f(b_n)$ لكل $n \in Z^+$ وأيضا $|I_n| = \dfrac{|I|}{2^{n-1}}$

بما أن $\dfrac{|I|}{2^{n-1}} \to 0 \quad \Leftarrow \quad |I_n| \to 0$

باستخدام مبرهنة كانتور على الفترات المعشعشة ، يوجد $z \in [a,b]$ بحيث أن $\bigcap_{n \in Z^+} I_n = \{x\}$

الآن : يجب أن نبرهن على أن $f(z) = s$

نبرهن $a_n \to z$ و $b_n \to z$

لكل $\pounds > 0$ حسب خاصية ارخميدس يوجد $k \in Z^+$ ، $k > 1$ بحيث

$$|I| < \pounds \le 2^{k-1}\pounds \quad \Leftarrow \quad |I_n| = \frac{|I|}{2^{n-1}}\pounds \quad \Leftarrow \quad |I_n| < \pounds$$

بما أن $I_n \subset I_{n-1}$ لكل $n > 1 \quad \Leftarrow \quad a_n, b_n \in I_k$ لكل $n > k$

بما أن $z \in I_k$

$|a_n - z| \le |I_k| < \pounds$ و $|b_n - z| \le |I_k| < \pounds$ لكل $n > k$

$\Leftarrow \quad a_n \to z$ و $b_n \to z$

بما أن f مستمرة $\Leftarrow$ f مستمرة عند z

$\Leftarrow \quad f(a_n) \to f(z)$ و $f(b_n) \to f(z)$

بما أن $f(a_n) < s < f(b_n) \quad \Rightarrow \quad f(z) < s < f(z) \quad \Leftarrow \quad f(z) = s$

(2)

وبنفس طريقة (1) نبرهن إذا كان $f(b) < s < f(a)$
وعلية في الحالتين (1) ، (2) يوجد z في الفترة $[a,b]$ بحيث أن $f(z) = s$.

ملاحظة

ليكن $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاءَ متريا اعتياديا . إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة فليس بالضروري أن تكون مستمرة . والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (4.5.6)

ليكن $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاءَ متريا اعتياديا. إذا كانت الدالة $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ معرفة كالأتي:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

فإنها تحقق خاصية القيمة المتوسطة ولكنها غير مستمرة .

هنالك تطبيقات لمبرهنة القيمة المتوسطة وسنذكر منها في الأمثلة التالية

مثال (5.5.6)

ليكن $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاءَ متريا اعتياديا.

(1) إذا كانت الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مستمرة بحيث أن $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، فأنة يوجد $x_0 \in \mathbb{R}$ بحيث أن $f(x_0) = 0$

(2) إذا كانت $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة متعددة حدود من درجة فردية. فان $p(x) = 0$ لها جذر حقيقي واحد على الأقل.

7. التراص و الترابط Compactness and Connectedness

المجموعات المرصوصة، بعض المبرهنات المهمة في التراص، الاستمرارية والتراص، المجموعات المنفصلة، المجموعات المترابطة و المبرهنات المكافئة للترابط، الاستمرارية و الترابط.

1.7 التراص Compactness

تعريف (1.1.7)

لتكن $\mathcal{F}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ عائلة من المجموعات الجزئية من المجموعة X ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن F بأنها غطاء (covering) للمجموعة A إذا كان $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$. بالإضافة إلى ذلك إذا كانت المجموعة الدليلية Λ مجموعة منتهية فأن $\mathcal{F}$ يكون غطاءا منتهياً للمجموعة A. وطبعاً إذا كانت $A=X$ فأن $\mathcal{F}$ يكون غطاء للمجموعة X إذا كان $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$

مثال (2.1.7)

لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2\}$

(1) العائلة $\{\{1\},\{2,3\}\}$ تمثل غطاء إلى A لأن $\{1\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}\Leftarrow A\subseteq\{1\}\cup\{2,3\}$ وان هذا الغطاء منتهي.

(2) العائلة $\{\{2\},\{4,5\}\}$ لا تمثل غطاء إلى A لأن $A\not\subseteq\{2\}\cup\{4,5\}$

(3) العائلة $\{\{1,2\},\{3,4\},\{1,3,5\}\}$ تمثل غطاء إلى A وغطاء إلى X

مثال (3.1.7)

(1) العائلة $\mathcal{F}=\left\{\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]:n\in\mathbb{Z}^+\right\}$ تمثل غطاء غير منتهي إلى المجموعة $A=(0,1)$

(2) العائلة $\mathcal{F}=\{(n,n+3):n\in\mathbb{Z}\}$ تمثل غطاء غير منتهي إلى $\mathbb{R}$

(3) العائلة $\mathcal{F}=\{(n,n+1):n\in\mathbb{Z}\}$ لا تمثل غطاء إلى $\mathbb{R}$.

تعريف (4.1.7)

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة X وليكن كل من $\mathcal{F}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ و $\mathcal{G}=\{B_\beta\}_{\beta\in\Lambda'}$ غطاء إلى المجموعة A.
يقال عن $\mathcal{F}$ بأنه غطاء جزئي (Subcover) من $\mathcal{G}$ إذا كان لكل $\alpha\in\Lambda$ يوجد $\beta\in\Lambda'$ بحيث $A_\alpha=B_\beta$، بعبارة أخرى إذا كانت $\mathcal{F}$ عائلة جزئية من $\mathcal{G}$.

مثال (5.1.7)

كل من $\mathcal{F}=\{(n,n+3),n\in\mathbb{Z}\}$, $\mathcal{G}=\{(r,r+3):r\in\mathbb{R}\}$ غطاء إلى $\mathbb{R}$ وان $\mathcal{F}$ عائلة جزئية من $\mathcal{G}$

تعريف (6.1.7)

لتكن A مجموعة جزية من الفضاء المتري (X,d) وليكن $\mathcal{F}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ غطاء إلى لمجموعة A. يقال عن $\mathcal{F}$ بأنها غطاء مفتوح (Open Cover) إذا كانت A_α مجموعة مفتوحة في X لكل $\alpha\in\Lambda$

مثال(7.1.7)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$ نبرهن على أن العائلة $\mathcal{F}=\left\{\left(\frac{1}{n},2\right):n\in\mathbb{Z}^+\right\}$ تكون غطاء مفتوح إلى المجموعة $A=(0,1)$

الحل:

ليكن $x\in A \Rightarrow 0<x<1$

بما أن $x>0$ حسب خاصية أرخميدس . يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\frac{1}{k}<x$

بما أن $x<1 \Rightarrow x<2 \Rightarrow \frac{1}{k}<x<2 \Rightarrow x\in(\frac{1}{k},2) \Rightarrow x\in\bigcup_{n\in Z^+}(\frac{1}{n},2)$

$\Rightarrow A\subset\bigcup_{n\in Z^+}(\frac{1}{n},2) \Rightarrow \mathcal{F}$ غطاء إلى المجموعة A

بما أن $(\frac{1}{n},2)$ مجموعة مفتوحة لكل $n\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow \mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى A

مثال(8.1.7)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$ كل من

$$\mathcal{F}_1=\{(-n,n):n\in\mathbb{Z}^+\},\quad \mathcal{F}_2=\{(-3n,3n):n\in\mathbb{Z}^+\},\quad \mathcal{F}_3=\{(2n-1,2n+1),(2n,2n+2):n\in\mathcal{F}^+\}$$

تكون غطاء مفتوح إلى $\mathbb{R}$ وكذلك $\mathcal{F}_2$ غطاء جزئي من $\mathcal{F}_1$

مثال(9.1.7)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $A\subseteq X$ بين على أن $\mathcal{F}=\{\{x\}:x\in A\}$ يكون غطاء مفتوح إلى A

الحل:

بما أن $A=\bigcup_{x\in A}\{x\} \Rightarrow \mathcal{F}$ غطاء إلى المجموعة A

بما أن (X,d) فضاء متري مبعثر $\Leftarrow \{x\}$ مجموعة مفتوحة في X لكل $x\in X$

$\Leftarrow \mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة A

تعريف(10.1.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن A بأنها مجموعة مرصوصة (Compact Set) في X إذا كان كل غطاء مفتوح إلى A يحتوي (يمتلك) غطاء جزئي منتهي . بعبارة أخرى إذا كانت $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ وكانت A_α مجموعة مفتوحة في X لكل $\alpha\in\Lambda$ فأنه توجد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ في Λ بحيث أن $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_{\alpha_i}$. وبصورة خاصة يقال عن X بأنة فضاء مرصوص (Compact Space) إذا كان كل غطاء مفتوح إلى X فأنه يحتوي على غطاء جزئي منتهي.

مثال(11.1.7)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$

(1) المجموعة $A=(0,1)$ غير مرصوصة في $\mathbb{R}$

(2) المجموعة $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots,0\right\}$ مرصوصة في $\mathbb{R}$

(3) الفضاء $\mathbb{R}$ غير مرصوص

الحل :

(1) نأخذ $\mathcal{F}=\left\{(\frac{1}{n},2):n\in\mathbb{Z}^+\right\}\Leftarrow \mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى A ولكن لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي $\Leftarrow A$ مجموعة غير مرصوصة

(2) ليكن $\mathcal{F}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة $A \Leftarrow A\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha,\ A_\alpha\in\tau_u$ لكل $\alpha\in\Lambda$

بما أن $0\in A \Leftarrow$ يوجد $\alpha_0\in\Lambda$ بحيث أن $0\in A_{\alpha_0}$

بما أن A_{α_0} مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ، $0\in A_{\alpha_0}\Leftarrow$ يوجد $r>0$ بحيث أن $B_r(0)=(-r,r)\subset A_{\alpha_0}$

بما أن $r>0$ فحسب خاصية أرخميدس يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\frac{1}{k}<r \Leftarrow -r<\frac{1}{n}<r$ لكل $n\geq k$

A_{α_0} تحتوي على جميع عناصر A ماعدا (من المحتمل) العناصر $1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{k}$

ألان لكل من هذه العناصر $\frac{1}{i}$ حيث $i=1,2,\cdots,k-1$ يوجد A_{α_i} بحيث أن $\frac{1}{i}\in A_{\alpha_i}$

$\Leftarrow \{A_{\alpha_0},A_{\alpha_1},\ldots,A_{\alpha_{K-1}}\}$ غطاء جزئي منتهي من الغطاء $\mathcal{F}$ إلى A

(3)

نأخذ $\mathcal{F}=\{(-n,n):n\in\mathbb{Z}^+\}\Leftarrow\mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى $\mathbb{R}$

سنبرهن بطريقة التناقض على أن $\mathcal{F}$ لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي

نفرض $\{G_{n_1},G_{n_2},\cdots,G_{n_k}\}$ غطاء جزئي منتهي إلى $\mathcal{F} \Leftarrow G_{n_r}=(-n_r,n_r)$ لكل $r=1,2,\ldots,k$

نضع $n_0=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}\Leftarrow n_0\notin G_{n_r}$ لكل $r=1,2,\cdots,k$

ولكن $n_0\in\mathbb{Z}\Leftarrow\{G_{n_1},G_{n_2},\cdots,G_{n_k}\}$ ليس غطاء إلى $\mathbb{R}$. وهذا تناقض

$\Leftarrow\mathcal{F}$ لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي وعلية $\mathbb{R}$ ليس فضاء مرصوص

مثال(12.1.7)

كل فضاء متري متماسك يكون متراص لأن الغطاء المفتوح الوحيد إلى X هو $\{X\}$

مبرهنة(13.1.7)

كل مجموعة منتهية في فضاء متري تكون مرصوصة

البرهان:

لتكن A مجموعة منتهية في الفضاء المتري (X,d) $\Leftarrow$ $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

ليكن $\mathcal{F}=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في X

$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$, G_α مجموعة مفتوحة في X لكل $\alpha\in\Lambda$

بما أن $a_i\in A$ لكل $i=1,2,\cdots,n$ $\Leftarrow$ $a_i\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow$ لكل i توجد $\alpha_i\in\Lambda$ بحيث أن $a_i\in G_{\alpha_i}$ $\Leftarrow$ $\{G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\dots,G_{\alpha_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من $\mathcal{F}$ إلى A

$\Leftarrow$ A مجموعة مرصوصة

مثال(14.1.7)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر، فأن X يكون مرصوص إذا وفقط إذا كانت X منتهية

الحل:

نفرض (X,d) فضاء مرصوص . سنبرهن بطريقة التناقض على أن X مجموعة منتهية

نفرض X مجموعة غير منتهية .بما أن (X,d) فضاء متري مبعثر

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}=\{\{x\}:x\in X\}$ غطاء مفتوح إلى X

ولكن هذا الغطاء لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي لأن X مجموعة غير منتهية .أذن X غير مرصوصة وهذا تناقض. إذن يجب أن تكون X منتهية

الاتجاه الآخر. نفرض X مجموعة منتهية $\Leftarrow$ X فضاء مرصوص حسب مبرهنة (13)

مبرهنة(15.1.7)

ليكن (Y,d_Y) فضاء جزئياً من الفضاء المتري (X,d) ولتكن $A\subset Y$، فأن المجموعة A تكون مرصوصة في X إذا وفقط إذا كانت مرصوصة في Y.

البرهان

نفرض المجموعة A مرصوصة في X

ليكن $\mathcal{G}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في Y $\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha$, V_α مجموعة مفتوحة في Y لكل $\alpha\in\Lambda$

$\Leftarrow$ توجد G_α مجموعة مفتوحة في X بحيث أن $V_\alpha=G_\alpha\cap Y$ لكل $\alpha\in\Lambda$

$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ $\Leftarrow$ $\mathcal{F}=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في X

بما أن المجموعة A مرصوصة في X $\Leftarrow$ توجد $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\Lambda$ بحيث أن $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}$

بما آن $A\subset Y$ $\Leftarrow$ $A\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}\right)\cap Y$ $\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left(G_{\alpha_i}\cap Y\right)$

$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_{\alpha_i}$ $\Leftarrow$ المجموعة A مرصوصة في Y

الاتجاه الآخر. نفرض المجموعة A مرصوصة في Y : لتكن $\mathcal{F}=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\alpha}$ غطاء مفتوح إلى A في X

$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$, G_α مجموعة مفتوحة في X لكل $\alpha\in\Lambda$

$\Leftarrow$ $G_\alpha \cap Y$ مجموعة مفتوحة في Y لكل $\alpha \in \Lambda$

بما أن $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, $A \subseteq Y \Leftarrow A \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha\right) \cap Y$

$\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (G_\alpha \cap Y) \Leftarrow \{G_\alpha \cap Y\}_{\alpha \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في Y

بما أن المجموعة A مرصوصة في Y $\Leftarrow$ توجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ بحيث أن

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y) \Leftarrow A \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}\right) \cap Y \Leftarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

$\Leftarrow$ $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من الغطاء $\mathcal{F}$ إلى A في X $\Leftarrow$ المجموعة A مرصوصة في X .

ملاحظة

استناداً إلى المبرهنة أعلاه. المجموعة الجزئية Y من الفضاء المتري X تكون مرصوصة في X إذا فقط إذا كانت Y فضاء مرصوص بالنسبة للفضاء النسبي d_Y على Y. وعليه التراص ليس خاصية نسبيه أو وراثية (Relative Property)

مبرهنة (16.1.7)

كل مجموعة مغلقة في فضاء متري مرصوص تكون مرصوصة

البرهان

لتكن A مجموعة مغلقة في الفضاء المتري المرصوص (X,d). يجب أن نبرهن على أن A مجموعة مرصوصة .

ليكن $\mathcal{F} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة A في X $\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, G_α مجموعة مفتوحة في X لكل $\alpha \in \Lambda$

بما أن A مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ A^c مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}' = A^c \cup \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة $A \cup A^c$ ولكن $X = A \cup A^c$ $\Leftarrow$ $\mathcal{F}'$ غطاء مفتوح إلى X

بما أن X فضاء مرصوص $\Leftarrow$ يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ بحيث أن $X = A^c \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}\right)$

بما أن $A \subseteq X \Leftarrow A \subseteq A^c \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}\right)$

بما أن $A \cap A^c = \emptyset$ $\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ $\Leftarrow$ $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من الغطاء F إلى A .

$\Leftarrow$ A مجموعة مرصوصة في X

مبرهنة(17.1.7)

كل مجموعة مرصوصة في فضاء متري تكون مغلقة ومقيدة

البرهان :

لتكن A مجموعة مرصوصة في الفضاء المتري (X,d). يجب أن نبرهن على أن المجموعة A مغلقة ومقيدة في X .

سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض المجموعة A لبست مغلقة $\Leftarrow$ $A' \not\subset A$ $\Leftarrow$ يوجد $x \in A'$ بحيث أن

$x \notin A$ $\Leftarrow$ لكل مجموعة مفتوحة G في X بحيث $x \in G$ فان $A \cap (G \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

بما أن كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ فان $A \cap (B_{\frac{1}{n}}(x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

بما أن $\overline{N_{\frac{1}{n}}(x)} = \{y \in X : d(x,y) \le \frac{1}{n}\}$ ، $N_{\frac{1}{n}}(x) = \{y \in X : d(x,y) < \frac{1}{n}\}$ فان $A \cap (\overline{N_{\frac{1}{n}}(x)} \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

نضع $G_n = (\overline{N_{\frac{1}{n}}(x)})^c \Leftarrow G_n$ مجموعة مفتوحة في X لكل $n \in \mathbb{Z}^+ \Leftarrow G = \bigcap_{n \in Z^+} G_n = \{x\}$

$$A \subseteq X \setminus \{x\} = X \setminus \bigcap_{n \in Z^+} G_n = X \cap (\bigcap_{n \in Z^+} G_n)^c = X \cap (\bigcup_{n \in Z^+} G_n^c) = X \cap (\bigcup_{n \in Z^+} \overline{N_{\frac{1}{n}}(x)}) = \bigcup_{n \in Z^+} (X \setminus \overline{N_{\frac{1}{n}}(x)}) = \bigcup_{n \in Z^+} G_n$$

$\Leftarrow \{G_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ غطاء مفتوح إلى A

بما أن المجموعة A مرصوصة $\Leftarrow$ يوجد عدد صحيح k بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_i$

$\Leftarrow A \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_k \Leftarrow A \subseteq G_k \Leftarrow A \cap N_{\frac{1}{k}}(x) = \emptyset$

وهذا تناقض $\Leftarrow A$ مجموعة مغلقة في X.

الآن نبرهن المجموعة A مقيدة : ليكن $x_0 \in X \Leftarrow N_n(x_0)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $n \in \mathbb{Z}^+$

ليكن $x_0 \in A$ ، نضع $d(x, x_0) = \varepsilon$ ، بما أن $x \neq x_0 \Leftarrow d(x, x_0) > 0$

باستخدام خاصية أرخميدس يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $\frac{1}{k} > \varepsilon \Leftarrow d(x, x_0) > \frac{1}{k}$ لكل $x \neq x_0 \Leftarrow A \subseteq \bigcup_{k \in Z^+} N_k(x)$

بما أن A مجموعة مرصوصة $\Leftarrow$ يوجد عدد صحيح m بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} N_i(x)$

$\Leftarrow A \subseteq N_1(x) \subseteq N_2(x) \subseteq \cdots \subseteq N_m(x) \Leftarrow A \subseteq N_m(x)$

يوجد $m \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن تحتوي على x وان $A \subseteq V$ ، $U \cap V = \emptyset \Leftarrow A$ مجموعة مقيدة في X.

ملاحظة

عكس هذه المبرهنة ليس صحيح دائما، بعبارة أخرى، ليس بالضرورة أن تكون كل مجموعة مغلقة ومقيدة في فضاء متري تكون مرصوصة.

خاصية هاين بوريل :

يقال للفضاء المتري بأنه يحقق خاصية هاين بوريل إذا كانت كل مجموعة مقيدة ومغلقة فيه تكون مرصوصة

مبرهنة(18.1.7)

الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ يحقق خاصية هاين بوريل.

البرهان:

لتكن A مجموعة مغلقة ومقيدة في $\mathbb{R}^n$.

يجب أن نبرهن A مجموعة مرصوصة في $\mathbb{R}^n$ (يترك للقارئ)

تعريف (19.1.7)

يقال عن عائلة من المجموعات بأنها تحقق خاصية التقاطع المنتهي (Finite Intersection Properly) إذا كان تقاطع كل عائلة جزئية منتهية منها مجموعة غير خالية

مبرهنة(20.1.7)

الفضاء المتري (X, d) يكون مرصوصاً إذا وفقط إذا كانت كل عائلة من مجموعات مغلقة فيه وتحقق خاصية التقاطع المنتهي فأنها غير خالية التقاطع

البرهان:

نفرض (X,d) فضاء مرصوص

لتكن $\mathcal{F}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ عائلة من المجموعات المغلقة في X وتحقق خاصية التقاطع المنتهي

سنبرهن بطريقة التناقض . نفرض $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\emptyset \Leftarrow \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c=\emptyset^c$

$\Leftarrow X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha{}^c \Leftarrow \{A^c{}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى X

$\Leftarrow$ يوجد $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\Lambda$ بحيث أن $X=\bigcup_{i=1}^{n}A^c_{\alpha_i} \Leftarrow \emptyset=\bigcap_{i=1}^{n}A_{\alpha_i}$

$\Leftarrow \mathcal{F}$ لا تحقق خاصية التقاطع المنتهي وهذا تناقض $\Leftarrow \bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\neq\emptyset$

الاتجاه الأخر : نفرض كل عائلة من مجموعات مغلقة وتحقق خاصية التقاطع المنتهي فأنها غير خالية التقاطع

ليكن $\mathcal{F}=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى X

$\Leftarrow X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha,\ G_\alpha$ مجموعة مفتوحة في X لكل $\alpha\in\Lambda \Leftarrow \bigcap_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha{}^c=\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha\right)^c=\emptyset$

$\Leftarrow \{G_\alpha{}^c\}_{\alpha\in\Lambda}$ عائلة من مجموعات مغلقة في X بحيث أن $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha{}^c=\emptyset$

وعليه هذه العائلة لا تحقق خاصية التقاطع المنتهي

$\Leftarrow$ يوجد $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\Lambda$ بحيث أن $\bigcap_{i=1}^{n}G^c_{\alpha_i}=\emptyset \Leftarrow X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}^{n}G_{\alpha_i}$

وعليه $\Leftarrow \{G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\dots,G_{\alpha_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من $\mathcal{F}$ إلى $X \Leftarrow (X,\tau)$ فضاء مرصوص.

تعريف (21.1.7)

يقال عن الفضاء المتري (X,d) بأنه مرصوص عدياً (Countable Compact) إذا كان كل غطاء مفتوح وقابل للعد في X يحتوي على غطاء جزئي منتهي

مبرهنة (22.1.7)

الفضاء المتري (X,d) يكون مرصوص عدياً إذا وفقط إذا كانت كل عائلة قابلة للعد من مجموعات مغلقة فيه وتحقق خاصية التقاطع المنتهي تكون غير خالية التقاطع

البرهان :

مشابه لبرهان مبرهنة (20.1.7)

2.7 الاستمرارية والتراص Continuity and Compactness

مبرهنة (1.2.7)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا، ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت X فضاء مرصوصا فأن $f(X)$ تكون مجموعة مرصوصة في Y، بعبارة أخرى الصورة المستمرة لفضاء مرصوص تكون مجموعة مرصوصة.

البرهان :

لتكن $\mathcal{F}=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى $f(X)$ في Y $\Leftarrow$ $f(X)\subseteq\bigcup_{\alpha\cup\Lambda}G_\alpha$, $G_\alpha\in\tau_2$ لكل $\alpha\in\Lambda$

$$X\subseteq f^{-1}(f(X))\subseteq f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(G_\alpha)$$

بما أن $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(G_\alpha)\subseteq X$ $\Leftarrow$ $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(G_\alpha)$

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(G_\alpha)$ مجموعة مفتوحة في X **لكل** $\alpha\in\Lambda$ وعليه $\{f^{-1}(G_\alpha)\}$ غطاء مفتوح إلى X .

بما أن X فضاء مرصوص $\Leftarrow$ يوجد $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\Lambda$ بحيث أن $X=\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(G_{\alpha_i})$

$\Leftarrow$ $X=f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i})$ $\Leftarrow$ $f(X)=f(f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}))\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}$ $\Leftarrow$ $f(X)$ مجموعة مرصوصة في Y.

نتيجة(2.2.7)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا ، ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت A مجموعة مرصوصة في X فأن $f(A)$ تكون مجموعة مرصوصة في Y

ملاحظة

ليس بالضرورة أن تكون الصورة العكسية المستمرة لمجموعة مرصوصة تكون مجموعة مرصوصة. المثال التالي يوضح ذلك

مثال(3.2.7)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متريا اعتياديا ولتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=2$ لكل $x\in\mathbb{R}$.نلاحظ أن الدالة f مستمرة لأنها ثابتة والمجموعة $A=\{1,2,3\}$ مرصوصة في $\mathbb{R}$ لأنها منتهية. ولكن $f^{-1}(A)=\mathbb{R}$ ليست مرصوصة

مبرهنة(4.2.7)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا َ بحيث أن $X\cong Y$ ، فان X فضاء مرصوص إذا وفقط إذا كان Y فضاء مرصوص.

البرهان

بما إن $X\cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل $f:X\to Y$: نفرض X فضاء مرصوص

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f(X)$ مجموعة مرصوصة في Y

بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow$ $f(X)=Y$ $\Leftarrow$ Y فضاء مرصوص

الاتجاه الآخر

نفرض Y فضاء مرصوص بما أن الدالة $f^{-1}:Y\to X$ مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(Y)=X$ فضاء مرصوص

مبرهنة (5.2.7)

ليكن (X,d) فضاءَ مرصوصاَ ولتكن $f:X\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة فأن

(1) الدالة f تكون مقيدة

(2) إذا كانت $\sim = \inf\{f(x) : x \in X\}$ $= \sup\{f(x) : x \in X\}$ فأنه يوجد $a,b \in X$ بحيث أن $f(a) = \sim$ $f(b) =$

البرهان:

بما أن X فضاء مرصوص و الدالة f مستمرة $\Rightarrow f(X)$ مجموعة مرصوصة في $\mathbb{R}$

بما أن كل مجموعة مرصوصة في $\mathbb{R}$ تكون مغلقة ومقيدة (مبرهنة هاين ـ بوريل) $\Leftarrow f(X)$ تكون مقيدة

بما أن $f(X)$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد $\in R$,$\sim$ وكذلك بما أن $f(X)$ مغلقة $\Leftarrow$ $\in f(X)$,$\sim$

نختار $a \in f^{-1}(\{\sim\})$, $b \in f^{-1}(\{\ \})$ $\Leftarrow$ $f(a) = \sim$, $f(b) =$

مبرهنة(6.2.7)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا َ ولتكن $f : X \to Y$ دالة مستمرة. إذا كان X فضاء مرصوص فأن f مستمرة بانتظام .

البرهان :

ليكن $£ > 0$: بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ لكل $p \in X$ ، يوجد $¢_p > 0$ بحيث أن لكل $x \in X$

$$d_1(x,p) < ¢_p \quad \text{يؤدي إلى} \quad d_2(f(x), f(p)) < \frac{£}{2}$$

العائلة $\{ _{\frac{1}{2}¢_p}(p) : p \in X\}$ غطاء مفتوح إلى X ، بما أن X فضاءَ مرصوصاَ $\Leftarrow$ توجد $p_1, p_2, \cdots, p_n \in X$ بحيث

أن $X = \bigcup_{i=1}^{n} {}_{\frac{1}{2}¢_{p_i}}(p_i)$: نضع $¢ = \frac{1}{2}\min\{¢_{p_1}, \cdots, ¢_{p_n}\}$ $\Leftarrow$ $¢ > 0$

ليكن $x, y \in X$ بحيث أن $d_1(x,y) < ¢$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ ، $1 \le k \le n$

بحيث أن $x \in {}_{\frac{1}{2}¢_{p_k}}(p_k)$ وعليه $d_1(x,p_k) < \frac{1}{2}¢_{p_k}$ وكذلك

$$d_1(y,p_k) \le d_1(y,x) + d_1(x,p_k) < ¢ + \frac{1}{2}¢_{p_k} \le \frac{1}{2}¢_{p_k}$$

$$d_2(f(x), f(y)) \le d_2(f(x), f(p_k)) + d_2(f(p_k), f(y)) < \frac{£}{2} + \frac{£}{2} = £$$

وعليه لكل $£ > 0$، يوجد $¢ > 0$ بحيث أن لكل $x, y \in X$

$$d_1(x,y) < ¢ \quad \text{يؤدي إلى} \quad d_2(f(x), f(y)) < £$$

$\Leftarrow$ f مستمرة بانتظام .

نتيجة(7.2.8)

ليكن $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاء متريا اعتياديا. إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة فأنها مستمرة بانتظام.

3.7 الترابط Connectedness

المجموعات المنفصلة Separated Sets

تعريف(1.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ، وليكن كل من A, A_1, A_2 مجموعة جزئية من المجموعة X . يقال عن المجموعتين A_1, A_2 بأنها فصل أو تفريق (Separation) إلى المجموعة A إذا تحققت الشروط الآتية:

(1) $A_1 \neq \emptyset,\quad A_2 \neq \emptyset$ (2) $A = A_1 \cup A_2$ (3) كل من A_1, A_2 لا تحتوي على نقطة غاية (Limit point) لأخرى .
والشرط (3) يكافئ الشرط الآتي :

$$A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset,\quad \overline{A_1} \cap A_2 = \emptyset \quad \text{ويكافئ أيضا الشرط} \quad \left(A_2 \cap \overline{A_2}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2\right) = \emptyset$$

ويسمى هذا الشرط بشرط هاوزدورف - لينز للفصل (Hausdorff-Lennes Separation Condition) ومثل هاتين المجموعتين (أي أن A_1, A_2) يقال عنهما إنهما منفصلتان أو مفترقتان (Separated)

مثل(2.3.7)

في الفضاء المتري الاعتيادي $\left(\mathbb{R},{}^{2}{}_{u}\right)$

(1) المجموعتان $A_1 = (-\infty, 0),\quad A_2 = (0,\infty)$ متنافيتان لآن $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ولكنهما غير منفصلتان لآن
$\overline{A_1} \cap A_2 = (-\infty, 0) \cap (0,\infty) = \{0\} \neq \emptyset$

(2) المجموعتان $B_1 = (2,3),\quad B_2 = (3,4)$ منفصلتان لأن $B_1 \neq \emptyset,\quad B_2 \neq \emptyset$ وان
$B_1 \cap \overline{B_2} = (2,3) \cap [3,4] = \emptyset,\quad \overline{B_1} \cap B_2 = [2,3] \cap (3,4) = \emptyset$

مبرهنة(3.3.7)

ليكن (Y, d_Y) فضاءَ جزئياَ من الفضاء المتري (X,d) ولتكن $A,B \subseteq Y$ فأن المجموعتان A,B منفصلتان في Y إذا وفقط إذا كانت منفصلتان في X

البرهان:

$$\left(\overline{A_Y} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B_Y}\right) = \emptyset \iff \left(\left(\overline{A} \cap Y\right) \cap B\right) \cup \left(A \cap \left(\overline{B} \cap Y\right)\right) = \emptyset$$
$$\iff \left(\overline{A} \cap (Y \cap B)\right) \cup \left((A \cap Y) \cap \overline{B}\right) = \emptyset \iff \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = \emptyset$$

مبرهنة (4.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A,B,C,D \subseteq X$ بحيث أن $C \subseteq A,\quad D \subseteq B$ ، إذا كانت A,B منفصلتان فأن C,D منفصلتان

البرهان :

بما أن $C \subseteq A,\quad D \subseteq B \Leftarrow \overline{C} \subseteq \overline{A},\quad \overline{D} \subseteq \overline{B}$

بما أن $\overline{A} \cap B = \emptyset,\quad A \cap \overline{B} = \emptyset \Leftarrow \overline{C} \cap D = \emptyset,\quad C \cap \overline{D} = \emptyset \Leftarrow C,D$ منفصلتان

مبرهنة(5.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A,B \subseteq X$

(1) إذا كانت كل من A,B مجموعة مغلقة في X فأن A,B منفصلتان إذا وفقط إذا كانت $A \cap B = \emptyset$

(2) إذا كانت كل من A,B مجموعة مفتوحة في X فأن A,B منفصلتان إذا وفقط إذا كانت $A \cap B = \emptyset$

البرهان:

(1) نفرض A,B منفصلتان $\Leftarrow$ من التعريف نستنتج أن $A \cap B = \emptyset$

الاتجاه الآخر. نفرض $A \cap B = \emptyset$

بما أن كل من A,B مغلقة $\Leftarrow \overline{A} = A,\quad \overline{B} = B$

$A \cap \overline{B} = A \cap B = \emptyset,\quad \overline{A} \cap B = A \cap B = \emptyset$

$\Leftarrow A,B$ منفصلتان

(2) نفرض A,B منفصلتان $\Leftarrow$ من التعريف نستنتج أن $A\cap B=\emptyset$

الاتجاه الآخر. نفرض $A\cap B=\emptyset$

بما أن كل من A,B مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow$ كل من A^c,B^c مجموعة مغلقة في $X \quad \Leftarrow \quad \overline{A^c}=A^c,\quad \overline{B^c}=B^c$

بما أن $A\cap B=\emptyset \Leftarrow \quad A\subset B^c,\quad B\subset A^c \quad \Leftarrow \quad \overline{A}\subset\overline{B^c}=B^c,\quad \overline{B}\subset\overline{A^c}=A^c$

$\Leftarrow \quad \overline{B}\cap A=\emptyset,\quad \overline{A}\cap B=\emptyset \quad \Leftarrow \quad A,B$ منفصلتان

مبرهنة(6.3.7)

ليكن (X,d) فضاءَ مترياً ولتكن $A,B\subseteq X$ بحيث أن $A\cap B=\emptyset$ فأن A,B منفصلتان إذا وفقط إذا كانت كل من A,B مفتوحة ومغلقة في الفضاء الجزئي $Y=A\cup B$

البرهان :

نفرض A,B مجموعتان منفصلتان في $X \quad \Leftarrow \quad \overline{A}\cap B=\emptyset,\quad A\cap\overline{B}=\emptyset$

$$\overline{A_Y}=\overline{A}\cap Y=\overline{A}\cap(A\cup B)=(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup\emptyset=A$$

$\Leftarrow \; A$ مغلقة في Y وبالمثل نبرهن المجموعة B مغلقة في Y

بما أن $A\cap B=\emptyset,\quad A\cup B=Y \quad \Leftarrow \quad A_Y{}^c=B \Leftarrow A_Y{}^c$ مجموعة مغلقة في $Y \Leftarrow A$ مفتوحة في Y

وبالمثل نبرهن B مجموعة مفتوحة في Y.

الاتجاه الآخر. نفرض كل من A,B مجموعة مفتوحة و مغلقة في Y

$$A=\overline{A_Y}=\overline{A}\cap Y=\overline{A}\cap(A\cup B)=(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup(\overline{A}\cap B)$$

بما أن $A\cap B=\emptyset \quad \Leftarrow \quad \overline{A}\cap B=\emptyset$ وبالمثل نبرهن $A\cap\overline{B}=\emptyset \quad \Leftarrow$ المجموعتان A,B منفصلتان

المجموعات المترابطة (المتصلة) Connected Sets

تعريف(7.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$ يقال عن المجموعة A بأنها غير مترابطة (Disconnected) إذا كانت A تساوي اتحاد مجموعتين منفصلتين. بعبارة أخرى إذا وجدت مجموعتين A_1, A_2 بحيث أن $A_1\neq\emptyset,\; A_2\neq\emptyset$ وان $A_1\cap\overline{A_2}=\emptyset,\quad \overline{A_1}\cap A_2=\emptyset,\quad A=A_1\cup A_2$. ويقال عن المجموعة A بأنها مترابطة (Connected) إذا لم تكن غير مترابطة. وبصورة خاصة يقال عن X بأنه فضاء مترابط (Connected Space) إذا كانت X مجموعة مترابطة.

يتضح من التعريف مباشرة إن كلاً من المجموعة الخالية والمجموعة الأحادية هي مجموعة مترابطة

مبرهنة(8.3.7)

الفضاء المتري (X,d) يكون غير مترابط إذا وفقط إذا توجد مجموعة جزئية فعلية غير خالية A من X بحيث أن A مفتوحة ومغلقة في X

البرهان :

نفرض الفضاء المتري (X,d) غير مترابط $\Leftarrow$ توجد مجموعتين غير خاليتين A,B في X بحيث أن $A\cap\overline{B}=\emptyset$

$A\cup B=X,\quad \overline{A}\cap B=\emptyset$

بما أن $A\subset\overline{A} \Leftarrow A\cap B=\emptyset$

بما أن $A\cup B=X,\quad A\cap B=\emptyset \Leftarrow A=B^c$ و B مجموعة غير خالية $\Leftarrow A$ مجموعة جزئية فعلية غير خالية من X

بما أن $B\subset\overline{B} \Leftarrow A\cup B\subset A\cup\overline{B}$

بما أن $A\bigcup B=X \Leftarrow X\subset A\bigcup\overline{B}$ ولكن $A\bigcup\overline{B}\subset X \Leftarrow A\bigcup\overline{B}=X$

بما أن $A\bigcap\overline{B}=\emptyset\ ,\ A\bigcup\overline{B}=X \Leftarrow$ $A=\left(\overline{B}\right)^{c}$ وبالمثل نبرهن $B=\left(\overline{A}\right)^{c}$

بما أن كل من $\overline{A},\ \overline{B}$ مجموعة مغلقة في $X \Leftarrow$ كل من A,B مجموعة مفتوحة في X

بما أن $A \Leftarrow A=B^{c}$ مجموعة مغلقة في X وعليه A مجموعة جزئية فعلية غير خالية مفتوحة ومغلقة في X

الاتجاه الآخر. لتكن A مجموعة جزئية فعلية غير خالية مفتوحة ومغلقة في X يجب أن نبرهن على أن X غير مترابط

نفرض $B \Leftarrow B=A^{c}$ مجموعة جزئية غير خالية في X وبسهولة يمكن إثبات

$$A\bigcup B=X\ ,\ \ \overline{A}\bigcap B=\emptyset,\ \ A\bigcap\overline{B}=\emptyset$$

$\Leftarrow$ الفضاء X غير مترابط

نتيجة(9.3.7)

الفضاء المتري(X,d) يكون مترابط إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\emptyset,X$ هيما فقط المجموعتين الجزئيتين اللتان تكونان مغلقة ومفتوحة في X .

نتيجة(10.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $Y\subset X$ فأن الفضاء الجزئي (Y,d_{Y}) يكون غير مترابط إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية فعلية غير خالية A في Y بحيث تكون مفتوحة ومغلقة في Y، وبعبارة أخرى إذا وفقط إذا توجد مجموعة مفتوحة G في X ومجموعة مغلقة F في X بحيث أن $A=F\bigcap Y,\ \ A=G\bigcap Y$.

مثال(11.3.7)

الفضاء المتري المبعثر (X,d) يكون غير مترابط إذا كانت X تحتوي على أكثر من عنصر. لان كل مجموعة جزئية فعلية غير خالية من X تكون مغلقة ومفتوحة.

مبرهنة(12.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا . فان العبارات الآتية متكافئة

(1) X فضاء غير مترابط

(2) X يساوي اتحاد مجموعتين غير خاليتين متنافيين مفتوحتين في X .

(3) X يساوي اتحاد مجموعتين غير خاليتين متنافيين مغلقتين في X .

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$

بما أن X فضاء غير مترابط $\Leftarrow$ توجد مجموعة جزئية فعلية غير خالية A من X بحيث أن A مفتوحة ومغلقة في X .

نضع $B \Leftarrow B=A^{c}$ مجموعة مفتوحة في X وان $A\cap B=\emptyset$ وكذلك $A\cup B=X$ وعليه X يساوي اتحاد مجموعتين غير خاليتين متنافيين مفتوحتين في X .

$(2) \Rightarrow (3)$

نفرض A,B مجموعتين غير خاليتين متنافيين مفتوحتين في X وكذلك $A\cup B=X$.

$\Leftarrow$ A^{c},B^{c} مجموعتين مغلقتين في X وان

$$A^{c}\cap B^{c}=(A\cup B)^{c}=X^{c}=\emptyset \quad \text{وكذلك} \quad A^{c}\cup B^{c}=(A\cap B)^{c}=\emptyset^{c}=X$$

$(3) \Rightarrow (1)$

نفرض A,B مجموعتين غير خاليتين متنافيين مغلقتين في X وكذلك $A\cup B=X$.

$\Leftarrow$ $A=B^{c} \Leftarrow A$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة ومغلقة في X .

بما أن $B \neq$ ¤ $\Leftarrow$ A مجموعة جزئية فعلية في X . $\Leftarrow$ X فضاء غير مترابط.

مبرهنة(13.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A \subseteq X$ فان المجموعة A تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا توجد مجموعتين غير خاليتين G و H مفتوحتين (مغلقتين) في X بحيث أن

(1) $A \cap G \neq$ ¤ ، $A \cap H \neq$ ¤ (2) $A \subseteq G \cup H$ ، $G \cap H \subseteq A^c$

البرهان:

المجموعة A تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا توجد مجموعتين غير خاليتين G و H مفتوحتين (مغلقتين) في X بحيث أن $G \cup H = X$

$\Leftarrow$ $G \cap A \neq$ ¤, $H \cap A \neq$ ¤, $(G \cap A) \cap (H \cap A) =$ ¤, $(G \cap A) \cup (H \cap A) = A$

الآن :

$$A \subseteq G \cup H \Leftrightarrow (G \cup H) \cap A = A \Leftrightarrow (G \cap A) \cup (H \cap A) = A$$

$$G \cap H \subseteq A^c \Leftrightarrow (G \cap H) \cap A = \text{¤} \Leftrightarrow (G \cap A) \cap (H \cap A) = \text{¤}$$

مثال(14.3.7)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R}, d_u)$

(1) كل فترة في $\mathbb{R}$ تكون مجموعة مترابطة

(2) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ غير مترابطة لأنه لو أخذنا $G = (-\infty, \frac{1}{2})$ و $H = (\frac{1}{2}, \infty)$ فان

(أ) $G \neq$ ¤ ، $H \neq$ ¤ و $G \cap H =$ ¤ (ب) كل من G و H مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ (ج) $\mathbb{N} \subseteq G \cup H$

(3) مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ غير مترابطة لأنه لو أخذنا $G = (-\infty, \frac{1}{3})$ و $H = (\frac{1}{2}, \infty)$ فان

(أ) $G \neq$ ¤ ، $H \neq$ ¤ و $G \cap H =$ ¤ (ب) كل من G و H مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ (ج) $\mathbb{Z} \subseteq G \cup H$

(4) مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ غير مترابطة لأنه لو أخذنا $G = (-\infty, \sqrt{3})$ و $H = (\sqrt{3}, \infty)$ فان

(أ) $G \neq$ ¤ ، $H \neq$ ¤ و $G \cap H =$ ¤ (ب) كل من G و H مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ (ج) $\mathbb{Q} \subseteq G \cup H$

(5) $\mathbb{R}$ فضاء مترابط

مبرهنة (15.3.7)

الفضاء المتري (X,d) يكون مترابط إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية فعلية A غير خالية من X فان $\partial(A) \neq$ ¤ .

البرهان :

نفرض كل مجموعة جزئية فعلية غير خالية A من X بحيث أن $\partial(A) \neq$ ¤ . يجب أن نبرهن X فضاء مترابط .

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض الفضاء X غير مترابط $\Leftarrow$ باستخدام مبرهنة (8) توجد مجموعة جزئية فعلية A غير خالية من X بحيث ان A مغلقة ومفتوحة في X $\Leftarrow$ $A = \text{int}(A) = \overline{A}$

ولكن $\partial(A) = \overline{A} \mid \text{int}(A)$ $\Leftarrow$ $\partial(A) =$ ¤ وهذا تناقض $\Leftarrow$ X فضاء مترابط .

الاتجاه الأخر : نفرض X مترابط . سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض توجد مجموعة جزئية فعلية غير خالية A من X بحيث أن $\partial(A) =$ ¤ .

$\overline{A}=\text{int}(A)\cup\partial(A)=A\cup\partial(\overline{A}) \Leftarrow \overline{A}=\text{int}(A)=A \Leftarrow A$ مجموعة جزئية فعلية غير خالية مفتوحة ومغلقة في $X \Leftarrow X$ فضاء غير مترابط وهذا تناقض.

مبرهنة(16.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن A مجموعة مترابطة في X. إذا كانت B مجموعة جزئية في X بحيث أن $A\subseteq B\subseteq \overline{A}$ فان B مجموعة مترابطة في X

البرهان :

يترك للقارئ

نتيجة(17.3.7)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن A مجموعة مترابطة في X فان $\overline{A}$ تكون أيضا مجموعة مترابطة في X .

4.7 الاستمرارية والترابط Continuity and Connectedness

مبرهنة(1.4.7)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا، ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت X فضاء مترابط فأن $f(X)$ تكون مجموعة مترابطة في Y ، بعبارة أخرى الصورة المستمرة لفضاء مترابط تكون مجموعة مترابطة.

البرهان:

سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض $f(X)$ مجموعة غير مترابطة في $Y \Leftarrow$ توجد مجموعتين مفتوحتين G_1,G_2 بحيث أن

$$(1)\ G_1\cap f(X)\neq \text{¤},\quad G_2\cap f(X)\neq \text{¤} \qquad (2)\ (G_1\cap f(X))\cap(G_2\cap f(X))=\text{¤}$$

$$(3)\ (G_1\cap f(X))\cup(G_2\cap f(X))=f(X)$$

$$(G_1\cap f(X))\cap(G_2\cap f(X))=\text{¤} \Rightarrow (G_1\cap G_2)\cap f(X)=\text{¤}$$

$$\Rightarrow f^{-1}((G_1\cap G_2)\cap f(X))=f^{-1}(\text{¤})=\text{¤} \Rightarrow f^{-1}(G_1)\cap f^{-1}(G_2)\cap f(X)=\text{¤}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(G_1)\cap f^{-1}(G_2)=\text{¤}$$

وكذلك

$$(G_1\cap f(X))\cup(G_2\cap f(X))=f(X) \Rightarrow (G_1\cup(G_2)\cap f(X)=f(X)$$

$$\Rightarrow f^{-1}((G_1\cup G_2)\cap f(X))=f^{-1}(f(X))=X \Rightarrow f^{-1}(G_1\cup(G_2)\cap f^{-1}f(X))=X$$

$$\Rightarrow f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)\cap X=X \Rightarrow f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)=X$$

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow f^{-1}(G_1),\ \ f^{-1}(G_2)$ مجموعات مفتوحة وغير خالية في X

$\Leftarrow X$ غبر مترابط ، وهذا تناقض $\Leftarrow f(X)$ مجموعة مترابطة في Y.

نتيجة(2.4.7)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاءَ متريا ، ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت A مجموعة مترابطة في X فأن $f(A)$ تكون مجموعة مترابطة في Y

مبرهنة(3.4.7)

ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2)$ فضاء متريا ً بحيث أن $X \cong Y$ ، فان X فضاء مترابط إذا وفقط إذا كان Y فضاء مترابط.

البرهان :

بما إن $X \cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f : X \to Y$

نفرض X فضاء مترابط ، بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f(X)$ مجموعة مترابطة في Y

بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow$ $Y \Leftarrow f(X)=Y$ فضاء مترابط

الاتجاه الآخر : نفرض Y فضاء مترابط

بما أن الدالة $f^{-1} : Y \to X$ مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(Y) = X$ فضاء مترابط

تمارين

(1) في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$. إذا كانت $C=[1,2]$,$B=(1,2)$,$A=(0,1)$ برهن على أن A,B مجموعتان منفصلتان. ولكن المجموعتين A,C ليستا منفصلتين

(2) ليكن (X,d) فضاءَ متريا ً ولتكن $A,B \subseteq X$. إذا كان كل من A,B مجموعة مفتوحة أو كل منها مجموعة مغلقة فأن المجموعتان $A\,|\,B,\ \ B\,|\,A$ منفصلتان . برهن ذلك.

(3) ليكن (X,d) فضاءَ متريا ، ولتكن $A,B \subseteq X$ بحيث أن $A \cup B = X$. إذا كانت A^c, B^c مجموعتان منفصلتان. برهن على أن $\overline{C} = \left(\overline{C \cap A} \cap A\right) \cup \left(\overline{C \cap B} \cap B\right)$ لكل $C \subset X$.

ر 331

Mathematical Analysis I (1) تحليل رياضي

عدد الوحدات: 3 مناقشة: 1 نظري: 3

8. التفاضل Differentiation

المشتقات، فضاء الدوال القابلة للاشتقاق، خواص المشتقات، مبرهنة رول، مبرهنة القيمة الوسطى.

1.8 المشتقات Derivatives

تعريف (1.1.8)

لتكن I فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وليكن $x_0 \in \mathrm{I}$. يقال ن الدالة $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق (Differentiable) عند النقطة x_0 أذا كانت الغاية الآتية : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجودة . ويرمز لهذه الغاية بالرمز $f'(x_0)$ ، أي أن

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

وتسمى $f'(x_0)$ مشتقة الدالة f عند النقطة x_0 . وتعرف المشتقة باستخدام مفهوم التقارب كالأتي :

يقال ن الدالة $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 أذا كانت كل متتابعة $\{x_n\}$ في I و $x_0 \in \mathrm{I}$ بحيث أن $x_n \neq x_0$ لكل قيم n و $x_n \to x_0$ فان $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0)$ ومن هذا التعريف نحصل على أن $f'(x_0)$ لايتغير بتغير المتتابعة

ملاحظة

يطلق على عملية إيجاد مشتقة دالة ما بالتفاضل (Differentiation) وهي العملية الأساسية في حساب التفاضل والتكامل .

يقال عن f قابلة للاشتقاق على الفترة I (أو قابلة للاشتقاق في حالة عدم وجود التباس). أذا كانت f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط I . نلاحظ أنه إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فان لكل $x \in I$ يوجد عدد ثابت $f'(x)$ وعليه نحصل على دالة f' (أي أن $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$) وهذا يعني مشتقة دالة هي دالة أخرى ، يرمز إلى f' أحيانا بالرمز Df أو $\dfrac{df}{dx}$ وتسمى الدالة f' مشتقة الدالة f .أذا فرضنا $y = f(x)$ فأن هنالك رموز أخرى للمشتقة هي $\dfrac{dy}{dx}$ أو y' وتقرأ مشتقة y بالنسبة إلى x .

مثال (2.1.8)

إذا كانت الدالة $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x) = x$ لكل $x \in \mathrm{I}$ فأن الدالة f قابلة للاشتقاق وان $f'(x) = 1$ لكل $x \in \mathrm{I}$

الحل:

ليكن $x \in \mathrm{I}$

$$f(x+h) - f(x) = x + h - x = h \quad \Leftarrow \quad f(x+h) = x + h \quad \Leftarrow \quad f(x) = x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$\Leftarrow$ الدالة f قابلة للاشتقاق وان $f'(x) = 1$ لكل $x \in \mathrm{I}$

حل أخر:

ليكن $x \in \mathrm{I}$ ولتكن $\{x_n\}$ متتابعة في I بحيث أن $x_n \to x$ و $x_n \neq x$ لكل قيم n

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \frac{x_n - x}{x_n - x} = 1 \to 1 \quad \Leftarrow \quad f(x_n) = x_n \text{ لكل قيم } n \quad \Leftarrow \quad f(x) = x$$

$\Leftarrow$ا لدالة f قابلة للاشتقاق وان $f'(x) = 1$ لكل $x \in \mathrm{I}$

مثال(3.1.8)
إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x^2-2x+3$ لكل $x\in\mathrm{I}$ فأن الدالة f قابلة للاشتقاق وان $f'(x)=2x-2$ لكل $x\in\mathrm{I}$

الحل:
ليكن $x\in\mathrm{I}$

$$f(x+h)=(x+h)^2-2(x+h)+3=x^2+2xh+h^2-2x-2xh+3 \Leftarrow f(x)=x^2-2x+3$$

$$f(x+h)-f(x)=x^2+2xh+h^2-2x-2xh+3-(x^2-2x+3)=2xh+h^2-2hx=h(2x+h-2)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-2)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-2)=2x-2$$

$\Leftarrow$ الدالة f قابلة للاشتقاق وان $f'(x)=2x-2$ لكل $x\in\mathrm{I}$

مثال(4.1.8)
إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=\sqrt{x}$ لكل $x\in\mathrm{I}$. فان الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x\neq 0$ و $x\in\mathrm{I}$

الحل:
ليكن $x\in\mathrm{I}$

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x} \Leftarrow f(x+h)=\sqrt{x+h} \Leftarrow f(x)=\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\Leftarrow$ الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x\neq 0$ و $x\in\mathrm{I}$

مثال(5.1.8)
إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=\dfrac{4}{x+1}$ لكل $x\in\mathrm{I}$. فان الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x\neq -1$ ، $x\in\mathrm{I}$

الحل:
ليكن $x\in\mathrm{I}$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{4}{x+h+1}-\frac{4}{x+h}=-\frac{4h}{(x+h+1)(x+1)} \Leftarrow f(x+h)=\frac{4}{x+h+} \Leftarrow f(x)=\frac{4}{x+1}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{4h}{(x+h+1)(x+1)}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{4}{(x+h+1)(x+1)}=-\frac{4}{(x+1)^2}$$

$\Leftarrow$ الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x\neq -1$ و $x\in\mathrm{I}$

مثال(6.1.8)
لتكن الدالة $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ ، $a>0$ قابلة للاشتقاق
(1) إذا كانت الدالة f زوجية فان f' فردية   (2) إذا كانت الدالة f فردية فان f' زوجية

الحل :

(1) بما أن الدالة f زوجية $\Leftarrow$ $f(-x)=f(x)$ لكل $x\in(-a,a)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-(x-h))-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$

نأخذ $k=-h$ $\Leftarrow$ $k\to 0$ عندما $h\to 0$

$$f'(-x)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{-k}=-\lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{k}=-f'(x)$$

$\Leftarrow$ الدالة f' فردية وبالمثل نبرهن (2)

تعريف(7.1.8)

لتكن I فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وليكن $x_0\in \mathrm{I}$. يقال ن الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق من اليمين عند النقطة x_0 أذا كانت الغاية الآتية

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$$

موجودة . ويرمز لهذه الغاية بالرمز $f'_+(x_0)$ ، أي أن $f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

وبالمثل نعرف المشتقة من جهة اليسار، أي أن $f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ملاحظة

الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0\in\mathrm{I}$ إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة من اليمين واليسار وان $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$

مثال(8.1.8)

إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x>2\\ x^2-1, & x\le 2\end{cases}$$

هل أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=2$ ؟ ولماذا

الحل:

$$f(2)=4-1=3$$

$$f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2+h+1-3}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2+h)^2-1-3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(4+h)=4$$

$\Leftarrow$ $f'_+(2)\neq f'_-(2)$ وعلية الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=2$

مبرهنة(9.1.8)

إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0\in\mathrm{I}$ فأن f مستمرة عند تلك النقطة ولكن العكس غير صحيح دائماً .

البرهان:

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 \in \mathrm{I}$ فان $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجود

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

$\Leftarrow$ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ $\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة $x_0 \in \mathrm{I}$

والمثال التالي يوضح أن العكس غير صحيح .

مثال(10.1.8)

إذا كانت الدالة $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=|x|$ فان f مستمرة عند النقطة $x=0$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة

الحل:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}\qquad f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}x=0,\qquad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

$\Leftarrow$ $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=0$ $\Leftarrow$ f مستمرة عند النقطة $x=0$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1,\quad f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$\Leftarrow$ $f_+'(0)\ne f_-'(0)$ وعلية الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=0$

مثال(11.1.8)

إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=[x]$ لكل $x\in\mathbb{R}$ (أي أن f دالة أعظم عدد صحيح) فان الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=n$ حيث أن n عدد صحيح لأنها غير مستمرة عند تلك النقطة.

مبرهنة(12.1.8)

إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0\in\mathrm{I}$ فأن الدالة $f_{x_0}:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f_{x_0}(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0), & x\ne x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases}$$

مستمرة عند تلك النقطة x_0

البرهان:

ليكن $x\in\mathrm{I}$ ولتكن $\{x_n\}$ متتابعة في I بحيث أن $x_n\to x_0$ و $x_n\ne x_0$ لكل قيم n

$$f_{x_0}(x_n)=\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$$

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 فان $\Leftarrow$ $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0}\to f'(x_0)$ $\Leftarrow$ $f_{x_0}(x_n)\to 0$

لكن $f_{x_0}(x_0)=0$ وعلية $f_{x_0}(x_n)\to f_{x_0}(x_0)$ $\Leftarrow$ الدالة f مستمرة.

مبرهنة(13.1.8)
الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0\in \mathrm{I}$ إذا وجد عدد ثابت $f'(x_0)$ ودالة $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ مستمرة عند النقطة x_0 ، $g(x_0)=0$ وتحقق العلاقة $f(x)-[f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)]=(x-x_0)g(x)$ يسمى العدد $f'(x_0)$ مشتقة الدالة f في النقطة.

البرهان :

لكل $x\neq x_0$ ، من العلاقة اعلاه نحصل على $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)$

ليكن $x\in \mathrm{I}$ ولتكن $\{x_n\}$ متتابعة في I بحيث أن $x_n\to x_0$ و $x_n\neq x_0$ لكل قيم n

بما أن الدالة g مستمرة عند النقطة x_0 $\Leftarrow$ $g(x_n)\to g(x_0)=0$ وعليه $\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x-x_0}\to f'(x_0)$

2.8 صيغ في اشتقاق الدوال الجبرية Formulas for differentiation of algebraic functions

مبرهنة(1.2.8)
إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=c$ لكل $x\in \mathrm{I}$ حيث c ثابت (أي أن f دالة ثابتة) فأن $f'=0$ (أي أن مشتقة الثابت صفر) .

البرهان:

ليكن $x\in \mathrm{I}$ $\Leftarrow$ $f(x)=c$ $\Leftarrow$ $f(x+h)=c$ $\Leftarrow$ $f(x+h)-f(x)=c-c=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$\Leftarrow$ الدالة f قابلة للاشتقاق وان $f'(x)=0$ لكل $x\in \mathrm{I}$

مبرهنة(2.2.8)
إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x^n$ لكل $x\in \mathrm{I}$ وأن n عدد صحيح موجب فأن $f'(x)=nx^{n-1}$ لكل $x\in \mathrm{I}$.

البرهان:

ليكن $x\in \mathrm{I}$ $\Leftarrow$ $f(x)=x^n$ $\Leftarrow$ $f(x+h)=(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\dfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots+h^2$

$\Leftarrow$ $f(x+h)-f(x)=(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\dfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots+h^2-x^n$

$\Leftarrow$ $f(x+h)-f(x)=(x+h)^n=h(nx^{n-1}+\dfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1})$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)h+\cdots k^{n-1})=nx^{n-1}$$

$\Leftarrow$ا لدالة f قابلة للاشتقاق وان $f'(x)=0$ لكل $x\in \mathrm{I}$

مبرهنة(3.2.8)
لتكن كل من $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ ، $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 فأن الدالة :

(1) αf (حيث $\alpha\in R$) قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 وأن $(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)$

(2) $f+g$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 وأن $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

(3) fg قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 وأن $(fg)'(x_0)=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)$

(4) $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 عندما $g(x_0) \neq 0$ وأن $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{g(x_0)\, f'(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

البرهان :

(1)

$$(\alpha f)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(\alpha f)(x_0+h) - (\alpha f)(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha f(x_0+h) - \alpha f(x_0)}{h} = \alpha \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \alpha f'(x_0)$$

(2)

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\Leftarrow \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(3)

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) g(x_0+h) - f(x_0+h) g(x_0) + f(x_0+h) g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)(g(x_0+h) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x_0+h) - fg(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x_0+h) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x_0) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) g'(x_0) + g(x_0) f'(x_0)$$

$$\Leftarrow \quad (fg)'(x_0) = f(x_0)\, g'(x_0) + g(x_0)\, f'(x_0)$$

(4)

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{f}{g})(x_0+h) - (\frac{f}{g})(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h) g(x_0) - f(x_0) g(x_0+h)}{g(x_0+h) g(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h) g(x_0) - f(x_0) g(x_0) - f(x_0) g(x_0+h) + f(x_0) g(x_0)}{g(x_0+h) g(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{g(x_0)(f(x_0+h) - f(x_0)) - f(x_0)(g(x_0+h) - g(x_0))}{g(x_0+h) g(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x_0+h) g(x_0)} \times (g(x_0) \lim_{h \to 0} (\frac{(f(x_0+h) - f(x_0)}{h}) - f(x_0) \lim_{h \to 0} (\frac{(g(x_0+h) - g(x_0)}{h}))$$

$$= \frac{g(x_0)\, f'(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\Leftarrow \quad (\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{g(x_0)\, f'(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

مبرهنة (4.2.8) (قاعدة السلسلة **The chain rule**)

لتكن كل من I, J فترة مفتوحة ولكل من الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 \in I$ ، الدالة $g : J \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $f(x_0) \in J$ فأن الدالة $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 وأن

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

ومن الممكن صياغة المبرهنة بصورة مكافئة وكالاتي : لتكن $y = g(u)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى u ولتكن $u = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x فأن الدالة $y = (g \circ f)(x)$ تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x وأن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

البرهان:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0}$$

إذا كان $f(x) \neq f(x_0)$

$$g_{f(x_0)}(f(x)) = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} - g'(f(x_0))$$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (g_{f(x_0)}(f(x)) + g'(f(x_0)))(f(x) - f(x_0))$$

$$(g \circ f)(x)) - (g \circ f)(x_0)) = ((g_{f(x_0)} \circ) f(x)) + (g' \circ f)(x_0)))(f(x) - f(x_0)) \qquad \cdots (1)$$

بما أن $f(x) \neq f(x_0) \quad \Leftarrow \quad x \neq x_0$

$$f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = (f_{x_0}(x) + f'(x_0))(x - x_0) \qquad \cdots (2)$$

من (1)،(2) نحصل على

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = ((g_{f(x_0)}(f(x)) + g'(f(x_0))(f_{x_0}(x) + f'(x_0))(x - x_0)$$

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{(x - x_0)} = ((g_{f(x_0)}(f(x)) + g'(f(x_0))(f_{x_0}(x) + f'(x_0))$$

$$= g_{f(x_0)}(f(x) f_{x_0}(x) + g_{f(x_0)}(f(x) f'(x_0) + g'(f(x_0) f_{x_0}(x) + g'(f(x_0) f'(x_0)$$

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} g_{f(x_0)}(f(x) f_{x_0}(x) + \lim_{x \to x_0} g_{f(x_0)}(f(x) f'(x_0) + \lim_{x \to x_0} g'(f(x_0) f_{x_0}(x) + \lim_{x \to x_0} g'(f(x_0) f'(x_0)$$

$$= 0 + 0 + 0 + f'(x_0) g'(f(x_0)) = f'(x_0) g'(f(x_0))$$

مثال(5.2.8)

إذا كانت الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x) = (x \;\; + 5x + 2)^4$ لكل $x \in \mathbb{R}$. احسب f'

الحل:

لتكن $g(x) = x^2 + 5x + 2$ لكل $x \in R \quad \Leftarrow \quad g'(x) = 2x + 5$

ولتكن $h(y) = y^4$ لكل $y \in R \quad \Leftarrow \quad h'(y) = 4y^3$

$$f(x) = (x \quad + 5x + 2)^4 = (g(x))^4 = h(g(x)) = (g \circ f)(x)$$

$$f'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 4(x^2 + 5x + 2)^3 (2x + 5)$$

نتيجة (6.2.8.)

لتكن $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق وليكن $y = (f(x))^n$ حيث n عدد صحيح فأن

$$\frac{dy}{dx} = n\,(f(x))^{n-1} f'(x)$$

الدوال الضمنية Implicit Functions

كانت معظم الدوال التي بحثنا مشتقاتها كانت بالصيغة $y = f(x)$ والتي تسمى بالدوال الصريحة (Explicit Functions) ولكن هنالك بعض العلاقات أو المعادلات متضمنة متغيرين أو أكثر مثل $F(x, y) = 0$. في مثل هذه المعادلات يصعب أحيانا التعبير عن أحد المتغيرات بدلالة الآخر مباشرة . لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ نعرف y ضمنياً كدالة إلى x وتطبق قواعد الاشتقاق المناسبة .

مثال(7.2.8)

نفرض أن $x^3 + x^2 y - 10y^4 = 0$ تعرف دالة ضمنية قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل :

بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى x

$$3x^2 + x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - 40y^3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x(3x + 2y) - (40y^3 - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(3x + 2y)}{(40y^3 - x^2)}, \qquad 40y^3 - x^2 \neq 0$$

مبرهنة (8.2.8)

إذا كانت الدالة $f : \mathrm{I} \to R$ معرفة بالصيغة $y = f(x) = x^n$ حيث n عدد نسبي فأن $\frac{dy}{dx} = f'(x) = nx^{n-1}$ لكل $x \in \mathrm{I}$.

البرهان:

ليكن $n = \frac{p}{q}$ حيث p, q أعداد صحيحة وان $q > 0$

$\Leftarrow$ $y = x^{\frac{p}{q}}$ وبرفع الطرفين إلى الأس q ، نحصل على $y^q = x^p$ وهي دالة ضمنية ، بالاشتقاق نحصل على

$$q y^{q-1} \frac{dy}{dx} = p x^{p-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{p}{q}) \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = n \frac{x^{p-1}}{(x^n)^{q-1}} = n x^{p-1-n(q-1)} = n x^m$$

حيث $m = p - 1 - n(q-1) \quad \Leftarrow \quad m = p - 1 - nq + n = nq - 1 - nq + n = n - 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$

مثال(9.2.8)

جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $2y+\sqrt{xy}=3x^3$

الحل :

بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى x

$$2y+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=3x^3$$

$$2\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}=3x^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{18x^2\sqrt{xy}-y}{4\sqrt{xy}+x}$$

3.8 المشتقات من الرتب العليا Derivatives of Higher Order

لتكن I فترة مفتوحة . إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق فأن $f':\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ تكون دالة . وإذا كانت الدالة $f':\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق فأنه يطلق على مشتقة f' بالمشتقة الثانية ويرمز لها بالرمز f'' أو الرمز $\frac{d^2f}{dx^2}$ ، وفي هذه الحال نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين. من الواضح أن الدالة يمكن أن تكون قابلة للاشتقاق n من المرات حيث n عدد صحيح موجب وسنرمز إلى مشتقة النونية للدالة f بالرمز $f^{(n)}$ أو $\frac{d^nf}{dx^n}$.

مثال(1.3.8)

الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $y=f(x)=x^5+4x^4-\frac{1}{x}$ لكل $x\in\mathbb{R}$ ، فان

$$\frac{dy}{dx}=5x^4+16x^3+\frac{1}{x^2},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=20x^3+48x^2-\frac{2}{x^3}$$

مثال(2.3.8)

نفرض أن $y^3-x^3=4$ تعرف دالة ضمنية قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x . جد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل : بإجراء الاشتقاق بالنسبة إلى x

$$3y^2\frac{dy}{dx}-3x^2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}$$

$$y^2\frac{d^2y}{dx^2}+2y(\frac{dy}{dx})^2-2x=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y(\frac{dy}{dx})^2-2x}{y^2}=\frac{2y(\frac{x^2}{y^2})^2-2x}{y^2}=2\frac{x^4-xy^3}{y^5}=2x\frac{x^3-y^3}{y^5}-2x\frac{4}{y^5}=\frac{-8x}{y^5}$$

تعريف(3.3.8)
يقال عن الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ بأنها من الصنف $C^{(n)}$ أو تنتمي إلى الصنف $C^{(n)}$ ، أذا كانت الدالة f تمتلك مشتقة من الرتبة n وكانت هذه المشتقة مستمرة .

مثال(4.3.8)
الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

تنتمي إلى الصنف $C^{(n)}$ ولكنها لا تنتمي إلى الصنف $C^{(n+1)}$

4.8 تطبيقات على المشتقات Applications of Differentiations

المماسات والأعمدة Tangents and Normal

تعريف (1.4.8)
لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 \in I$. المماس لمخطط الدالة f في النقطة $(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم المار بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ وله ميل $f'(x_0)$.
بما أن معادلة المستقيم المارة بالنقطة (x_0, y_0) والذي ميله m هي $y - y_0 = m(x - x_0)$ فأن معادلة المماس لمخطط الدالة f في النقطة $(x_0, f(x_0))$ الواقعة على المخطط هي $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ، حيث يقصد بميل المخطط (**Slope of a graph**) في نقطة عليه هو ميل مماس المخطط في تلك النقطة .

مثال(2.4.8)
جد معادلة المماس لمخطط الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = x^2 + 5x$ عند النقطة $(-1,-4)$

الحل:

$$f'(x) = 2x + 5, \quad f'(-1) = -2 + 5 = 3$$

معادلة المماس لمخطط الدالة f هي

$$y = 3x - 1 \;\Leftarrow\; y - (-4) = 3(x - (-1)) \;\Leftarrow\; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

مثال(3.4.8)
جد معادلة المماس للقطع الزائد $4x^2 - 9y^2 = 36$ في النقطة $(6, 2\sqrt{3})$

الحل:
نفترض أن المعادلة المعطاة تعرف ضمنيا دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{9y} \;\Leftarrow\; 8x - 18y\frac{dy}{dx} = 0 \;\Leftarrow\; 4x^2 - 9y^2 = 36$$

$$f'(x) = \frac{4x}{9y}, \qquad f'(6) = \frac{24}{18\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

معادلة المماس لمخطط الدالة f هي

$$4x - 3\sqrt{3}y - 6 = 0 \;\Leftarrow\; y - 2\sqrt{3} = \frac{4}{3\sqrt{3}}(x - 6) \;\Leftarrow\; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

تعريف(4.4.8)

لتكن $f : I \to R$ دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 \in I$. العمود (Normal) على مخطط الدالة f في النقطة $(x_0, f(x_0))$ على المخطط هو المستقيم المار بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ والعمودي على المماس (أي الذي ميله هو السالب لمقلوب ميل المماس) .

إذا كانت $f'(x_0) \neq 0$. فأن معادلة العمود على مخطط الدالة f في النقطة $(x_0, f(x_0))$ الواقعة على المخطط هي :

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

مثال(5.4.8)

لتكن لدالة $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$. جد معادلة العمود على مخطط الدالة f الذي يوازي المستقيم $3x - 2y - 12 = 0$

الحل :

ميل المستقيم المعطى يساوي $\frac{3}{2}$ وبما أن $f'(x) = -\frac{2x}{3\sqrt{9 - x^2}}$ ، $-3 < x < 3$ ،فان ميل العمود في آية نقطة $(x, f(x))$ ، $x \neq 0$ على مخطط الدالة f هو $\frac{3\sqrt{9 - x^2}}{2x}$ وعليه $\frac{3\sqrt{9 - x^2}}{2x} = \frac{3}{2}$

$\Leftarrow$ $(x, f(x)) = (\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ وعليه معادلة العمود على مخطط الدالة f هي $2x - 3y - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$

السرعة والتعجيل Velocity and Acceleration

تأمل حركة جسيم على خط أحداثي . إذا كانت f دالة بحيث أن الأحداثي لجسيم . متحرك على الخط الأحداثي. في نهاية t من وحدات الزمن هو $s = f(t)$ ، أي أن $s = f(t)$ تعرف دالة الموقع التي تعطي المسافة المتجهة s للجسيم من نقطة الأصل في نهاية t من وحدات الزمن ، فان السرعة الآنية(Velocity) للجسيم في الزمن t، تعرف كالأتي :

$v = f'(t)$

الانطلاق (Speed) للجسيم هو $|v|$، أي القيمة المطلقة لسرعته. التعجيل(Acceleration) لجسيم متحرك هو معدل تغيير سرعته بالنسبة للزمن، وفي الحركة الخطية يعطى بالصيغة الآتية :

$$a = \frac{dv}{dt} = f''(t)$$

مثال(6.4.8)

جسيم يتحرك على خط مستقيم وفق القانون $s = 3t^2 + 5t + 8$ حيث s تمثل الإزاحة بالأمتار والزمن t بالثواني.جد السرعة الآنية والتعجيل في أي زمن t.

الحل :

$$v = f'(t) = 6t + 5, \qquad a = f''(t) = 6$$

مثال(7.4.8)

جسيم يتحرك على خط مستقيم وفق للقاعدة $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ حيث s تمثل الإزاحة بالأمتار والزمن t بالثواني.صف حركة الجسيم عندما $t \geq 0$.

الحل :

سرعة الجسيم في أي زمن t هي $v = f'(t) = 3t^2 - 18t + 24$ وتعجيله هو $a = f''(t) = 6t - 18$
إذا كانت $v = 0$ فان $t = 2$ أو $t = 4$ وإذا كانت $a = 0$ فان $t = 3$
حركة الجسيم توصف كالأتي : عندما $t = 0$ يكون الجسيم في نقطة الأصل، يتحرك بسرعة 24 متر في الثانية، وبعد مرور ثانيتين، يسكن الجسيم على بعد 20 متر

مثال(8.4.8)
قذف حجر راسيا إلى الأعلى بانطلاق 80 متر في الثانية ووصل الارتفاع $s = 80t - 16t^2$ مترا بعد t من الثواني. بإهمال مقاومة الهواء، ما هو أقصى ارتفاع يبلغه ؟ وما هو تعجيله في نهاية الثانية الأولى ؟ وما هو أقصى ارتفاع يصله ؟
الحل :
$v = 80 - 32t$ في أقصى ارتفاع للحجر، $v = 0$ وبجعل $80 - 32t = 0 \Leftarrow t = \frac{80}{32} = 2.5$ ، وعلى ذلك يبلغ الحجر أقصى ارتفاع في نهاية 2.5 ثانية، وذلك الارتفاع هو $s = 80t - 16t^2 = 80(2.5) - 16(2.5)^2 = 100$ ويعطى التعجيل $a = -32$. هذا التعجيل الثابت هو التعجيل الأرضي ، وهو نفسه في نهاية الثانية الأولى كما وفي نهاية الارتفاع الأقصى ويساوي 32 − مترا في الثانية .

5.8 الدوال المتزايدة والمتناقصة Increasing and Decreasing Functions

تعريف(1.5.8)
لتكن I فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$. يقال عن الدالة $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ بأنها
(1) متزايدة (**Increasing**) عند النقطة $x_0 \in \mathrm{I}$ إذا وجدت فترة مفتوحة V في $\mathbb{R}$ تحتوي على x_0 وتحقق الشرط الآتي :
لكل $x \in V$ إذا كان $x < x_0$ فأن $f(x) < f(x_0)$ إذا كان $x > x_0$ فأن $f(x) > f(x_0)$
(2) متناقضة (**Decreasing**) عند النقطة $x_0 \in \mathrm{I}$ إذا وجدت فترة مفتوحة U في $\mathbb{R}$ تحتوي على x_0 وتحقق الشرط الأتي
لكل $x \in U$ إذا كان $x < x_0$ فأن $f(x) > f(x_0)$ إذا كان $x > x_0$ فأن $f(x) < f(x_0)$
(3) متزايدة على الفترة I إذا كانت متزايدة عند كل نقطة من نقاط I، بعبارة أخرى
$x < y \Leftarrow f(x) < f(y)$ لكل $x, y \in I$
(4) متناقضة على الفترة I إذا كانت متناقصة عند كل نقطة من نقاط I، بعبارة أخرى
$x < y \Leftarrow f(x) > f(y)$ لكل $x, y \in I$
(5) رتيبة على الفترة I إذا كانت متزايدة .أو متناقضة على الفترة I

مثال(2.5.8)
(1)الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = x^3$ لكل $x \in \mathbb{R}$ متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$
لأنه إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث أن $x < y$ فان $x^3 < y^3$ وعليه $f(x) < f(y)$
(2) الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = \frac{1}{x}$ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $x \neq 0$ متناقصة على الفترتين $(0, \infty)$ ، $(-\infty, 0)$
لأنه إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث أن $0 < x < y$ فان $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ وعليه $f(x) > f(y)$ وكذلك إذا كان $x < y < 0$ فان $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ وعليه $f(x) > f(y)$

مبرهنة(3.5.8)

لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عن الفترة المفتوحة(a,b) ولتكن $x_0\in(a,b)$

(1) إذا كانت $f'(x_0)>0$ فأن الدالة f متزايدة عند النقطة x_0، وبصورة عامة إذا كانت $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$ فأن الدالة f متزايدة عند الفترة $[a,b]$

(2) إذا كانت $f'(x_0)<0$ فأن الدالة f متناقصة عند النقطة x_0، وبصورة عامة إذا كانت $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,b)$ فأن الدالة f متناقصة عند الفترة $[a,b]$

وعليه إذا كانت $f'(x_0)\neq 0$ فتوجد فترة مفتوحة V في $\mathbb{R}$ تحتوي على x_0 وتكون عليها الدالة f متباينة

البرهان:

(1) بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 فان $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ليكن $f'(x_0)=£$ $\Leftarrow$ $£>0$. باستخدام تعريف الغاية ، فانه يوجد $¢>0$ بحيث أن لكل $x\in I$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<£ \quad\Leftarrow\quad 0<|x-x_0|<¢$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \quad\Leftarrow\quad 0<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<2£ \quad\Leftarrow\quad -£<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-£<£ \quad\Leftarrow$$

(أ) إذا كان $x<x_0 \quad\Leftarrow\quad x-x_0<0 \quad\Leftarrow\quad f(x)-f(x_0)<0 \quad\Leftarrow\quad f(x)<f(x_0)$

(ب) إذا كان $x>x_0 \quad\Leftarrow\quad x-x_0>0 \quad\Leftarrow\quad f(x)-f(x_0)>0 \quad\Leftarrow\quad f(x)>f(x_0)$

وبالمثل نبرهن (2)

مثال(4.5.8)

جد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$ لكل $x\in R$

الحل:

$f'(x)=x^2-4x+3 \quad\Leftarrow\quad x^2-4x+3=0 \quad\Leftarrow\quad x=1, x=3$ وعليه الدالة f متزايدة في الفترتين $(-\infty,1)$ ، $(3,\infty)$ ومتناقصة في الفترة $(1,3)$ ولكن الدالة ليست متزايدة ولا متناقصة في كل من $x=1$ ، $X=3$

ملاحظة

عكس المبرهنة أعلاه غير صحيح دائما ، والمثال التالي يوضح ذلك

مثال(5.5.8)

الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^3$ لكل $x\in R$ متزايدة عند النقطة $x_0=0$

لأنه إذا كان $x<0$ فان $f(x)<0=f(0)$ وكذلك إذا كان $x>0$ فان $f(x)>0=f(0)$ ولكن $f'(0)=0\not>0$

ملاحظة

إذا كانت الدالة f متزايدة في الفترة $[a,b]$، فيقال لمخططها بأنه صاعد أو مرتفع (Rising) في الفترة(a,b) وبصورة أدق، إذا كانت $f'(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$ فان مخطط الدالة f يكون صاعدا، كما يقال أن مخطط الدالة f هابط أو نازل (Falling) في الفترة (a,b) إذا كان $f'(x)<0$ لكل $x\in(a,b)$. كما يقال للنقطة

$(x_0, f(x_0))$ نقطة تحول (Transition) إذا تغير مخطط الدالة فيها من صعود إلى نزول أو بالعكس، أي إنها نقطة تحول للمخطط من صاعد إلى نازل أو من نازل إلى صاعد.

6.8 القيم القصوى Extreme Values

القيم القصوى هي القيم العظمى أو الصغرى. أن القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة على مجموعة هي اكبر واصغر قيمها على تلك المجموعة، بشرط أن تكون تلك القيم موجودة. وإضافة إلى ذلك انه إذا كانت الدالة مستمرة وكانت المجموعة فترة مغلقة، فيكون للدالة دائما قيمة عظمى وقيمة صغرى على الفترة.

تعريف(1.6.8)

يقال عن الدالة $f: D \to \mathbb{R}$ بأنها تمتلك قيمة عظمى مطلقة (**Absolute Maximum**) عند النقطة $x_0 \in D$ إذا كانت $f(x) \le f(x_0)$ لكل $x \in D$. وتسمى النقطة x_0 نقطة نهاية عظمى والعدد $f(x_0)$ بالنهاية العظمى للدالة f. كما يقال عن الدالة f بأنها تمتلك قيمة صغرى مطلقة (**Absolute Minimum**) عند النقطة $y_0 \in D$ إذا كان $f(y_0) \le f(x)$ لكل $x \in D$ وتسمى النقطة y_0 نقطة نهاية صغرى والعدد $f(y_0)$ قيمة النهاية الصغرى للدالة f

ملاحظة :

نقطة النهاية العظمى إن وجدت قد لا تكون وحيدة وبالمثل نقطة النهاية الصغرى

مثلا:

الدالة $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ المعرفة بالصيغة $f(x) = \sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ تمتلك عدد غير منتهي من نقاط النهايات العظمى والصغرى.

ملاحظة

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $f: X \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة فانه ليس من الضروري أن تكون لتلك الدالة نقطة نهاية عظمى أو صغرى والمثال التالي يوضح ذلك

مثال(2.6.8)

الدالة $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 2x$ لكل $0 < x < 1$ مقيدة ولكن ليس لها نقطة نهاية عظمى ونقطة نهاية صغرى لأنه لكل $x \in (0,1)$ يوجد $y \in (0,1)$ بحيث أن $x < y < 1$ وأن $f(x) < f(y)$.

المبرهنة التالية تبين انه إذا كانت الدالة الحقيقية مستمرة وكان المنطلق مرصوصا فإنها تمتلك نقطة نهاية عظمى ونقطة نهاية صغرى.

مبرهنة(3.6.8)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $f: X \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة. إذا كان X فضاء مرصوصا، فأنة يوجد $x_0, y_0 \in X$ بحيث أن $f(y_0) \le f(x) \le f(x_0)$ لكل $x \in X$.

البرهان:

نضع $Y = f(X) \Leftarrow Y \subseteq R$

بما أن X فضاء مرصوصا $\Leftarrow f$ مقيدة $\Leftarrow Y$ مجموعة مقيدة في R، ومن الواضح أن $Y \neq \emptyset$

$\Leftarrow Y$ لها اصغر قيد أعلى وليكن M، أي أن $M = \sup Y = \sup\{f(x) : x \in X\} \Leftarrow f(x) \le M$ لكل $x \in X$.

سنبرهن بطريقة التناقض: نفرض أن الدالة f لاتمتلك نقطة نهاية عظمى، وهذا يعني أن $f(x) \neq M$ لكل $x \in X$

الآن :

نعرف الدالة $g: X \to \mathbb{R}$ بالصيغة الآتية : $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ لكل $x \in X$

بما أن $f(x)\le M$ و $f(x)\ne M$ لكل $x\in X$ $\Leftarrow$ $M-f(x)>0$ لكل $x\in X$ $\Leftarrow$ $g(x)>0$ لكل $x\in X$.
بما أن g مستمرة $\Leftarrow$ g مقيدة $\Leftarrow$ يوجد اصغر قيد أعلى وليكن K $\Leftarrow$ $g(x)\le K$ لكل $x\in X$. $\Leftarrow$ $0<g(x)\le K$ لكل $x\in X$.

$$\Leftarrow\ 0<\frac{1}{M-f(x)}\le K \ \Leftarrow\ M-f(x)\ge\frac{1}{K}\ \Leftarrow\ f(x)\le M-\frac{1}{K}$$ لكل $x\in X$.

بما أن $M-\frac{1}{K}<M$ نحصل على أن M ليس اصغر قيد أعلى إلى Y وهذا تناقض ، وبذلك نستنتج انه يوجد $x_0\in X$ بحيث أن $f(x_0)=M$ وبالتالي $f(x)\le f(x_0)$ لكل $x\in X$. وبالمثل نبرهن وجود نقطة نهاية صغرى.

نتيجة(4.6.8)

كل دالة حقيقية مستمرة معرفة على فترة حقيقية مغلقة $[a,b]$ لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في تلك الفترة.

تعريف(5.6.8)

لتكن D مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. يقال عن للدالة $f:D\to\mathbb{R}$ بأنها تمتلك قيمة عظمى نسبية(أو محلية) (Relative Maximum Value) عند النقطة $x_0\in D$ إذا وجدت فترة مفتوحة V في $\mathbb{R}$ تحتوي على x_0 (أي أن $x_0\in V\subseteq\mathbb{R}$) بحيث أن $f(x)\le f(x_0)$ لكل $x\in V\cap D$. (أي أن x_0 هي نقطة نهاية عظمى مطلقة للدالة f على المجموعة $D\cap V$)
كما يقال عن للدالة $f:D\to\mathbb{R}$ بأنها تمتلك قيمة صغرى نسبية(أو محلية) (Relative Minimum Value) عند النقطة $y_0\in D$ إذا وجدت فترة مفتوحة U في R تحتوي على y_0 (أي أن $y_0\in U\subseteq R$) بحيث أن $f(y_0)\le f(x)$ لكل $x\in U\cap D$. (أي أن y_0 هي نقطة نهاية صغرى مطلقة للدالة f على المجموعة $D\cap U$)
يقال عن الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ بأنها تمتلك قيمة نسبية (**Relative Extremum Value**) اعند النقطة $z_0\in D$ إذا كانت الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ تمتلك قيمة عظمى أو قيمة صغرى نسبية عند النقطة z_0.

المبرهنة التالية تبين أن المشتقة تعطي شرطاً ضرورياً لوجود نقاط النهاية العظمى المحلية ونقاط النهاية الصغرى المحلية

مبرهنة(6.6.8)

لتكن I فترة مفتوحة ولتكن الدالة $f:\mathrm{I}\to R$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0\in\mathrm{I}$ إذا كانت x_0 نقطة نهاية عظمى محلية أو نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f فأن $f'(x_0)=0$

البرهان :

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $f'(x_0)\ne 0$ $\Leftarrow$ أما $f'(x_0)>0$ أو $f'(x_0)<0$
إذا كانت $f'(x_0)>0$ فان الدالة f تكون متزايدة في النقطة x_0 وعليه لايمكن أن تكون النقطة x_0 نقطة نهاية عظمى محلية أو نقطة نهاية صغرى محلية. وإذا كانت $f'(x_0)<0$ فان الدالة f تكون متناقصة في النقطة x_0 وعليه لايمكن أن تكون النقطة x_0 نقطة نهاية عظمى محلية أو نقطة نهاية صغرى محلية. نستنتج من هذا أن $f'(x_0)=0$.

ملاحظة

(1) عكس المبرهنة أعلاه غير صحيح دائما، أي إذا كان $f'(x_0)=0$ فليس من الضروري أن تكون x_0 نقطة نهاية عظمى محلية أو نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f . مثلا الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^3$ لكل $x\in\mathbb{R}$ فيها $f'(0)=0$ ولكن 0 ليس نقطة نهاية عظمى محلية أو نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f
(2) هنالك دوال لها قيمة قصوى نسبية في نقطة لاتوجد للدالة فيها مشتقة . مثلا الدالة لدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=|x|$ لكل $x\in R$ لها قيمة قصوى نسبية عند $x=0$ ولكن $f'(0)$ غير موجودة.

ملاحظة

مما تقدم، ومن تعريف نقطة تحول المخطط،، نستنتج أن للدالة قيمة قصوى نسبية عند النقطة z إذا وفقط إذا كانت $(z, f(z))$ نقطة تحول لمخطط الدالة f .

تعريف(7.6.8)

لتكن $f : D \to R$ دالة، $z \in D$. يقال عن العدد z بأنه عدد حرج (Critical Number) للدالة f إذا كان $f'(z) = 0$ أو $f'(z)$ غير موجود.

مما تقدم أن الشرط الضروري لكي يكون للدالة f قيمة قصوى نسبية عند النقطة z بان تكون z عددا حرجا للدالة f .

المبرهنة التالية تزودنا طريقة أساسية لإيجاد القيم القصوى النسبية للدالة

مبرهنة(8.6.8)

لتكن $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة،الفترة (a,b) تحتوي عددا حرجا c ولتكن الدالة f قابلة للاشتقاق في $(a,b)|\{c\}$ فأن

(1) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,c)$ وكانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (c,b)$ فان $f(c)$ قيمة عظمى نسبية للدالة f

(2) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a,c)$ وكانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (c,b)$ فان $f(c)$ قيمة صغرى نسبية للدالة f

(3) إذا كانت $f'(x)$ لها نفس الإشارة لكل $x \in (a,b)|\{c\}$ فان $f(c)$ ليست قيمة قصوى نسبية للدالة f

البرهان :

(1) بما أن $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a,c)$ $\Leftarrow$ f متزايدة على الفترة $(a,c]$
وعليه فان $f(x) < f(c)$ لكل $x \in (a,c]$
ومرة أخرى ، بما أن $f'(x) < 0$ لكل $x \in (c,b)$ $\Leftarrow$ f متناقصة على الفترة $[c,b)$ وعليه فان $f(c) > f(x)$ لكل $x \in [c,b)$. وهكذا $a < x < b$ و $f(c) > f(x)$ لكل $x \in (a,b)$ وعليه $f(c)$ قيمة عظمى نسبية للدالة f .

مثال(9.6.8)

جد القيم العظمى والصغرى النسبية للدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ لكل $x \in R$.

الحل :

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftarrow x(x+1)(x-2) = 0 \Leftarrow x = -1, 0, 2$$

بسهولة يمكن إثبات النقطة 0 نقطة عظمى محلية و النقطتين -1 و 2 صغرى محلية بالإضافة إلى هذا النقطة 2 هي نقطة نهاية صغرى مطلقة . في حين انه ليست للدالة نهاية عظمى مطلقة ، لأنها غير مقيدة من الأعلى.

ملاحظة

يوجد اختبار أخر للقيم القصوى النسبية والذي غالبا ما يكون الأسهل في التطبيق والذي يكون باستخدام المشتقة الثانية وكما في المبرهنة الآتية

مبرهنة(10.6.8)

لتكن I فترة مفتوحة، $c \in \mathrm{I}$ ، $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ دالة بحيث كل من f', f'' موجودة في كل نقطة لفترة I تحتوي c ولتكن $f'(c) = 0$

(1) إذا كانت $f''(c) > 0$ فان $f(c)$ قيمة صغرى نسبية للدالة f .

(2) إذا كانت $f''(c) < 0$ فان $f(c)$ قيمة عظمى نسبية للدالة f .

البرهان :

بما أن $f''(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$

بما أن $f'(c)=0$ ، نحصل على $f''(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{x-c}$

(1)

ليكن $£=\dfrac{1}{2}f''(c) \;\Leftarrow\; £>0$ من تعريف الغاية ، يوجد $¢>0$ بحيث أن

$0<|x-c|<¢$ يؤدي إلى $\left|\dfrac{f'(x)}{x-c}-f''(c)\right|<\dfrac{1}{2}f''(c)$

لكل $x\in I$ و $x\neq c$ $-¢<x-c<¢,$ يؤدي إلى $\left|\dfrac{f'(x)}{x-c}-f''(c)\right|<\dfrac{1}{2}f''(c)$

لكل $x\in I$ و $x\neq c$ $c-¢<x<c+¢,$ يؤدي إلى $-\dfrac{1}{2}f''(c)<\dfrac{f'(x)}{x-c}-f''(c)<\dfrac{1}{2}f''(c)$

لكل $x\in I$ و $x\neq c$ $c-¢<x<c+¢,$ يؤدي إلى $\dfrac{1}{2}f''(c)<\dfrac{f'(x)}{x-c}<\dfrac{3}{2}f''(c)$

ولكن، يمكننا أن نختار ¢ صغيرة جدا بحيث أن الفترة $J=(c-¢,c+¢)\subseteq I$

لكل $x\in J\,|\,\{c\} \;\Leftarrow\; 0<\dfrac{f'(x)}{x-c}-<\dfrac{3}{2}f''(c)$ لان $f''(c)>0$

ولما كان بالإمكان تجزئة الفترة $J\,|\,\{c\}$ إلى فترتين مفتوحتين الأولى إلى يسار العدد c ، والتي يكون فيها $x-c$ سالبا، والثانية إلى يمين العدد c ، والتي يكون فيها $x-c$ موجبا، فإننا نستنتج أن $f'(x)<0$ لكل $x\in(c-¢,c)$ وان $f'(x)>0$ لكل $x\in(c,c+¢)$ وعليه استخدام المبرهنة(21) فان $f(c)$ قيمة صغرى نسبية للدالة f .
وبالمثل نبرهن (2).

مثال(11.6.8)

جد القيم العظمى والصغرى النسبية للدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

الحل :

$f'(x)=6x^2-6x-12=0 \;\Rightarrow\; 6(x^2-x-2)=0 \;\Rightarrow\; (x+1)(x-2)=0 \;\Rightarrow\; x=-1,,2$ ،

الأعداد الحرجة هي $c=-1$ و $c=2$

$\Rightarrow\; f''(x)=12x-6 \;\Rightarrow\; f''(-1)=-12-6=-18<0$ فان $f(-1)=12$ قيمة عظمى نسبية للدالة f . وكذلك $f''(2)=24-6=18>0$ فان $f(2)=-15$ قيمة صغرى نسبية للدالة f .

ملاحظة

سبق وان برهنا كل دالة قابلة للاشتقاق في نقطة ما تكون مستمرة في تلك النقطة، كما لاحظنا أن الدالة المستمرة في نقطة ما قد لاتكون قابلة للاشتقاق في تلك النقطة. والآن نبين في المثال التالي : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على فترة معينة فليس من الضروري أن تكون الدالة f' مستمرة عند تلك الفترة

مثال(12.6.8)

الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(1) الدالة f مستمرة لكل $x\in R$

(2) الدالة f قابلة للاشتقاق لكل $x \in R$ لأنه

إذا كانت $x \neq 0$ فان $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ ، أما إذا كانت $x = 0$ فان

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

(3) الدالة f' غير مستمرة في النقطة 0

على الرغم من هذا ، فان المبرهنتين التاليتين تبينان ان المشتقة تملك بعض خواص الدوال المستمرة ولو أنها ليست بالضرورة مستمرة.

مبرهنة(13.6.8)

إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق على R ، توجد متتابعة$\{f_n\}$ من الدوال المستمرة التي تقترب إلى الدالة f' ،

أي أن $f_n(x) \to f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

البرهان:

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإنها مستمرة على $\mathbb{R}$

لكل $n \in N$ نضع $g_n(x) = f(x+\frac{1}{n})$ لكل $x \in \mathbb{R}$. وكذلك $f_n(x) = n(g_n(x) - f(x))$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

من الواضح أن كلا من الدالتين f_n, g_n دالة مستمرة على $\mathbb{R}$. بالإضافة إلى هذا، فان

$$f'(x) = \lim_{n\to 0}\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to 0} n(g_n(x) - f(x)) = \lim_{n\to 0} f_n(x)$$

ملاحظة

لنتذكر خاصية القيمة المتوسطة والتي تنص على أن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة إذا كان لكل $x,y \in [a,b]$ ولكل s يقع بين $f(x), f(y)$ يوجد z بين x,y ، بحيث أن $f(z) = s$ ، وقد برهنا سابقا بان كل دالة مستمرة .

المبرهنة التالية تبين أن الدالة المشتقة تحقق خاصية القيمة المتوسطة حتى لو كانت غير مستمرة

مبرهنة(14.6.8)

لتكن I فترة مفتوحة . إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق فأن الدالة f' تحقق خاصية القيمة المتوسطة

البرهان:

ليكن $a,b \in \mathrm{I}$ بحيث أن $a < b$

أولا : الحالة عندما تكون $f'(a) < 0 < f'(b)$ وعليه نبرهن وجود c بحيث أن $a < c < b$ وان $f'(c) = 0$

بما أن f قابلة للاشتقاق على I ، $[a,b] \subseteq \mathrm{I}$

$\Leftarrow$ f قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ وعليه f مستمرة على الفترة $[a,b]$ $\Leftarrow$ f لها نقطة صغرى مطلقة ، أي يوجد $c \in [a,b]$ بحيث أن $f(c) \le f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

بما أن $f'(a) < 0$ $\Leftarrow$ الدالة f متناقصة في النقطة a وعليه لايمكن أن تكون النقطة a نقطة نهاية صغرى للدالة f في الفترة $[a,b]$ ولهذا فان $a \neq c$

وبالمثل بما أن $f'(b) > 0$ $\Leftarrow$ الدالة f متزايدة في النقطة b وعليه لايمكن أن تكون النقطة a نقطة نهاية صغرى للدالة f في الفترة $[a,b]$ ولهذا فان $b \neq c$ $\Leftarrow$ $a < c < b$. وبما النقطة c نقطة نهاية صغرى $f'(c) = 0$

والآن: نبرهن الحالة العامة ونفرض $f'(a) < t < f'(b)$: نضع $g(x) = f(x) - tx$ لكل $x \in \mathrm{I}$

$$g'(x) = f'(x) - t, \qquad g'(a) = f'(a) - t, \qquad g'(b) = f'(b) - t$$

بما أن $f'(a) < t < f'(b)$ $\Leftarrow$ $f'(a) - t < 0 < f'(b) - t$ $\Leftarrow$ $g'(a) < 0 < g'(b)$

باستخدام الحالة الخاصة ، يوجد $a < c < b$ بحيث أن $g'(c) = 0$

$\Leftarrow$ $g'(x) = f'(x) - t$ $\Leftarrow$ $g'(c) = f'(c) - t = 0$ $\Leftarrow$ $f'(c) = t$

نتيجة(15.6.8)

ليست كل دالة هي مشتقة لدالة أخرى .

في الواقع إذا كانت الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

هي دالة مستمرة في كل نقاط $\mathbb{R}$ عدا الصفر ولكنها لاتحقق القيمة المتوسطة فهي تأخذ القيمتين 1 ,-1 ولكنها لاتاخذ القيمة 0 الواقعة بين 1 ,-1 ومن المبرهنة السابقة نستنتج بأنه لاتوجد دالة F على $\mathbb{R}$ بحيث أن $F' = f$

ملاحظة

أن هذا المثال يثير السؤال التالي . ما هي الدوال التي تكون مشتقة لدوال أخرى ؟ بعبارة أخرى إذا كانت الدالة f معرفة على الفترة المفتوحة I ، متى توجد دالة أخرى F معرفة على الفترة I وتحقق المعادلة $F' = f$ الجواب لهذا السؤال سيكون في موضوع التكامل.

7.8

مبرهنة (1.7.8) (مبرهنة رول Rolle's Theorem)

إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة عند الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عند الفترة المفتوحة (a,b) ، و كانت $f(a) = f(b)$ ، فانه يوجد $c \in (a,b)$ بحيث $f'(c) = 0$

البرهان:

إذا كانت الدالة f ثابتة على الفترة $[a,b]$ فان $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a,b)$ وعليه نستطيع أن نأخذ $c \in (a,b)$ وعندئذ يكون $f'(c) = 0$

أما إذا كانت الدالة f غير ثابتة

بما أن $[a,b]$ مجموعة مرصوصة وان الدالة f مستمرة عند الفترة $[a,b]$ $\Leftarrow$ f لها نقطة نهاية عظمى مطلقة x_0 ونقطة نهاية صغرى مطلقة y_0 ، أي أن $f(y_0) \leq f(x) \leq f(x_0)$ لكل $x \in [a,b]$

لو كان $f(y_0) = f(x_0)$ $\Leftarrow$ f دالة ثابتة ، وهذا تناقض وعليه $f(y_0) \neq f(x_0)$ $\Leftarrow$ $x_0 \neq y_0$

بما أن $f(a) = f(b)$

$\Leftarrow$ أما $(\, f(x_0) \neq f(a)$ و $f(x_0) \neq f(b)\,)$ أو $(\, f(y_0) \neq f(a)$ و $f(y_0) \neq f(b)\,)$

$\Leftarrow$ أما $(\, x_0 \neq a$ و $x_0 \neq b \,)$ أو $(\, y_0 \neq a$ و $y_0 \neq b \,)$

$\Leftarrow$ أما $x_0 \in (a,b)$ أو $y_0 \in (a,b)$

$\Leftarrow$ أما x_0 نقطة نهاية عظمى محلية أو y_0 نقطة نهاية صغرى محلية

أما $f'(x_0)=0$ أو $f'(y_0)=0$ $\Leftarrow$ $c=x_0$ أو $c=y_0$

نتيجة(2.7.8)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة عند الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عند الفترة المفتوحة (a,b) وكانت $f'(x)\neq 0$ لكل $x\in(a,b)$ فأن $f(a)\neq f(b)$

مثال(3.7.8)

(1) لتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x^3-4x+3$ لكل $x\in R$.

نلاحظ أن الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ضع $a=-2,\quad b=2$ $\Leftarrow$ $f(a)=f(-2)=3,\quad f(b)=f(2)=3$ $\Leftarrow$ $f(a)=f(b)$

باستخدام مبرهنة رول ، يوجد $c\in(-2,2)$ بحيث أن $f'(c)=0$

$$f'(x)=3x^2-4 \quad\Rightarrow\quad f'(c)=3c^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2) إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x^3+3x+1$ لكل $x\in R$.

نلاحظ أن الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=3x^2+3=3(x^2+1)$$

$\Leftarrow$ $f'(x)\neq 0$ لكل $x\in\mathbb{R}$. وعليه لاتوجد $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث أن $a\neq b$ و $f(a)=f(b)$

(3) اثبت أن المعادلة $3x^5+15x-8=0$ لها جذر حقيقي واحد فقط.

الحل:

$$f(x)=3x^5+15x-8,\quad f'(x)=15x^4+15=15(x^4+1)$$

$\Leftarrow$ $f'(x)\neq 0$ لكل $x\in\mathbb{R}$. وعليه لاتوجد $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث أن $a\neq b$ و $f(a)=f(b)$

وهذا يعني بأنه لايوجد أكثر من عدد حقيقي واحد يحقق المعادلة $3x^5+15x-8=0$

مبرهنة (4.7.8) مبرهنة القيمة الوسطى Mean Value Theorem

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عن الفترة المفتوحة (a,b) فأنه يوجد $c\in(a,b)$ بحيث أن
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

البرهان :

لتكن الدالة $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة
$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

بما أن f مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عن الفترة المفتوحة (a,b) $\Leftarrow$ g مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عن الفترة المفتوحة (a,b)

$$g(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$$

$\Leftarrow$ $g(a)=g(b)$. باستخدام مبرهنة رول يوجد $c\in(a,b)$ بحيث أن $g'(c)=0$

بما آن $g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftarrow g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

مثال(5.7.8)

إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{2}x^3$ لكل $x\in\mathbb{R}$. جد جميع الأعداد الحقيقية c في الفترة $(-2,2)$ والتي كل منها يحقق مبرهنة القيمة الوسطى.

الحل :

$$a=-2,\quad b=2,\quad f(a)=-4,\quad f(b)=4$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{4-(-4)}{2-(-2)}=2$$

$f'(x)=\frac{3}{2}x^2 \Leftarrow f'(c)=\frac{3}{2}c^2 \Leftarrow \frac{3}{2}c^2=2 \Leftarrow c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ ،

أي يوجد عددان هما $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ و $\frac{2}{\sqrt{3}}$ في الفترة $(-2,2)$

نتيجة (8.7.8)

لتكن I فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$. إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وان $f'(x)=0$ لكل $x\in\mathrm{I}$ فأن الدالة f ثابتة

البرهان :

ليكن $x,y\in\mathrm{I}$ بحيث أن $x<y$

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة I فان f قابلة للاشتقاق على الفترة (x,y) باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى، يوجد $c\in(x,y)$ بحيث أن $f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

بما أن $c\in(x,y) \Leftarrow c\in\mathrm{I} \Leftarrow f'(c)=0$ وعليه $f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$\Leftarrow f(x)=f(y) \Leftarrow f$ دالة ثابتة .

نتيجة(9.7.8)

لتكن I فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$. إذا كانت كل من $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ ، $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق وكان $f'(x)=g'(x)$ لكل $x\in\mathrm{I}$ فأن $f(x)-g(x)=k$ لكل $x\in\mathrm{I}$ حيث k ثابت اختياري .

البرهان :

نفرض $h(x)=f(x)-g(x) \Leftarrow h'(x)=f'(x)-g'(x)$

بما أن $f'(x)=g'(x)$ لكل $x\in\mathrm{I} \Leftarrow h'(x)=0$ لكل $x\in\mathrm{I} \Leftarrow h$ دالة ثابتة ، أي أن $h(x)=k$ لكل $x\in\mathrm{I}$

حيث k ثابت $f(x)-g(x)=k$ لكل $x\in\mathrm{I}$.

نتيجة(10.7.8)

لتكن I فترة مفتوحة . ولتكن $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق

(1) إذا كانت $f'(x)>0$ لكل $x\in\mathrm{I}$ فأن الدالة f متزايدة على I

(2) إذا كانت $f'(x)<0$ لكل $x\in\mathrm{I}$ فأن الدالة f متناقصة عن I

البرهان :

(1) ليكن $x, y \in \mathrm{I}$ بحيث أن $x < y$

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة I فان f قابلة للاشتقاق على الفترة (x, y) باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى، يوجد $c \in (x, y)$ بحيث أن $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$

بما أن $f'(c) > 0 \Leftarrow \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$

بما أن $x < y \Leftarrow y - x > 0 \quad f(y) - f(x) > 0 \Leftarrow f(x) < f(y) \Leftarrow f$ متزايدة على I.

وبالمثل نبرهن (2)

مثال (11.7.8)

(1) جد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ لكل $x \in R$

(2) اثبت أن الدالة $f(x) = x^5 + 3x^3 + 9x - 3$ متزايدة في $\mathbb{R}$ لان $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 9 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(3) اثبت أن الدالة $f(x) = 4 - 5x^3$ متناقصة في $\mathbb{R}$ لان $f'(x) = -15x^2 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

الحل:

(1) $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. إذا كان $f'(x) > 0 \Leftarrow (x-1)(x-3) > 0$ بحل تلك المتباينة نحصل على أن الدالة f متزايدة في الفترتين $(-\infty, 1)$ ، $(3, \infty)$ ، أما إذا كانت $f'(x) < 0 \Leftarrow (x-1)(x-3) < 0$ بحل تلك المتباينة نحصل على أن الدالة f متناقصة في الفترة $(1,3)$

(2) أن الدالة $f(x) = x^5 + 3x^3 + 9x - 3$ متزايدة في $\mathbb{R}$ لان $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 9 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(3) أن الدالة $f(x) = 4 - 5x^3$ متناقصة في $\mathbb{R}$ لان $f'(x) = -15x^2 > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

مبرهنة (12.7.8) مبرهنة القيمة الوسطى الموسعة An Extension of the Mean Value Theorem

إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ومشتقتها الأولى f' مستمرتين على الفترة $[a,b]$ وإذا كانت f' قابلة للاشتقاق عن الفترة المفتوحة (a,b) فأنه يوجد $c \in (a,b)$ بحيث أن

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(c)$$

البرهان :

نعرف الثابت k بالمعادلة $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{1}{2}(b-a)^2 k$

لتكن الدالة $g : [a,b] \to R$ معرفة بالصيغة $g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \dfrac{1}{2}(b-x)^2 k$

بما أن f مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عن الفترة المفتوحة $(a,b) \Leftarrow g$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عن الفترة المفتوحة (a,b)

$$g(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{1}{2}(b-a)^2 k = f(b) - f(b) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(b) - (b-b)f'(b) - \frac{1}{2}(b-b)^2 k = f(b) - f(b) = 0$$

$g(a) = g(b) \Leftarrow$. باستخدام مبرهنة رول يوجد $c \in (a,b)$ بحيث أن $g'(c) = 0$

بما أن $g'(x)=-(b-x)f''(x)+(b-x)k \Leftarrow g'(c)=-(b-c)f''(c)+(b-c)k=0 \Leftarrow k=f''(c)$

وعليه $f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{1}{2}(b-a)^2 f''(c)$

8.8 نقاط الانقلاب Inflection Points

تعريف(1.8.8)

لتكن I فترة مفتوحة ، الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ولتكن P نقطة تقع على مخطط f . يقال عن مخطط f بأنه مقعر للأعلى (**Concave Upward**) عند النقطة P إذا كانت جميع النقاط على المخطط القريبة نسبيا من النقطة P تقع فوق المستقيم المماس لمخطط f في النقطة P . و يقال عن مخطط f بأنه مقعر للأسفل (**Concave Downward**) عند النقطة P إذا كانت جميع النقاط على المخطط القريبة نسبيا من النقطة P تقع تحت المستقيم المماس لمخطط f في النقطة P .

مبرهنة(2.8.8)

لتكن I فترة مفتوحة ، الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ولتكن $c\in\mathrm{I}$

(1) مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى عند النقطة $(c,f(c))$ إذا وجدت فترة مفتوحة $J\subseteq\mathrm{I}$ تحتوي على c بحيث أن $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)$ لكل $x\in J|\{c\}$.

(2) مخطط الدالة f بكون مقعر للأسفل عند النقطة $(c,f(c))$ إذا وجدت فترة مفتوحة $J\subseteq\mathrm{I}$ تحتوي على c بحيث أن $f(x)<f(c)+f'(c)(x-c)$ لكل $x\in J|\{c\}$.

البرهان:

(1)

معادلة المستقيم المماس لمخطط الدالة f في النقطة $P(c,f(c))$ هي $y-f(c)=f'(c)(x-c)$

$\Leftarrow y=f(c)+f'(c)(x-c)$

لتكن $x\in\mathrm{I}$ بحيث أن $x\neq c$. نفترض أن العمود النازل من النقطة $Q=(x,f(x))$ على محور x يقطع المماس في نقطة مثل T وهذا يعني أن مخطط الدالة f يقع فوق المماس إذا كانت Q فوق T

بما أن الأحداثي الصادي للنقطة T هو $f(x)$ وان النقطة T تقع على المماس فان الأحداثي الصادي للنقطة T هو $f(c)+f'(c)(x-c)$ ، فان النقطة Q تقع فوق النقطة T إذا وفقط إذا كان $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)$

وبالمثل نبرهن (2)

مبرهنة(3.8.8)

لتكن I فترة مفتوحة ، الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق ولتكن $f''(x)$ موجودة لكل $x\in\mathrm{I}$

(1) إذا كانت $f''(x)>0$ لكل $x\in\mathrm{I}$ فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى على I .

(2) إذا كانت $f''(x)<0$ لكل $x\in\mathrm{I}$ فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأسفل على I .

البرهان :

(1) ليكن $c\in\mathrm{I}$ بحيث أن $c\neq x$ باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى الموسعة ، يوجد $z\in(c,x)$ بحيث أن

$f(x)=f(c)+(x-c)f'(c)+\frac{1}{2}(x-c)^2 f''(z)$

بما أن $x \neq c \Leftarrow (x-c)^2 > 0$ وكذلك بما أن $z \in (c,x) \subseteq I \Leftarrow f''(z) > 0$ فان $\frac{1}{2}(x-c)^2 f''(z) > 0$

وعليه $f(x) > f(c) + (x-c)f'(c)$ لكل $x \in I$ بحيث أن $x \neq c$. وهذا يعني أن مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى عند النقطة $(c, f(c))$ وبما أن c نقطة ما في I فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى على I.

وبالمثل نبرهن (2)

مثال(4.8.8)

(1) تأمل الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 5x^2 - 3$ لكل $x \in R$

الحل :

$f'(x) = 10x \Leftarrow f''(x) = 10 \Leftarrow f''(x) > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وعليه ، فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى

(2) تأمل الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 2x^3 - 5$ لكل $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 \Leftarrow f''(x) = 12x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

إذا كان $x > 0$ فان $f''(x) > 0$ وعليه ، فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى ، أما إذا كان $x < 0$ فان $f''(x) < 0$ وعليه ، فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأسفل.

(3) تأمل الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ لكل $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = x^2 - 2x \Leftarrow f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$ لكل $x \in \mathbb{R}$

إذا كان $x > 1$ فان $f''(x) > 0$ وعليه ، فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى إلى يمين $x = 1$ ، أما إذا كان $x < 1$ فان $f''(x) < 0$ وعليه ، فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأسفل إلى يسار $x = 1$.

ملاحظة

عكس المبرهنة اعلاة غير صحيح ،أي قد يكون مخطط الدالة f مقعرا للأعلى عند النقطة $(c, f(c))$ ومع ذلك تكون $f''(c)$ غير موجبة، أو يكون مقعرا للأسفل عند النقطة $(c, f(c))$ ومع ذلك تكون $f''(c)$ غير سالبة.

مثلا الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = x^4 + 3$ لكل $x \in R$

نلاحظ أن $f''(0) = 0$ ومع ذلك فان مخطط الدالة f مقعر للأعلى عند النقطة $(0,3)$

تعريف(5.8.8)

يقال عن النقطة $(c, f(c))$ بأنها نقطة انقلاب (**Inflection Point**) لمخطط الدالة f إذا كان له مماس في هذه النقطة وكذلك توجد فترة مفتوحة J تحتوي على c بحيث إن إحدى الحالتين تكون صادقة لكل $x \in J$

(1) $f''(x) < 0$ عندما $x < c$, $f''(x) > 0$ عندما $x > c$

(2) $f''(x) > 0$ عندما $x < c$, $f''(x) < 0$ عندما $x > c$.

مبرهنة(6.8.8)

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق، I فترة مفتوحة، $c \in I$. إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انقلاب لمخطط الدالة f، وان $f''(c)$ موجودة فان $f''(c) = 0$.

البرهان:

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $f''(c) \neq 0$

بما أن $f''(c)$ موجودة فان ، أما $f''(c) > 0$ أو $f''(c) < 0$

إذا كانت $f''(c)>0$ ، بما أن f'' مستمرة في c ، توجد فترة مفتوحة $(a,b)\subseteq \mathrm{I}$ تحتوي على c بحيث أن $f''(x)>0$ لكل $x\in(a,b)$. وعليه ، فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى على (a,c) وأيضا على (c,b) وهذا تناقض لان $(c,f(c))$ نقطة انقلاب لمخطط الدالة $f \Leftarrow f''(c)\not> 0$. وبالمثل نبرهن $f''(c)\not< 0$ وعليه $f''(c)=0$

مثال(7.8.8)

تأمل الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^4-6x^3-24x^2$ لكل $x\in R$

الحل :

$f'(x)=4x^3-18x^2-48x \Leftarrow f''(x)=12x^2-36x-48=12(x^2-3x-4)=12(x-4)(x+1)$ لكل $x\in R$

وعليه ، فان مخطط الدالة f بكون مقعر للأعلى على الفترتين $(-\infty,1)$ ، $(4,\infty)$ ومقعر للأسفل على الفترة $(-1,4)$

وعليه للمخطط نقطة إنقلاب عند النقطة $x=-1$ والنقطة $x=4$.

ملاحظة

عكس المبرهنة اعلاة غير صحيح ،أي قد يكون $f''(c)=0$ ومع ذلك فليس لمخطط الدالة f نقطة انقلاب عند النقطة c .

مثلا الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^4$ لكل $x\in R$

نلاحظ أن مخطط الدالة f مقعر للأعلى في جميع قيم x . وبذلك فان $(0,0)$ ليست نقطة انقلاب بالرغم من $f''(0)=0$

9.8 متسلسلات تايلر وماكلورين Taylor and Maclaurin series

تعريف(1.9.8)

يقال عن الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ بأنها تنتمي إلى الصنف $C^{(\infty)}$ أو قابلة للاشتقاق لانهائيا ، إذا كانت الدالة f تمتلك مشتقة لأي رتبة n.

المبرهنة التالية تبين أن الدالة التي تنتمي إلى الصف $C^{(n+1)}$ يمكن أن تقترب موضعيا لمتعددة حدود من الدرجة n .

مبرهنة(2.9.8) مبرهنة تايلر (Taylor's Theorem)

إذا كانت الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ تنتمي إلى الصنف $C^{(n+1)}$ ولتكن $a,b\in\mathrm{I}$ فان

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

حيث $a\le c\le b$

البرهان :

نعرف الدالة $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ بالصيغة

$$g(x)=f(b)-(f(x)+(b-x)f'(x)+\cdots+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x))+t(b-x)^{n+1}$$

حيث $t=\frac{1}{(b-a)^{n+1}}(-f(b)+f(a)+(b-a)f'(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a))$

الدالة g مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) كما انه $g(a)=0,\quad g(b)=0$

باستخدام مبرهنة رول ، يوجد $c\in(a,b)$ بحيث أن $g'(c)=0$ ولهذا فان

$$0=-f'(c)+f'(c)+\cdots+\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)-t(n+1)(b-c)^n$$

من هذا ينتج أن $t=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ وبالتالي فان

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

حيث $a \le c \le b$

حالة خاصة : إذا كانت $a = 0$ و $b = x$ فان $f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ حيث $0 \le c \le x$

مثال(3.9.8)

تأمل الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = \sin x$ لكل $x \in \mathbb{R}$

فان $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$ حيث 0 ، x

تعريف(4.9.8)

لتكن $\{a_n\}$ متتابعة من الثوابت . التعبير

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \cdots \qquad (1)$$

يطلق عليه متسلسلة القوى (**Power Series**) في x ، حيث أن $x^0 = 1$ لكل قيم x . ومن ضمنها $x = 0$. كما يطلق على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n \quad \cdots \qquad (2)$$

متسلسلة قوى في $x-b$ ، حيث b عدد ثابت. من الواضح ان متسلسلة القوى(2) متقاربة عندما $x = b$ وكذلك متسلسلة القوى(1) متقاربة عندما $x = 0$ وان مجموعها يساوي a_0. مجموعة الأعداد التي عندها تتقارب متسلسلة القوى تسمى مجموعة التقارب (Convergence set) لمتسلسلة القوى.

مبرهنة(5.9.8)

لتكن الدالة $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ تنتمي إلى الصنف $C^{(n+1)}$ وليكن $a \in \mathrm{I}$ فان الدالة f يمكن التعبير عنها على شكل متسلسلة قوى لانهائية وبقوى في $x-a$ ، أي أن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

تسمى متسلسلة تايلر للدالة f عند النقطة a .

البرهان :

باستخدام مبرهنة تيلر يمكن التعبير عن الدالة f على شكل متسلسلة قوى لانهائية وبقوى في $x-b$ ، أي أن : لكل $n \in N$ ولكل $x \in \mathrm{I}$ فان

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_n)$$

حيث c_n نقطة بين a و x وتعتمد على n . من الواضح انه يمكن نقرن الدالة f مع المتسلسلة اللانهائية

$$f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

ملاحظة

أن التعبير عن الدالة f على شكل متسلسلة قوى لانهائية يجب أن لا يوحي بان هذه المتسلسلة متقاربة . وان كانت المتسلسلة متقاربة . فليس من الضروري أن تقترب إلى $f(x)$.

مثال(6.9.8)

إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تحقق الشروط الآتية

$(1)\ f(0)=1$ $(2)\ f'(x)=f(x)$ لكل $x\in R$

فان متسلسلة تايلر لهذه الدالة f حول النقط 0 هي $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ وان هذه المتسلسلة متقاربة لكل $x\in\mathbb{R}$ وتقترب إلى $f(x)$.

ر 332

Mathematical Analysis II (2) تحليل رياضي

ظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

محاضرات الدكتور نوري فرحان المياحي

في

Mathematical Analysis II (2) تحليل رياضي

1. متتابعات ومتسلسلات الدوال Sequence and Series of Functions

مقدمة، التقارب النقطي، التقارب المنتظم، التقارب المقيد، العلاقة بين التقاربات الثلاثة، المتسلسلات اللانهائية للدوال، متسلسلات القوى.

2. التكامل Integral

تكامل ريمان مع بعض المبرهنات المتعلقة بقابلية التكامل، مبرهنة لبيك في التكامل الريماني، الخواص الأولية لتكامل ريمان، مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل، فضاء الدوال القابلة للتكامل الريماني كتحويل، تكامل ريمان دالة (خطية، رتبيه ، غير متباينة)، الاشتقاق والتكامل الريماني، تكامل ريمان ستيلجس، تعريف وأمثلة وخواصه.

3. القياس Measure

أطوال المجموعات المفتوحة المقيدة، القياس الخارجي للمجموعات المقيدة، القياس الداخلي للمجموعات المقيدة، المجموعات القابلة للقياس، قياس المجموعات المقيدة، قياس المجموعات غير المقيدة، مثال على مجموعة غير قابلة للقياس، الدوال القابلة للقياس، وبعض المبرهنات المكافئة للدوال القابلة للقياس، فضاء الدوال القابلة للقياس.

4. تكامل لبيك The Lebesgue Integral

تعريف تكامل ليبيك مع أمثلة، خواص تكامل ليبيك، العلاقة بين التكامل الريماني والليبيكي، فضاء الدوال القابلة للتكامل الليبيكي.

5. الدوال مقيدة التغاير Functions of Bonded Variation

دوال مقيدة التغاير، بعض أنواع الدوال مقيدة التغاير، الاستمرارية المطلقة والعلاقة بين الاستمرارية المطلقة والدوال المقيدة التغاير.

ر 332

تحليل رياضي (2) Mathematical Analysis II

نظري : 3   مناقشة : 1   عدد الوحدات : 3

المصادر

[1] عادل غسان نعوم، **"مقدمة في التحليل الرياضي"**، جامعة بغداد – العراق 1986.

[2] علي عزيز علي و عبد الرزاق علي الحسوان وعادل زنبل حسين، **"مبادئ الرياضيات التفاضل والتكامل"**، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ،1986.

[3] برسل " حسبان التفاضل والتكامل مع الهندسة التحليلية" ترجمة علي عزيز وآخرون جامعة الموصل الجزء الأول الطبعة الثانية 1983

[4] Apostol . T.M, " Mathematical Analysis", 1974

[5] Ash, R. B., " Real Analysis And Probability", 1972.

[6] Bass . R.F., “ Real Analysis” 2010

[7] Burrill, C.W. , And Knudsen, J. R.," Real Variables" , 1969.

[9] Edwin Hewitt Karl Stromberg, " Real And Abstract Analysis" , 1978

[9] Faris . W.G.,” Real Analysis “ 2004

[10] Folland . G. B.," Real Analysis", 1999

[11] Goldberg, R. R.," Methods Of Real Analysis",1979.

[12] Gupta. S.L & Rani .N., “Fundamental Real Analysis ” 1988.

[13] Kolmogorov. A. N. And Fomin. S. V.," Introductory Real Analysis",1970.

[14] Malik .V., “ Elements of Real Analysis ”1983.

[15] Royden. H. L.," Real Analysis",1988

[16] Rudin. W., " Principles Of Mathematical Analysis",1976

[17] Trench. W.F., “ Introduction to Analysis “ 2oo9.

ر 332
Mathematical Analysis II (2) تحليل رياضي

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

---

1. متتابعات ومتسلسلات الدوال Sequence and Series of Functions

1.1 متتابعات الدوال Sequence of Functions

ليكن (X,d) فضاء متريا. سبق وان عرفنا الدوال التي مستقرها مجموعه جزئية من مجموعة الإعداد الحقيقية بالدوال ذات القيم الحقيقية. ورمزنا للدوال ذات القيم الحقيقية والمعرفة على المجموعة X بالرمز $RV(X)$ ، أي أن
$RV(X)=\{f : X \to \mathbb{R},\ \text{دالة } f\}$

ولتكن $\{f_n\}$ متتابعة في $RV(X)$. لكل $x \in X$ تحصل على متتابعة عدديه $\{f_n(x)\}$. لو فرضنا المتتابعة العددية $\{f_n(x)\}$ متقاربة لجميع نقاط X . فيمكننا تعريف داله $f : X \to \mathbb{R}$ بالصيغة الآتية :

لكل $x \in X$ فأن $f(x)$ نقطة تقارب للمتتابعة العددية $\{f_n(x)\}$ أي إن

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{أو} \quad f_n(x)\to f(x) \ .$$

من تعريف التقارب للمتتابعات العددية نحصل على لكل $\pounds > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن

$$|f_n(x)-f(x)|<\pounds \quad \text{لكل} \quad n>k \ .$$

لاحظ إن k بصوره عامه ، تعتمد على كل من $x,\pounds$. مما تقدم يمكن أن يصاغ في التعريف الأتي :

تعريف (1.1.1)

لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على ألمجموعه X ولتكن f داله ذات قيم حقيقية معرفه على X . يقال عن المتتابعة $\{f_n\}$ بأنها

(1) متقاربة نقطيا (Converge pointwise) إلى الدالة f إذا كانت المتتابعة $\{f_n(x)\}$ تقترب إلى العدد $f(x)$ لكل $x \in X$. بعبارة أخرى إذا كان لكل $x \in X$ ولكل $\pounds > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k (يعتمد على كل من $\pounds$، x) بحيث إن

$$|f_n(x)-f(x)|<\pounds \quad \text{لكل} \quad n>k \ .$$

ويكتب $f_n \to f$.

(2) تقترب بانتظام (Uniformly Converge) إلى الدالة f إذا كان لكل $\pounds > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k (لا يعتمد على x) بحيث إن $|f_n(x)-f(x)|<\pounds$ لكل $n>k$ ولكل $x\in X$.

ويكتب $f_n \xrightarrow{u} f$. أذا كانت $f_n \xrightarrow{u} f$ فأن $f_n \to f$ والعكس غير صحيح دائما.

(3) متتابعة كوشي النقطية (pointwise Cauchy sequence) إذا كان لكل $x \in X$ ولكل $\pounds > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن $|f_n(x)-f_m(x)|<\pounds$ لكل $n,m>k$

(4) متتابعة كوشي المنتظم (Uniformly Cauchy sequence) إذا كان لكل $\pounds > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن $|f_n(x)-f_m(x)|<\pounds$ لكل $n,m>k$ ولكل $x \in X$.

مثال (2.1.1)

لتكن الدالة $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f_n(x)=\dfrac{x}{n}$ لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $n=1,2,\cdots$. فان $f_n \to f$ حيث أن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

الحل :

لكل $x \in \mathbb{R}$. إذا كان $\pounds > 0$ فانه باستخدام خاصية ارخميدس ، يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $\dfrac{x}{k}<\pounds$

ومن هذا نحصل على

$\frac{x}{n} < \pounds$ لكل $n \ge k$ ، أي أن $\left|f_n(x) - f(0)\right| = \left|f_n(x) - 0\right| < \pounds$ لكل $n \ge k$. وعليه $f_n \to f$

سؤال :

هل أن $f_n \xrightarrow{u} f$ ؟ بعبارة أخرى : هل يمكن اختيار عددا صحيحا موجبا k_0 بحيث أن المتراجحة $\frac{x}{k_0} < \pounds$ تحقق لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكل $k_0 < n$.

الجواب :

لو كان الجواب نعم نحصل على $x < k_0\pounds$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وهذا غير ممكن

مثال(3.1.1)

لتكن الدالة $f_n : (0,b) \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f_n(x) = \frac{x}{n}$ لكل $x \in (0,b)$ ولكل $n = 1,2,\cdots$. فان $f_n \to f$ حيث أن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

الحل :

خذ $\varepsilon > 0$ (كما في المثال 2.1.1) لكل $x \in (0,b)$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $\frac{x}{n} < \pounds$ لكل $n > k$

ولذلك فان $f_n \to f$.

لاحظ الآن لكل $x \in (0,b)$ فان $x < b$ $\Leftarrow$ $\frac{x}{n} < \frac{b}{n}$ وعليه ، إذا كان k_0 عددا صحيحا موجبا يحقق المتراجحة $\frac{b}{k_0} < \pounds$ ، فان $\frac{b}{n} < \pounds$ لكل $n \ge k_0$ وعليه $\left|\frac{x}{n}\right| < \pounds$ لكل $n \ge k_0$ ولكل $x \in (0,b)$ وعليه

مثال(4.1.1)

لتكن الدالة $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f_n(x) = x^n$ لكل $x \in [0,1]$ ولكل $n = 1,2,\cdots$. فان $f_n \to f$ حيث أن الدالة $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

الحل :

لكل $0 < a < 1$. ليكن $\pounds > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $k \log a < \log \pounds$ ، أي أن $a^k < \pounds$

وعليه $\left|x^n - 0\right| < a^n < a^k < \pounds$ لكل $n > k$ ولكل $x \in [0,a]$ وهذا يعني $a_n \to 0$

إذا كانت $a = 0$ فمن الواضح أن $a_n \to 0$ وإذا كانت $a = 1$ فان $a_n \to 1$ وعليه $f_n \to f$

سؤال :

هل أن $f_n \xrightarrow{u} f$ ؟ بعبارة أخرى : هل يمكن اختيار عددا صحيحا موجبا k_0 بحيث أن المتراجحة $\left|x^n\right| < \pounds$ تحقق لكل $x \in [0,1]$ ولكل $n > k_0$.

الجواب :

لو كان الجواب نعم نحصل على $x < k_0\pounds$ لكل $x \in \mathbb{R}$ وهذا غير ممكن

من المثال (4.1.1) أعلاه نستنتج أن، $f_n \xrightarrow{u} f=0$ على كل فترة مغلقة $[0,a]$ بحيث أن $0<a<1$
الآن : في $(0,1)$:
ليكن $\frac{1}{4}=\pounds$، يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $|x^n-0|<\frac{1}{4}$ لكل $n>k$ ولكل $x\in[0,1]$

$$e^{-1}<\frac{1}{4} \Leftarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{4} \quad \forall \quad n>h \Leftarrow x_n=1-\frac{1}{n}\in[0,1] \Leftarrow$$

$\Leftarrow \{x^n\}$ ليس متقاربة بانتظام على $[0,1]$ ، أما إذا كانت $x^n=1 \Leftarrow x=1$.
المتتابعة $\{x^n\}$ متقاربة بانتظام إلى 0 على $X=[0,a]$, $0<a<1$ وغير متقاربة على $[0,1]$.

مثال (5.1.1)

المتتابعة $\left\{\frac{nx}{1+n^2x}\right\}$ متقاربة نقطيا وليس متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

$$|f_n(x)-0|=\left|\frac{nx}{1+n^2x}\right|\le\left|\frac{nx}{n^2x^2}\right|=\frac{1}{|nx|}<\frac{1}{nk}<\pounds \quad \forall \quad n\ge\frac{1}{k\pounds}$$

نستنتج أن المتتابعة متقاربة إلى 0 لكل $x\in\mathbb{R}$.

مثال (6.1.1)

لتكن الدالة $f_n:(0,2]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \frac{1}{n}\le x\le 2\\ 0, & x<\frac{1}{n}\end{cases}$$

ولتكن الدالة $f:(0,2]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{x}$ لكل $0<x\le 2$ فان $f_n\to f$ ولكن المتتابعة $\{f_n\}$ غير متقاربة بانتظام إلى الدالة f .

ميزات التقارب المنتظم

لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المجموعة X ولتكن f داله ذات قيم حقيقية معرفه على X بحيث أن $f_n\to f$.

(1) إذا كانت كل من الدوال f_n مقيدة على المجموعة X . فان الدالة f ليس بالضرورة أن تكون مقيدة. (كما في المثال 6.1.1)

(2) إذا كانت كل من الدوال f_n مستمرة على المجموعة X . فان الدالة f ليس بالضرورة أن تكون مستمرة . (كما في المثال 4.1.1)

مبرهنة (7.1)

لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المجموعة X ولتكن f داله ذات قيم حقيقية معرفه على X بحيث أن $f_n\xrightarrow{u} f$.

(1) إذا كانت كل من الدوال f_n مقيدة على المجموعة X . فان الدالة f مقيدة أيضا.

(2) إذا كانت كل من الدوال f_n مستمرة على المجموعة X . فان الدالة f مستمرة أيضا.

البرهان:

(1) بما أن $f_n \xrightarrow{u} f$ ، يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $|f_n(x) - f(x)| < 1$ لكل $n > k$ ولكل $x \in X$.
وبما أن كل من الدوال f_n مقيدة على المجموعة X ، يوجد عدد صحيح موجب M بحيث أن $|f_n(x)| \le M$ لكل $x \in X$. وعليه $|f_{k+1}(x)| \le M$ لكل $x \in X$
ولذلك لكل $x \in X$ فان

$$|f(x)| = |f_{k+1}(x) + f(x) - f_{k+1}(x)| = |f_{k+1}(x) - f(x)| + |f_{k+1}(x)| \le 1 + M$$

وعليه الدالة f مقيدة.

(2) لتكن $x_0 \in X$. يجب أن نبرهن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 لتكن $\{x_m\}$ متتابعة في X بحيث أن $x_m \to x_0$

الآن : نبرهن $f(x_m) \to f(x_0)$: ليكن $\pounds > 0$

بما أن $f_n \xrightarrow{u} f$ يوجد عدد صحيح موجب ℓ بحيث أن $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\pounds}{3}$ لكل $n > \ell$ ولكل $x \in X$.

وبما أن $x_m \to x_0$ وكل من الدوال f_n مستمرة على المجموعة X ، فان $f_n(x_m) \to f_n(x_0)$ وعليه يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $|f_{\ell+1}(x_m) - f_{\ell+1}(x_0)| < \frac{\pounds}{3}$ لكل $m > k$

$$\begin{aligned}|f(x_m) - f(x_0)| &= |(f(x_m) - f_{\ell+1}(x_m)) + (f_{\ell+1}(x_m) - f_{\ell+1}(x_0)) + (f_{\ell+1}(x_0) - f(x_0))| \\ &\le |f(x_m) - f_{\ell+1}(x_m)| + |f_{\ell+1}(x_m) - f_{\ell+1}(x_0)| + |f_{\ell+1}(x_0) - f(x_0)|\end{aligned}$$

لكل $m > k$

$$|f(x_m) - f(x_0)| < \frac{\pounds}{3} + \frac{\pounds}{3} + \frac{\pounds}{3} = \pounds$$

$\Leftarrow$ $f(x_m) \to f(x_0)$ وهذا يعني أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 ، وبما أن النقطة x_0 اختيارية فان الدالة f مستمرة .

ملاحظة

بعد أن لاحظنا بعض ميزات التقارب المنتظم . نعطي في المبرهنة التالية الشرط الكافي لأجل أن يكون التقارب منتظما .

مبرهنة(8.1.1)

ليكن (X,d) فضاء متريا مرصوصا وليكن $f, f_n \in C(X)$ لكل قيم n بحيث أن
(1) $f_n \to f$ ، (2) $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ لكل $x \in X$ ولكل قيم n أو $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ لكل $x \in X$ ولكل قيم n .
فان $f_n \xrightarrow{u} f$.

البرهان :

سنبرهن في حالة $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ لكل $x \in X$

لكل قيم n ، نضع $g_n = f_n - f$. الدالة g_n مستمرة وكذلك $g_n \to 0$.كما انه لكل $x \in X$ فان $g_{n+1}(x) \le g_n(x)$.

يجب أن نبرهن $g_n \xrightarrow{u} 0$

ليكن $0 < £$. لكل $x \in X$ ، يوجد عدد صحيح موجب $n(x)$ بحيث أن $g_{n(x)} < \frac{£}{2}$

بما أن الدالة $g_{n(x)}$ مستمرة ، يوجد فترة مفتوحة J_x تحتوي على x بحيث أن إذا كانت $y \in J_x \cup X$ فان

$$g_{n(x)}(y) < g_{n(x)}(x) + \frac{£}{2} < \frac{£}{2}$$

لتكن $F = \{J_x : x \in X\}$ ، فان العائلة F تغطي X ، وبما أن X مجموعة مرصوصة . يوجد غطاء جزئي منتهي من F . وليكن $G = \{J_{x_i} : i = 1,2,\cdots,m\}$ هو الغطاء جزئي منتهي من F .

نضع $k = \max\{n(x_1), n(x_2), \cdots, n(x_m)\}$. من الواضح أن $g_k(x) < £$ لكل $x \in X$

بما أن $g_{n+1}(x) \le g_n(x)$ لكل $x \in X$ فان $g_n(x) < £$ لكل $x \in X$ ولكل $n > k$ وعليه $g_n \xrightarrow{u} 0$ وبذلك $f_n \xrightarrow{u} f$.

مبرهنة(9.1.1) مبرهنة وايرشترايز

إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة، فانه توجد متتابعة من متعددات الحدود $\{P_n\}$ التي تقترب بانتظام إلى f .

2.1 متسلسلات الدوال Series of Functions

لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال ذات القيم الحقيقية والمعرفة على المجموعة Ω . لكل $x \in \Omega$.نعرف

$$S_1(x) = f_1(x)$$
$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

يقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متقاربة في النقطة x إذا كانت المتتابعة $\{S_n(x)\}$ متقاربة . ويقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متقاربة (أو تتقارب إلى القيمة S)على Ω إذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة (إلى S)على Ω (أي أذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n = S$). ويطلق على العدد S مجموع المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ، أي أن $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. وإذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ متباعدة (أي أن $\lim_{n\to\infty} S_n$ غير موجود) فنقول إن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متباعدة وليس لها مجموع .

ويقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متقاربة بانتظام على Ω إذا كانت المتتابعة $\{S_n\}$ متقاربة بانتظام على Ω

بسهولة يمكن أن نبرهن :

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ تكون متقاربة بانتظام على Ω إذا وفقط إذا كان لكل $0 < £$ ، يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $\left|\sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(x)\right| < £$ لكل $x \in \Omega$ ولكل $m > 0$ و $n > k$

وأخيرا نقول أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ تكون متقاربة بصورة مطلقة في النقطة x إذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ متقاربة

مثال(1.2.1)

لتكن الدالة $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f_n(x) = x^{n-1}$ لكل $x \in \Omega$. ولكل قيم n متسلسلة للانهائية . إذا كانت كل من الدوال f_n مستمرة على Ω وكانت المتسلسلة تقترب بانتظام الى الدالة f على Ω فان الدالة f مستمرة.

الحل :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^k}{1-x}$$ عندما $x \neq 1$ ولذلك فان المتتابعة $\{S_n(x)\}$ متقاربة

وان $S_n(x) \to \frac{1}{1-x}$ إذا كانت $|x| < 1$ وعليه المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ تتقارب إذا كانت $|x| < 1$ وتتباعد إذا كانت $|x| \geq 1$

مبرهنة(2.2.1)

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متسلسلة لانهائية . إذا كانت كل من الدوال f_n مستمرة على Ω وكانت المتسلسلة تقترب بانتظام إلى الدالة f على Ω فان الدالة f مستمرة.

3.1 متسلسلات القوى Power Series

سنتطرق في هذه المحاضرة إلى نوعاً مهماً من المتسلسلات اللانهائية ذات الحدود المتغيرة . يطلق عليها متسلسلات القوى .

تعريف (1.3.1)

لتكن $\{a_n\}$ متتابعة من الثوابت . التعبير

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \cdots \qquad (1)$$

يطلق عليه متسلسلة القوى (Power Series) في x ، حيث أن $x^0 = 1$ لكل قيم x . ومن ضمنها $x = 0$. كما يطلق على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n \quad \cdots \qquad (2)$$

متسلسلة قوى في $x-b$ ، حيث b عدد ثابت.

عندما نعوض عن x بعدد معين. تصبح المتسلسلات أعلاه متسلسلات غير منتهية حدودها أعداد، والتي سبق وان تطرقنا لها بالتفصيل في المحاضرات السابقة وتعلمنا كيفية اختيار تقاربها. في هذه المحاضرة سنبحث عن قيم x التي تجعل متسلسلة القوى متقاربة. من الواضح أن متسلسلة القوى(2) متقاربة عندما $x = b$ وكذلك متسلسلة القوى(1) متقاربة عندما $x = 0$ وان مجموعها يساوي a_0. مجموعة الأعداد التي عندها تتقارب متسلسلة القوى تسمى مجموعة التقارب (Convergence Set) لمتسلسلة القوى

مثال (2.3.1)

(1) متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ متقاربة لكل $x\in\mathbb{R}$

(2) متسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{r^{n-1}}$ متقاربة عندما $|x|<r$ ومتباعدة عندما $|x|\ge r$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ لكافة الإعداد الحقيقية

مبرهنة (3.3.1)

إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متقاربة عند $x_0\ne 0$, x_0 فإنها متقاربة مطلقا لكل $x\in\mathbb{R}$ بحيث أن $|x|<|x_0|$.

نتيجة (4.3.1)

إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ متباعدة عند x_0 فأنها تتباعد أيضا لكل x بحيث ان $|x|>|x_0|$.

مبرهنة (5.3.1)

لأي متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ تكون واحدة فقط ممايلي متحققة

(1) المتسلسلة متقاربة عندما $x=0$ فقط.
(2) المتسلسلة متقاربة مطلقا لكل قيم x.
(3) يوجد عدد حقيقي موجب r بحيث أن المتسلسلة متقاربة مطلقا لكل قيم x بحيث أن $|x|<r$

نتيجة (6.3.1)

لأي متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-b)^n$ تكون واحدة فقط ممايلي متحققة

(1) المتسلسلة متقاربة فقط عندما $x=b$
(2) المتسلسلة متقاربة مطلقا لكل قيم x.
(3) يوجد عدد حقيقي موجب r بحيث ان المتسلسلة متقاربة مطلقا لكل قيم x التي تحقق $|x-b|<r$ وتكون متباعدة لكل قيم x التي تحقق $|x-b|>r$

مما تقدم نستنتج انه إذا لم تكن مجموعة التقارب لمتسلسلة قوى مكونة من عدد واحد (صفر أو b) فأنها تكون الفترة $(-\infty,\infty)$ أو $(b-r,b+r)$. ولذلك يطلق على مجموعة كل قيم x التي تجعل متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-b)^n$ متقاربة بفترة التقارب (Interval of Convergence) للمتسلسلة كما يطلق على العدد r في الحالة (3) في المبرهنة والنتيجة أعلاه بنصف قطر التقارب(Radius of Convergence). وعليه إذا كان r نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-b)^n$ فان فترة التقارب هي واحدة من الفترات $(b-r,b+r)$، $(b-r,b+r]$، $[b-r,b+r)$ ، $[b-r,b+r]$

مبرهنة (7.3.1)

(1) إذا كان $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r\neq 0$ فان نصف التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ هو $\frac{1}{r}$.

(2) إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة مطلقا عند إحدى طرفي فترة تقاربها فان تكون متقاربة مطلقا في الطرف الأخر.

(3) إذا كان r هو نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ فان نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n}$ هو $\sqrt{r}$.

2. التكامل Integral

التكامل ظهر عند أرخميدس كتجميع كبير لكميات متناهية في الصغر، وتطور مع ثابت بن قرة (221- 228 هـ) ، أما ابن الهيثم والذي يعتبر المؤسس الثاني لعلم التكامل فقد عمم نتائج أرخميدس. أما الانجاز الأهم لكل من نيوتن وليبنز هو اكتشافهما بان عملية التفاضل والتكامل هما وجهان لموضوع رياضي واحد . فقد بين نيوتن إمكانية حساب المساحة تحت المنحني باستخدام ما يسمى المشتقة العكسية، أما ليبنز فهو أول من استخدم الرمز $\int$ للتكامل ووصف سنة 1684 طرق حساب المساحة باعتبارها العملية العكسية لإيجاد ميل المماس. أما المبرهنة الأساسية في التفاضل والتكامل فقد كتبت واثبت بطريقة هندسية من قبل بارو، ثم اثبت من كل نيوتن وليبنز. أما التعريف الدقيق للتكامل المحدد فقد ظهر عند الألماني ريمان (1826 – 1866 م) معتمدا على نتائج كوشي.

1.2 عكس المشتقة Anti-derivative

العمليات العكسية كثيرة مثل الجمع والطرح عمليتان أحدهما عكس الأخرى، كذلك الضرب والقسمة... الخ. نحن الآن نبحث عن العكس في عملية الاشتقاق والذي سوف تطلق عليه مؤقتا عكس الاشتقاق .

تعريف (1.1.2)

يقال عن الدالة $F:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ بأنها عكس مشتقة (Antiderivative) الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ في الفترة I إذا كان $F'(x)=f(x)$ لكل $x\in\mathrm{I}$.

ومن الواضح انه إذا كانت الدالة F عكس مشتقة الدالة f فان $F+c$ يكون أيضا عكس مشتقة الدالة f على نفس الفترة حيث c ثابت اختياري لأنه

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)+c\big)=F'(x)=f(x)$$

مثال (1.1.2)

تأمل الدالة $F:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $F'(x)=4x^3$ لكل $x\in\mathrm{I}$.

الحل:

من معلوماتنا السابقة عن قواعد وقوانين المشتقات نستنتج أن مشتقة الدالة x^4 هي $4x^3$ وكذلك مشتقة كل الدوال x^4-7 ، x^4+5 هي $4x^3$ وبصورة إذا كان C أي ثابت اختياري فان مشتقة الدالة x^4+C هي $4x^3$. وعليه . نستطيع أن نقول أن $4x^3$ هي مشتقة لمجوعة غير منتهية غير منتهية من الدوال بالشكل x^4+C لكل $C\in R$.
وعلى هذا الأساس ، سوف نقول أن $F(x)=X^4+C$ حيث C ثابت اختياري .
وهكذا فان المشتقة وعكس المشتقة عمليتان عكسيتان في الوقت الذي يكون لأية دالة مشتقة واحدة على الأكثر ، فقد يكون لها عدد من عكسيات المشتقة .

مبرهنة (3.1.2)

إذا كانت $f'(x)=0$ لكل $x\in\mathrm{I}$ فان $f(x)=C$ لكل $x\in\mathrm{I}$ حيث C ثابت اختياري

البرهان:

ليكن $x_0\in\mathrm{I}=(a,b)$ ولتكن $x\in\mathrm{I}$ بحيث $x\neq x_0$
بما أن f' موجودة لكل نقاط (a,b) فان f' موجودة لكل نقاط (x_0,x) و f مستمرة على الفترة المغلقة $[x_0,x]$
باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى ، فانه يوجد $c\in(x_0,x)$ بحيث أن $f(x)=f(x_0)+f'(c)(x-x_0)$
لكن $f'(c)=0$ فان $f(x)=f(x_0)$ ، أي أن $f(x)=f(x_0)=C$ حيث C ثابت اختياري.
ومن السهولة الآن برهان المبرهنة الآتية :

مبرهنة (4.1.2)

إذا كانت كل من $f:[a,b]\to R$ و $g:[a,b]\to R$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) بحيث أن $f'(x)=g'(x)$ لكل $x\in(a,b)$ فان $f(x)=g(x)+C$ حيث C ثابت اختياري.

البرهان :

لتكن الدالة $h:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $h(x)=f(x)-g(x)$ لكل $x\in\mathrm{I}$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ لكل $x\in\mathrm{I}$ وعليه $h(x)=C$ لكل $x\in\mathrm{I}$ ، حيث C ثابت اختياري.

$\Leftarrow\quad f(x)-g(x)=C \quad\Leftarrow\quad f(x)=g(x)+C$ لكل $x\in\mathrm{I}$ ، حيث C ثابت اختياري.

من هذه المبرهنة يمكننا أن نقول : إذا كانت الدالة F عكس مشتقة الدالة f على الفترة I فان $F(x)+C$ حيث C ثابت اختياري هي عكس مشتقة $f(x)$ على I.

إذا استخدمنا التفاضل بدلا عن المشتقة. فنستطيع أن نعبر عن التعريف (1) بالصيغة الآتية :

تعريف (5.1.2)

يقال عن الدالة $F:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ بأنها عكس مشتقة الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ في الفترة I إذا كان $dF(x)=f(x)dx$ لكل $x\in\mathrm{I}$. يطلق على عملية إيجاد عكس المشتقة الأكثر عمومية لدالة معطاة بعكس التفاضل (Antidifferentiation) ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل لذلك عندما تكون $F'(x)=f(x)$ أي أن $dF(x)=f(x)dx$. نكتب

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

أي أن $\int d\big(F(x)\big)=F(x)+c$.

وقد سميت عملية عكس التفاضل بعملية التكامل غير المحدد (Indefinite Integral) وأطلق على الرمز $\int$ رمز التكامل .

مبرهنــة(6.1.2) صيغ التكامل Integration formulas

(1) $\int dx=x+c$

(2) $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad ,n\neq-1$

(3) $\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx$ لكل $\alpha\in R$

(4) $\int\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(5) $\int[f(x)]^n f'(x)dx=\dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c \quad ,n\neq-1$

(6) $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx=F\big(g(x)\big)+c$ حيث F عكس مشتقة f .

2.2 تطبيقات التكامل غير المحدد Applications of Indefinite Integral

سوف نتطرق بشيء من التفصيل حول تطبيقات التكامل غير المحدد في موضوع المعادلات التفاضلية .

مثال(1.2.2)

جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة $(-1,2)$ والذي ميله في أية نقطة على المنحني يساوي ضعف الإحداث السيني لتلك النقطة.

الحل:

بما أن الميل لمنحني في نقطة (x,y) هو $\frac{dy}{dx}$ والإحداث السيني للنقطة هو x فان $\frac{dy}{dx}=2x$ وعليه

$dy=2xdx \Leftarrow \int dy=\int 2xdx \Leftarrow y=x^2+c$ حيث C ثابت اختياري.

ولتعين قيمة C ، نرجع للشرط الابتدائي المعطى في المثال وهو أن المنحني يمر بالنقطة $(-1,2)$ ،ومعنى ذلك أن $y=2$ عندما $x=-1$ ، وبالتعويض في ناتج التكامل غير المحدد ، نحصل $2=(-1)^2+C \Leftarrow C=1$ وتكون معادلة المنحني المطلوب هي $y=x^2+1$

مثال (2.2.2)

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=3x^2-2x+5$

الحل:

$\Leftarrow dy=(3x^2-2x+5)dx \Leftarrow \int dy=\int(3x^2-2x+5)dx \Leftarrow y=x^3-x^2+5x+C$ ، حيث C ثابت اختياري.

مثال (3.2.2)

نقطة تتحرك بسرعة $v=3t^2$ ، حيث t تمثل الزمن ، فإذا رمزنا للازاحة بالحرف s ، فجد الإزاحة بدلالة الزمن ، علما بان $s=0$ عندما $t=0$

الحل:

$v=\frac{ds}{dt}=3t^2 \Leftarrow ds=3t^2dt \Leftarrow \int ds=\int 3t^2dt \Leftarrow s=t^3+C$ ، حيث C ثابت اختياري.

وباستعمال الشرط الابتدائي وهو $s=0$ عندما $t=0$ ، نحصل على $C=0$ وبذلك تكون $s=t^3$

3.2 التكامل المحدد Definite integral

هنالك نوع آخر من التكامل يعرف بالتكامل المحدد (Definite integral) وهو عملية جمع مساحات أشكال هندسية أولية منفصلة عن بعضها وثم المرور إلى الغاية بطريقة أو أخرى . وسوف نتطرق إلى هذا النوع من التكامل بالتفصيل.

تعريف (1.3.2)

لتكن $J=[a,b]$ ، أي أن J فترة مغلقة مقيدة من الأعداد الحقيقية . التجزئة (Partition) P للفترة J هي المجموعة المنتهية من النقاط $x_0,x_1,\cdots,x_n$ حيث

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

أي أن

$$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$$

أو تكتب أحيانا بالشكل $P=\{[x_0,x_1],[x_1\ x_2],\cdots[x_{n-1},x_n]\}$ ، وتسمى النقاط $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ نقاط التقسيم للتجزئة P .

وسترمز لطول الفترة الجزئية $J_i=[x_{i-1},x_i]$ بالرمز Δx_i وعليه $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. وبسهولة يمكن إثبات $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$ ، وكذلك ترمز لمعيار التجزئة P بالرمز $\|P\|$ ويعرف بالشكل $\|P\|=\max\{\Delta x_i : i=1,2\cdots,n\}$

تعريف (2.3.2)

لتكن كل من $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}, P_2 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b\}$ تجزئة للفترة $J = [a,b]$. يقال عن P_1 بانها تنعيم أو منعمة (Refinement) للتجزئة P_2 اذا كانت $P_2 \subseteq P_1$.
يسهولة يمكن اثبات $\|P_1\| \le \|P_2\|$

مثل (3.3.2)

لتكن $J = [-3,5]$ وليكن $P_1 = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$ ، $P_2 = \{-3, -2, 1, 5\}$ و $P_3 = \{-3, 5\}$
نلاحظ ان $P_3 \subset P_2 \subset P_1$ وان

$$\|P_1\| = \max\{\Delta x_i : i = 1,2,3,4\} = \max\{-1+3, 1+1, 3-1, 5-3\} = \max\{2, 2, 2, 2\} = 2$$
$$\|P_2\| = \max\{\Delta x_i : i = 1,2,3\} = \max\{-2+3, 1+2, 5-1\} = \max\{1, 3, 4\} = 4$$
$$\|P_3\| = \max\{\Delta x_i : i = 1\} = \max\{5+3\} = \max\{8\} = 8$$

وعليه $\|P_1\| < \|P_2\| < \|P_3\|$. وهذا يعني ان لكل فترة اكثر من تجزئة.

ملاحظة

اذا كان n عدد صحيح موجب ، يمكن تجزئة الفترة $J = [a,b]$ الى n من الفترات الجزئية متساوية الطول.
نفرض ان $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ لكل $i = 1,2,\cdots,n$
ولكن $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_i = x_{i-1} + \frac{b-a}{n}$$
$$x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n} = a + \frac{b-a}{n}$$
$$x_2 = x_0 + x_1 + \frac{b-a}{n} = a + \frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} = a + 2\frac{b-a}{n}$$
$$x_3 = x_0 + x_1 + x_2 + \frac{b-a}{n} = a + 2\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} = a + 3\frac{b-a}{n}$$

وهكذا

$$x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1} + \frac{b-a}{n} = a + (k-1)\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} = a + k\,\frac{b-a}{n}$$

لكل $k = 1,2,\cdots,n$ وتسمى هذه التجزئة بالتجزئة المنتظمة.

تعـريف (4.3.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة، ولتكن $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ تجزئة للفترة J . عرف

$$S_P = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

وليكن $S = \{S_P : [a,b]$ تجزئة للفترة $P\}$. برهن كوشي(Cauchy) إن للمجموعة S غاية عندما $\|P\| \to 0$ وأطلق كوشي على هذه الغاية بالتكامل المحدد للدالة f ورمز لها بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} S$$

وقد عرف كوشي التكامل غير المحدد للدالة المستمرة f بأنه الحل العام للمعادلة لتفاضلية $\frac{dy}{dx} = f(x)$ وعليه فالتكامل غير المحدد هو مجموعة الدوال من النوع $F(x)+c$ حيث F حل للمعادلة التفاضلية و c ثابت اختياري وان العلاقة التي تربط بين التكامل المحدد للدالة f والدالة F هـــي

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

كما أن كوشي أعطى تفسيرا هندسيا للتكامل المحدد بكونه يمثل المساحة المحصورة بين المنحني $y = f(x)$ ، الأحداثي السيني والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$. وقد استطاع كوشي من تعميم أفكاره هذه لتعريف تكامل الدوال المقيدة التي مجموعة نقاط عدم الاستمرارية لها مجموعة منتهية .

4.2 تكامل ريمان The Riemann Integral

تعريف (1.4.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ تجزئة للفترة $J = [a,b]$

نضـــع

$$M = \sup\{f(x) : x \in J\} \qquad m = \inf\{f(x) : x \in J\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\} \qquad m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

بما إن الدالة f مقيدة نحصل على $m \le m_i \le M_i \le M$ لكل قيم $i = 1,2,\cdots,n$

الآن نعـرف

$$\overline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i , \quad \underline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

يطلق على العددين $\underline{R}(f,P), \overline{R}(f,P)$ على التوالي اسم مجموع ريمان الأعلى ومجموع ريمان الأسفل للدالة f بالنسبة للتجزئة P .

بسهولة يمكن إثبات

$$\overline{R}(-f,P) = -\underline{R}(f,P), \quad \underline{R}(-f,P) = -\overline{R}(f,P)$$

مثال (2.4.2)

جد مجموع ريمان الأعلى والأسفل للدالة $f : [-\frac{3}{2}, 2] \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ بالنسبة للتجزئة

$$P = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\}$$

الحل:

$$x_0 = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = 2, \quad n = 3$$

$J_1 = [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}], \quad J_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], \quad J_3 = [\frac{3}{2}, 2] \ , \ \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 2, \quad \Delta_3 = \frac{1}{2}$

$m_1 = f(-\frac{3}{2}) = -\frac{17}{8}, \quad m_2 = f(1) = 1, \quad m_3 = f(\frac{3}{2}) = \frac{13}{8}$

$M_1 = f(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}, \quad M_2 = f(-\frac{1}{3}) = \frac{59}{57}, \quad M_3 = f(2) = 4$

$\underline{R}(f, p) = \frac{11}{16}, \quad , \quad \overline{R}(f, p) = \frac{2369}{456}$

مبرهنة(3.4.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن P تجزئة للفترة $[a,b]$ فان كل من $\underline{R}(f, p), \quad \overline{R}(f, p)$ دالة مقيدة وان $\underline{R}(f, p) \le \overline{R}(f, p)$

البرهان :

بما أن الدالة f مقيدة $\Leftarrow$ $m \le m_i \le M_i \le M$ لكل قيم $i = 1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow \quad m\Delta_i \le m_i\Delta_i \le M_i\Delta_i \le M\Delta_i$ لكل قيم $i = 1,2,\cdots,n$

$$\Leftarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m\Delta_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta_i \quad \Leftarrow \quad m\sum_{i=1}^{n}\Delta_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i \le M\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$$

$$\Leftarrow \quad m(b-a) \le \underline{R}(f, P) \le \overline{R}(f, P) \le M(b-a)$$

مبرهنة (4.4.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن كل من P ، Q تجزئة للفترة $[a,b]$. إذا كانت التجزئة Q تنعيم إلى التجزئة P (أي أن $P \subseteq Q$) فـــــان

$\overline{R}(f,Q) \le \overline{R}(f,P), \qquad \underline{R}(f,Q) \ge \underline{R}(f,P)$

وعليه $\underline{R}(f,P) \le \underline{R}(f,Q) \le \overline{R}(f,Q) \le \overline{R}(f,P)$

البرهان :

لتكن $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ ، $Q = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_m = b\}$ ، لتكن $J_1, J_2, \cdots, J_n$ تمثل الفترات الجزئية للتجزئة P بحيث $|J_i| = \Delta_i = x_i - x_{i-1}$ ،ليكن $K_1, K_2, \cdots, K_m$ تمثل الفترات الجزئية للتجزئة Q بحيث $|K_i| = \Delta'_i = y_i - y_{i-1}$.

لكل $i = 1,2,\cdots,n$ ، لتكن $K_{i_1}, K_{i_2}, \cdots, K_{i_{n_i}}$ تمثل الفترات الجزئية من Q المحتواة في الفترة الجزئية J_i

$$\begin{aligned}
\overline{R}(f,Q) &= \sum_{i=1}^{m} \sup\{f(x) : x \in K_i\}|K_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i} \sup\{f(x) : x \in K_{i_k}\}|K_{i_k}| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) : x \in J_i\}|J_i| = \overline{R}(f,P)
\end{aligned}$$

وبالمثل نبرهن $\underline{R}(f,Q) \ge \underline{R}(f,P)$.

نتيجة(5.4.2)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن كل من P ، Q تجزئة للفترة $[a,b]$ فـــان $\underline{R}(f,P)\le\overline{R}(f,Q)$

البرهان :

لتكن $\mathrm{H}=P\cup Q$ $\Leftarrow$ H تجزئة للفترة $[a,b]$ وان $P\subseteq \mathrm{H}$ وكذلك $Q\subseteq \mathrm{H}$ وعليه

$$\underline{R}(f,P)\le\underline{R}(f,\mathrm{H})\le\overline{R}(f,\mathrm{H})\le\overline{R}(f,Q)$$

الآن نستطيع أن نعرف التكامل الأعلى والتكامل الأسفل للدالة المقيدة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ وكالاتي :

تعريف(6.4.2)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة . نعـــــرف

$$\underline{R}(f)=\{\underline{R}(f,P):[a,b] \text{ تجزئة للفترة } P\} \quad \text{و} \quad \overline{R}(f)=\{\overline{R}(f,P):[a,b] \text{ تجزئة للفترة } P\}$$

إذا كانت $P_0=\{a,b\}$ فــــــان

$$\overline{R}(f,P_0)=M(b-a)\quad,\quad \underline{R}(f,P_0)=m(b-a)$$

وعليـه

(1) $\overline{R}(f)\neq$ ¤ لان $M(b-a)\in\overline{R}(f)$

(2) $\underline{R}(f)\neq$ ¤ لان $m(b-a)\in\underline{R}(f)$

(3) $\overline{R}(f)$ مقيدة من الأسفل بالعدد $m(b-a)$ وكذلك كل عنصر من $\underline{R}(f)$ هو قيد أسفل إلى $\overline{R}(f)$.

(4) $\underline{R}(f)$ مقيدة من الأعلى بالعد $M(b-a)$ وكذلك كل عنصر من $\overline{R}(f)$ هو قيد أعلى إلى $\underline{R}(f)$.

ولهذا نستطيع أن نعرف تكامل ريمان الأعلى والأسفل للدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ على النحو الآتي:

$$\overline{R}\int f=\inf\{\overline{R}(f)\}\quad,\quad \underline{R}\int f=\sup\{\underline{R}(f)\}$$

حـيـث

$\overline{R}\int f$ يقرا بتكامل ريمان الأعلى للدالة f على الفترة $[a,b]$ ،

$\underline{R}\int f$ يقرا بتكامل ريمان الأسفل للدالة f على الفترة $[a,b]$.

ملاحظة

لتكن كل من A,B مجموعة جزئية غير خالية من الأعداد الحقيقية . إذا كان $a<b$ لكل $a\in A$ ولكل $b\in B$ فان $\sup A\le\inf B$

مبرهنـة(7.4.2)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة فان $\underline{R}\int f\le\overline{R}\int f$.

البرهان:

بما أن كل عنصر من عناصر $\underline{R}(f)$ اقل أو يساوي كل عنصر من عناصر $\overline{R}(f)$ وعليه باستخدام الملاحظة أعلاه ، نحصل على $\sup\{\underline{R}(f)\}\le\inf\{\overline{R}(f)\}$ وهذا يعني أن $\underline{R}\int f\le\overline{R}\int f$.

الآن نأتي إلى تعريف تكامل ريمـــان

تعريف(8.4.2)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة . يقال عن الدالة f بأنها قابلة للتكامل (Integrable) الريماني على الفترة $[a,b]$ إذا كان $\underline{R}\int f=\overline{R}\int f$.

وفي هذه الحالة تكتب القيمة المشتركة بين التكامليين الأعلى والأسفل بالرمز $R\int f$ وتسمى تكامل الدالة f على الفترة $[a,b]$. كما سنكتب أحيانا $\int_a^b f$ أو $\int_a^b f(x)dx$ ، يطلق على الدالة f بالدالة المكاملة (Integrand) وعلى a الحد الأدنى وعلى b الحد الأعلى للتكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$.

مثال(9.4.2)

لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=c$ لكل $x\in[a,b]$ (أي أن f دالة ثابتة) فان f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ وان $\int_a^b f(x)dx=c(b-a)$

البرهان:

لتكن P أي تجزئة للفترة $[a,b]$

$$\overline{R}(f,P)=c(b-a),\quad \underline{R}(f,P)=c(b-a)$$
$$\overline{R}(f)=\{c(b-a)\},\quad \underline{R}(f)=\{c(b-a)\}$$
$$\overline{R}\int f=\inf\{\overline{R}(f)\}=c(b-a)\quad,\quad \underline{R}\int f=\sup\{\underline{R}(f)\}=c(b-a)$$

وعليه ، فان f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ وان $\int_a^b f(x)dx=c(b-a)$

ملاحظــة

بعض الصيغ المفيدة مكتوبة برمز الجمع هي :

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\quad (1)$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\quad (2)$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+\cdots+n^3=(\frac{1}{2}n(n+1))^2\quad (3)$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^4=1^4+2^4+\cdots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)\quad (4)$$

مثال(10.4.2)

لتكن الدالة $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=3x$ لكل $x\in[0,2]$. برهن على أن $\int_0^2 f(x)dx=6$

الحل:

من الواضح أن الدالة f مقيدة

لكل عدد صحيح موجب n لتكن P_n تجزئة للفترة $[0,2]$ مكونة من n من الفترات الجزئية المتساوية الطول.

$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{2}{n}$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} = 0 + i\frac{2-0}{n} = \frac{2i}{n}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\} = f(x_i) = f(\frac{2i}{n}) = \frac{6i}{n}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\} = f(x_{i-1}) = f(\frac{2(i-1)}{n}) = \frac{6(i-1)}{n}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\overline{R}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{12}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = 6 + \frac{6}{n}$$

$$\underline{R}(f,P_n)\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \sum_{i=1}^{n}\frac{6(i-1)}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{12}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1) = \frac{12}{n^2}(\frac{1}{2}n(n-1) - n) = 6 - \frac{6}{n}$$

$$\overline{R}\int f = \inf\{\overline{R}(f)\} \le 6 + \frac{6}{n} \quad , \quad \underline{R}\int f = \sup\{\underline{R}(f)\} \ge 6 - \frac{6}{n}$$

لو كان $\underline{R}\int f \ne \overline{R}\int f$ فان $d = \overline{R}\int f - \underline{R}\int f \le 6 + \frac{6}{n} - 6 + \frac{6}{n} = \frac{12}{n}$ لكل n

بما أن $\underline{R}\int f \le \overline{R}\int f \quad \Leftarrow \quad d > 0$ وهذا يناقض خاصية ارخميدس وعليه $\underline{R}\int f = \overline{R}\int f$

$$\int_0^2 f(x)dx = \overline{R}\int f = \inf\{\overline{R}(f)\} \le \inf\{6 + \frac{6}{n} : n \in N\} = 6$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \underline{R}\int f = \sup\{\underline{R}(f)\} \ge \sup\{6 - \frac{6}{n} : n \in N\} = 6$$

ينتج من هذا أن $\int_0^2 f(x)dx = \underline{R}\int f = \overline{R}\int f = 6$

ملاحظـــة

ليس من الضروري أن تكون كل دالة مقيدة على الفترة $[a,b]$ أنها قابلة للتكامل ريمانيــا على تلك الفترة والمثال التالي يوضح ذلك

مثل(11.4.2)

لتكن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \in [a,b] \cap Q \\ 2, & x \in [a,b] \cap Q^c \end{cases}$$

لاحظ أن الدالة f مقيدة

لتكن $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ تجزئة ما للفترة $[a,b]$

كل فترة جزئية $J_i = [x_i, x_{i-1}]$ تحتوي على أعداد نسبية وغير نسبية بسب كثافة الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية لهذا فان

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\} = 2, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\} = -3, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\overline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = 2(b-a), \quad \underline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = -3(b-a)$$

$$\overline{R}\int f = \inf\{\overline{R}(f)\} = 2(b-a) \quad , \quad \underline{R}\int f = \sup\{\underline{R}(f)\} = -3(b-a)$$

وهكذا فان $\underline{R}\int f \neq \overline{R}\int f$. وعليه الدالة f غير قابلة للتكامل ريمانيـا على الفترة $[a,b]$.

ملاحظة

سبق وان برهنا في المحاضرة الأولى من موضوع التحليل الرياضي(1) على أن : إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وكانت $a,b \in \mathbb{R}$ فان

(1) إذا كان $\inf A = a$ ، فانه لكل $\pounds > 0$ ، يوجد $y \in A$ بحيث أن $y < a + \pounds$

(2) إذا كان $\sup A = b$ ، فانه لكل $\pounds > 0$ ، يوجد $y \in A$ بحيث أن $y > b - \pounds$

المبرهنة التالية تبين الشرط الضروري والكافي لكي تكون الدالة المقيدة قابلة للتكامل الريماني .

مبرهنـــة (12.4.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة فان f تكون قابلة للتكامل ريمانيـا على الفترة $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان لكل $\pounds > 0$ توجد تجزئة P للفترة $[a,b]$ بحيث أن $\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) < \pounds$

البرهان :

نفرض الدالة f قابلة للتكامل ريمانيـا على الفترة $[a,b]$ ، أي أن $\underline{R}\int f = \overline{R}\int f$

ليكن $\pounds > 0$

بما أن $\underline{R}\int f = \sup\{\underline{R}(f)\} \quad , \quad \overline{R}\int f = \inf\{\overline{R}(f)\}$

باستخدام تعريف inf توجد تجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ بحيث أن $\overline{R}(f,P_1) - \overline{R}\int f < \dfrac{\pounds}{2}$

وكذلك باستخدام تعريف sup توجد تجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ بحيث أن $\underline{R}\int f - \underline{R}(f,P_2) < \dfrac{\pounds}{2}$

نضع $P = P_1 \cup P_2$ يجب أن نبرهن على أن : $\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) < \pounds$

بما أن P تنعيم إلى كل من P_1 ، P_2 فان $\underline{R}(f,P) \ge \underline{R}(f,P_2) \qquad \overline{R}(f,P) \le \overline{R}(f,P_1),$

$$\overline{R}(f,P) - \overline{R}\int f \le \overline{R}(f,P_1) - \overline{R}\int f < \frac{\pounds}{2}, \qquad \underline{R}\int f - \underline{R}(f,P) \le \underline{R}\int f - \underline{R}(f,P_2) < \frac{\pounds}{2}$$

بما أن $\underline{R}\int f = \overline{R}\int f \Leftarrow R\int f - \underline{R}(f,P) < \dfrac{\pounds}{2}, \qquad \overline{R}(f,P) - R\int f < \dfrac{\pounds}{2},$ وعليه

$$\overline{R}(f,P) - R\int f + R\int f - \underline{R}(f,P) < \frac{\pounds}{2} + \frac{\pounds}{2} = \pounds$$

$$\Leftarrow \quad \overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) < \pounds$$

الاتجاه الأخر: نفرض لكل $\pounds > 0$ توجد تجزئة P للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) < \pounds$$

بما أن كل تجزئة P للفترة $[a,b]$ نحصل على $\underline{R}\int f \ge \underline{R}(f,P) \quad , \quad \overline{R}\int f \le \overline{R}(f,P)$ وعليه

$$\overline{R}\int f - \underline{R}\int f \le \overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) < \pounds$$

بما أن $\underline{R}\int f \le \overline{R}\int f \Leftarrow 0 \le \overline{R}\int f - \underline{R}\int f \Leftarrow 0 \le \overline{R}\int f - \underline{R}\int f < \pounds$ لكل $\pounds > 0$ وعليه $\underline{R}\int f = \overline{R}\int f$

مبرهنــة(13.4.2)

كل دالة رتيبة معرفة على فترة مغلقة تكون قابلة للتكامل ريمانيا على تلك الفترة

البرهان:

لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ رتيبة

$\Leftarrow$ الدالة f مقيدة (لان كل دالة رتيبة معرفة على فترة مغلقة تكون مقيدة).

سنبرهن في حالة الدالة f غير متناقصة : ليكن $£>0$

لكل عدد صحيح موجب n لتكن P تجزئة للفترة $[a,b]$ مكونة من n من الفترات الجزئية المتساوية الطول.

$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$$x_i=a+i\frac{b-a}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$M_i=\sup\{f(x):x\in J_i\}=f(x_i),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$m_i=\inf\{f(x):x\in J_i\}=f(x_{i-1}),\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\overline{R}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

$$\underline{R}(f,P)\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})$$

$$\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\frac{b-a}{n}(f(x_n)-f(x_0))=\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$$

ولكن حسب خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $(f(b)-f(a))\dfrac{b-a}{k}<£$

وهكذا فان $\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)<£$ وعليه تكون الدالة f قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$. وبالمثل نبرهن في حالة الدالة f غير متزايدة.

ملاحظة

ليس بالضرورة أن تكون كل دالة قابلة للتكامل ريمانيا تكون رتيبة في نفس الفترة.

مبرهنــة(14.4.2)

كل دالة مستمرة معرفة على فترة مغلقة تكون قابلة للتكامل ريمانيا على تلك الفترة.

البرهان:

لتكن الدالة بحيث أن مستمرة $\Leftarrow$ الدالة f مقيدة : ليكن $£>0$

بما أن الدالة f مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فان

(1) الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في تلك الفترة ، ولتكن

$$M=\max\{f(x):x\in[a,b]\},\qquad m=\min\{f(x):x\in[a,b]\}$$

(2) الدالة f مستمرة بانتظام على الفترة المغلقة $[a,b]$

بما أن $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0 \Leftarrow$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن لكل $x, y \in [a,b]$

$|x-y| < \delta$ يؤدي إلى $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

حسب خاصية ارخميدس يوجد عدد صحيح موجب n بحيث أن $n\delta > b-a$

لتكن P تجزئة للفترة $[a,b]$ مكونة من n من الفترات الجزئية المتساوية الطول.

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} < \delta, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

بما ان الدالة f مستمرة على كل من الفترات المغلقة $J_i = [x_i, x_{i-1}] \Leftarrow \xi_i, \eta_i \in J_i$ بحيث ان

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\} = f(\xi_i), \qquad m_i = \min\{f(x) : x \in J_i\} = f(\eta_i)$$

$|\xi_i - \eta_i| < \delta$ يؤدي إلى $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(\eta_i)) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

وهكذا فان $\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) < \varepsilon$ وعليه تكون الدالة f قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$

ملاحظــة

ليس بالضرورة أن تكون كل دالة قابلة للتكامل ريمانيا تكون مستمرة في نفس الفترة والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال(15.4.2)

لتكن الدالة $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -5 < x \le 0 \\ 7, & 0 < x \le 5 \end{cases}$$

لاحظ أن الدالة f مقيدة وغير مستمرة عند النقطة $x = 0$. والآن سنبرهن الدالة f قابلة للتكامل

لكل عدد صحيح موجب n ليكن $\mathrm{I}_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \quad A_n = [-5, -\frac{1}{n}], \quad B_n = [\frac{1}{n}, 5]$

ولتكن $P_n' = \{-5 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = -\frac{1}{n}\}$ تجزئة إلى A_n ولتكن $P_n'' = \{\frac{1}{n} = y_0 < y_1 < \cdots < x_k = 5\}$ تجزئة إلى B_n

نضع $P_n = P_n' \cup \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\} \cup P_n''$ فان تجزئة إلى I_n

$$\overline{R}(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = 3(5 - \frac{1}{n}) + 7(\frac{2}{n}) + 7(5 - \frac{1}{n}) = 50 + \frac{4}{n}$$

$$\underline{R}(f,P_n) \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = 3(5 - \frac{1}{n}) + 3(\frac{2}{n}) + 7(5 - \frac{1}{n}) = 50 - \frac{4}{n}$$

$$\overline{R}\int f = \inf\{\overline{R}(f)\} \le 50 + \frac{4}{n} \quad , \quad \underline{R}\int f = \sup\{\underline{R}(f)\} \ge 50 - \frac{4}{n}$$

لو كان $\underline{R}\int f \ne \overline{R}\int f$ فان $d = \overline{R}\int f - \underline{R}\int f \le 50 + \frac{4}{n} - 50 + \frac{4}{n} = \frac{8}{n}$ لكل n

بما أن $\underline{R}\int f \le \overline{R}\int f \Leftarrow d > 0$ وهذا يناقض خاصية ارخميدس وعليه $\underline{R}\int f = \overline{R}\int f$

$$\int_0^2 f(x)dx = \overline{R}\int f = \inf\{\overline{R}(f)\} \le \inf\{50+\frac{4}{n} : n\in N\} = 50$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \underline{R}\int f = \sup\{\underline{R}(f)\} \ge \sup\{50-\frac{4}{n} : n\in N\} = 50$$

ينتج من هذا أن $\underline{R}\int f = \overline{R}\int f = 50$ وهكذا فان الدالة f قابلة للتكامل ريمانيــا على الفترة $[-5,5]$.

5.2 مبرهنة لبيك في التكامل الريماني Lebesgue Theorem In Riemann Integral

تعريف(1.5.2)

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. يقال عن A بأنها مهملة (Negligible) إذا أمكن تغطية A بعائلة قابلة للعد من الفترات المفتوحة التي يقل مجموع أطوالها عن أي عدد حقيقي موجب . بعبارة أخرى إذا كان $£ > 0$ ، توجد عائلة قابلة للعد $\{I_n\}$ من الفترات المفتوحة بحيث أن

$$A \subseteq \bigcup_n I_n \ (1) \qquad \sum_n |I_n| < £ \ (2)$$

مبرهنــة(2.5.2)

(1) كل مجموعة قابلة للعد من الأعداد الحقيقية تكون مهملة .

(2) كل مجموعة جزئية من مجموعة مهملة تكون مهملة .

(3) اتحاد أي عائلة قابلة للعد من المجموعات المهملة تكون مجموعة مهملة .

البرهان:

(1) لتكن A مجموعة قابلة للعد من الأعداد الحقيقية

(ا) إذا كانت المجموعة A منتهية (يمكن أن تكون خالية) ، $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$

ليكن $£ > 0$. لكل $1\le n\le m$ نأخذ $I_n = (x_n - \frac{£}{4m}, x_n + \frac{£}{4m}) \Leftarrow |I_n| = \frac{£}{2m}$

من الواضح أن I_n فترة مفتوحة تحتوي على x_n. وعليه $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} I_n$

$$\sum_{n=1}^{m} |I_n| = \sum_{n=1}^{m} \frac{£}{2m} = \frac{£}{2m} m = \frac{£}{2} < £$$

(ب) إذا كانت المجموعة A غير منتهية، $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$

ليكن $£ > 0$. لكل n نأخذ $I_n = (x_n - \frac{£}{2^n}, x_n + \frac{£}{2^n}) \Leftarrow |I_n| = \frac{£}{2^{n-1}}$

من الواضح أن I_n فترة مفتوحة تحتوي على x_n. وعليه $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{£}{2^{n-1}} = £\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{£}{2} < £$$

(2) لتكن A مجموعة مهملة ولتكن $B \subseteq A$

ليكن $\pounds > 0$ ، توجد عائلة قابلة للعد $\{\mathrm{I}_n\}$ من الفترات المفتوحة بحيث أن $A \subseteq \bigcup_n \mathrm{I}_n$ و $\sum_n |\mathrm{I}_n| < \pounds$

بما أن $B \subseteq A$ $\Leftarrow$ $B \subseteq \bigcup_n \mathrm{I}_n$ و $\sum_n |\mathrm{I}_n| < \pounds$ وعليه B مجموعة مهملة

(3) لتكن $\{A_n\}$ عائلة قابلة للعد من المجموعات المهملة

إذا كانت العائلة $\{A_n\}$ غير منتهية ، أي إذا كانت $A_1, A_2, \cdots$ مجموعات مهملة : ليكن $\pounds > 0$

لكل k توجد عائلة قابلة للعد $\{\mathrm{I}_n^k\}$ من الفترات المفتوحة بحيث أن $A_k \subseteq \bigcup_n \mathrm{I}_n^k$ و $\sum_n |\mathrm{I}_n^k| < \dfrac{\pounds}{2^k}$

من الواضح أن $\bigcup_k A_k \subseteq \bigcup_k \bigcup_n \mathrm{I}_n^k$ و $\sum_k \sum_n |\mathrm{I}_n^k| < \sum_k \dfrac{\pounds}{2^k} = \pounds$

وبالمثل نبرهن في حالة العائلة $\{A_n\}$ منتهية ، أي إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_m$ مجموعات مهملة.

ملاحظة

توجد مجموعات مهملة وغير معدودة ، مثل مجموعة كانتور

نتيجة(3.5.2)

(1) كل فترة في $\mathbb{R}$ تكون مجموعة غير مهملة

لتكن I فترة ما في $\mathbb{R}$: لو فرضنا I مجموعة مهملة وكان $\pounds = \frac{1}{2}|\mathrm{I}|$ فمن الواضح انه لايمكن تغطية I بعائلة قابلة للعد من الفترات المفتوحة التي يقل مجموع أطوالها عن $\pounds$.

(2) كل مجموعة جزئية في $\mathbb{R}$ تحتوي على فترة كمجموعة جزئية تكون غير مهملة

(3) مجموعة الأعداد النسبية في $\mathbb{R}$ تكون مهملة لأنها معدودة

(4) مجموعة الأعداد الحقيقية تكون غير مهملة

(5) مجموعة الأعداد غير النسبية في $\mathbb{R}$ مجموعة غير مهملة لأنها لو كانت مهملة لكان اتحادها مع مجموعة الأعداد النسبية مجموعة مهملة ولكن هذا الاتحاد هو مجموعة الأعداد الحقيقية وهذه المجموعة غير مهملة

تعريف(4.5.2)

لتكن J فترة ما ولتكن $f : J \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة . لكل فترة مفتوحة I في J . نضع

$$U(f,\mathrm{I}) = \sup\{f(x) : x \in \mathrm{I}\}, \qquad L(f,\mathrm{I}) = \inf\{f(x) : x \in \mathrm{I}\}$$

والآن نضع

$$W(f,\mathrm{I}) = U(f,\mathrm{I}) - L(f,\mathrm{I})$$

من الواضح أن $W(f,\mathrm{I}) > 0$. تذبذب الدالة (Saltus of a function) f عند النقطة $x \in J$ يرمز له بالرمز $S(f,x)$ ويعرف كالآتي:

$$S(f,x) = \inf\{W(f,\mathrm{I}) : x \in \mathrm{I}\}$$

مبرهنة(5.5.2)

الدالة $f : J \to \mathbb{R}$ تكون مستمرة عند النقطة x إذا وفقط إذا كان $S(f,x) = 0$

البرهان :

نفرض $S(f,x) = 0$: ليكن $\pounds > 0$ ،حسب تعريف inf ،توجد فترة مفتوحة I بحيث إن $x \in \mathrm{I}$ وان $W(f,\mathrm{I}) < \pounds$ وعليه. لكل $y \in \mathrm{I}$ فان $|f(y) - f(x)| < \pounds$ ، وهذا يبين الدالة f مستمرة عند النقطة x.

والاتجاه الأخر : نفرض أن الدالة f مستمرة عند النقطة x. وليكن $\pounds > 0$، توجد فترة مفتوحة I بحيث إن $x \in \mathrm{I}$ ولكل $y \in \mathrm{I}$ فان $|f(y) - f(x)| < \frac{\pounds}{2}$ ومن هذا نحصل على $W(f, \mathrm{I}) < \pounds$ وبذلك نستنتج أن $S(f, x) = 0$.

مبرهنة(6.5.2)

لتكن $f : J \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة. لكل $a > 0$ فان المجموعة $D_a = \{x \in J : S(f, x) \geq a\}$ تكون مغلقة

البرهان:

ليكن $x \in D_a^c \Leftarrow x \notin D_a \Leftarrow S(f, x) < a$ فانه ، توجد فترة مفتوحة I بحيث إن $x \in \mathrm{I}$ و $W(f, \mathrm{I}) < a$ وعليه لكل $y \in \mathrm{I}$ فان $S(f, y) < a$ فان D_a^c مجموعة مفتوحة وعليه D_a مجموعة مغلقة.

نتيجة(7.5.2)

لتكن $f : J \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن D مجموعة النقاط التي تكون فيها الدالة f غير مستمرة فان $D = \bigcup_{n \in N} D_{\frac{1}{n}}$.

وعليه فان D هي اتحاد عائلة قابلة للعد من المجموعات المغلقة.

مبرهنـــة(8.6.2) مبرهنة ليبيك في التكامل الريماني

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن D مجموعة النقاط التي تكون فيها الدالة f غير مستمرة فان الدالة f تكون قابلة للتكامل الريماني إذا وفقط إذا كانت D مجموعة مهملة .

البرهان:

نفرض المجموعة D مهملة : ليكن $\pounds > 0$، $\Leftarrow$ $D_\pounds$ مجموعة مغلقة

بما أن $D_\pounds \subseteq J$ و J مجموعة مقيدة ، فان $D_\pounds$ مجموعة مقيدة وعليه $D_\pounds$ مجموعة مرصوصة (حسب خاصية هاين-بوريل)

بما أن $D_\pounds \subseteq D$ و D مجموعة مهملة فان $D_\pounds$ مجموعة مهملة ، وعليه توجد عائلة قابلة للعد من الفترات المفتوحة التي تغطي $D_\pounds$ والتي يقل مجموع أطوالها عن $\frac{\pounds}{2M}$ حيث $M = \sup\{|f(x)| : x \in J\}$

بما أن $D_\pounds$ مجموعة مرصوصة، يمكن أن نفترض أن هذه العائلة من الفترات المفتوحة التي تغطي $D_\pounds$ هي عائلة منتهية . من الواضح إننا نستطيع أن نفرض أن هذه الفترات منفصلة عن بعضها . لتكن هذه الفترات

$\mathrm{I}'_j = (a_j, b_j), \quad j = 1,2,\cdots,n$

وان $\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{I}'_j| < \frac{\pounds}{2M}$. ضع الآن $\mathrm{I} = [a_j, b_j], \quad j = 1,2,\cdots,n$ و $S = J \,|\, (\bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{I}'_j) \Leftarrow$ هي اتحاد عائلة منتهية من الفترات المغلقة . لتكن هذه الفترات $\mathrm{I}_{n+1}, \mathrm{I}_{n+2}, \cdots, \mathrm{I}_m$

لنفرض أن P هي تجزئة الفترة J التي فتراتها الجزئية هي الفترات $\{\mathrm{I}_j : j = 1,2,\cdots,m\}$

لاحظ انه

إذا كانت $n < j \leq m$ فان $W(f, \mathrm{I}_j) < \pounds$ وإذا كانت $1 \leq j \leq m$ فان $W(f, \mathrm{I}_j) < 2M$

الآن :

$$\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)=\sum_{j=1}^{m}(M_j-m_j)\left|\mathrm{I}_j\right|=\sum_{j=1}^{m}(\sup\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\}-(\inf\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\})\left|\mathrm{I}_j\right|$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\sup\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\}-(\inf\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\})\left|\mathrm{I}_j\right|+\sum_{j=n+1}^{m}(\sup\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\}-(\inf\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\})\left|\mathrm{I}_j\right|$$

$$\le 2M\cdot\frac{£}{2M}+£\left|J\right|=£(1+\left|J\right|)$$

$\Leftarrow$ الدالة f قابلة للتكامل الريماني

الاتجاه الأخر : نفرض أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض أن D مجموعة غير مهملة

بما أن $D=\bigcup_{n\in N} D_{\frac{1}{n}}$ فانه يوجد $n\in N$ بحيث أن $D_{\frac{1}{n}}$ مجموعة غير مهملة

(لأنه لو كانت لكل $n\in N$ فان $D_{\frac{1}{n}}$ مجموعة مهملة لكانت D مجموعة مهملة)

وعليه يوجد $£>0$ بحيث أن كل عائلة مجموعة قابلة للعد (وبصورة خاصة العائلة المنتهية) من الفترات المفتوحة التي تغطي المجموعة $D_{\frac{1}{n}}$ يزيد مجموع أطوالها عن $£$.

لتكن الآن P هي تجزئة الفترة J التي فتراتها الجزئية هي الفترات $\{\mathrm{I}_j : j=1,2,\cdots,m\}$

من الواضح أن هذه الفترات تغطي المجموعة $D_{\frac{1}{n}}$. لنفرض أن (بعد تغيير الترقيم إذا أقصى الأمر)

$$1\le j<k,\quad k<m \qquad \mathrm{I}_j\cap D_{\frac{1}{n}}\ne ¤ \qquad و \qquad k<j\le m \qquad \mathrm{I}_j\cap D_{\frac{1}{n}}=¤,$$

من الواضح أن

$$D_{\frac{1}{n}}\subseteq\bigcup_{j=1}^{k}\mathrm{I}_j \quad \text{ولهذا فان} \quad \sum_{i=1}^{k}\left|\mathrm{I}_j\right|\ge £$$

بالإضافة إلى هذا. فان تذبذب الدالة f في كل من الفترات I_j ، $1\le j\le k$ لأيقل عن $\frac{1}{n}$ وعليه فان

$$\sup\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\}-(\inf\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\}>\frac{1}{n} \qquad ,\ j=1,2,\cdots,k$$

$$\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)=\sum_{j=1}^{m}(M_j-m_j)\left|\mathrm{I}_j\right|\ge\sum_{j=1}^{m}(\sup\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\}-(\inf\{f(x):x\in \mathrm{I}_j\})\left|\mathrm{I}_j\right|\ge\frac{1}{n}\cdot £>0$$

وبما أن كلا من $n,£$ لا يعتمد على التجزئة P . وعليه الدالة f غير قابلة للتكامل الريماني وهذا تناقض.

$\Leftarrow$ المجموعة D مهملة.

نتيجة (9.5.2)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ رتيبة فان المجموعة D تكون مهملة .

البرهان:

بما أن الدالة f على الفترة المغلقة $[a,b]$

إذن الدالة f قابلة للتكامل الريماني و عليه المجموعة D مهملة.

نتيجة (10.5.2)

لتكن كل من I، J فترة جزئية مغلقة بحيث $\mathrm{I} \subseteq J$. إذا كانت الدالة المقيدة $f : J \to \mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني فان الدالة $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني .

البرهان:

لتكن $D(f,J)$ تمثل مجموعة نقاط عدم الاستمرارية للدالة المقيدة f المعرفة على الفترة J. ولتكن $D(f,\mathrm{I})$ تمثل مجموعة نقاط عدم الاستمرارية للدالة المقيدة f المعرفة على الفترة I. بما أن الدالة $f : J \to \mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني $\Leftarrow$ $D(f,J)$ مجموعة مهملة. بما أن $D(f,\mathrm{I}) \subseteq D(f,J)$ $\Leftarrow$ $D(f,\mathrm{I})$ مجموعة مهملة وعلية الدالة $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني .

6.2 خواص تكامل ريمان Properties of Riemann Integral

مبرهنـة (1.6.2)

لتكن $a < c < b$. إذا كانت الدالة المقيدة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني على كل من الفترتين $[a,c]$ و $[c,b]$، فان الدالة f تكون قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$. بالإضافة إلى هذا فان

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

البرهان:

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على كل من الفترتين $[a,c]$ و $[c,b]$ فان كل من $D(f,[a,c])$ ، $D(f,[c,b])$ مجموعة مهملة. وعليه فان $D(f,[a,b]) = D(f,[a,c]) \cup D(f,[c,b])$ مجموعة مهملة. ليكن $\pounds > 0$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على كل من الفترتين $[a,c]$ و $[c,b]$ $\Leftarrow$ توجد تجزئة P_1 للفترة $[a,c]$ وتجزئة P_2 للفترة $[c,b]$ بحيث أن

$$\overline{R}(f,P_1) - \underline{R}(f,P_1) < \frac{\pounds}{2} \qquad \overline{R}(f,P_2) - \underline{R}(f,P_2) < \frac{\pounds}{2}$$

نضع $P = P_1 \cup P_2$ $\Leftarrow$ P تجزئة للفترة $[a,b]$

$$\overline{R}(f,P_1) + \overline{R}(f,P_2) = \overline{R}(f,P) \qquad \underline{R}(f,P_1) + \underline{R}(f,P_2) = \underline{R}(f,P)$$

$$\overline{R}(f,P) - \underline{R}(f,P) = \overline{R}(f,P_1) + \overline{R}(f,P_2) - (\underline{R}(f,P_1) + \underline{R}(f,P_2))$$

$$= \overline{R}(f,P_1) - \underline{R}(f,P_1) + \overline{R}(f,P_2) - \underline{R}(f,P_2) < \frac{\pounds}{2} + \frac{\pounds}{2} = \pounds$$

$\Leftarrow$ الدالة f قابلة للتكامل على $[a,b]$

$$\underline{R}(f,P) \le \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \le \underline{R}(f,P_2) + \pounds \qquad \underline{R}(f,P) \le \int_a^b f(x)dx \le \underline{R}(f,P_2) + \pounds$$

لكل $\pounds > 0$ ومن هذا نستنتج أن $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

مبرهنة (2.6.2)

لتكن $a<c<b$. إذا كانت الدالة المقيدة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني ، فان الدالة f تكون قابلة للتكامل الريماني على كل من الفترتين $[a,c]$ و $[c,b]$. بالإضافة إلى هذا فان

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

البرهان:

ليكن $\varepsilon>0$ ، بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

$\Leftarrow$ توجد تجزئة $P=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)<\varepsilon$$

نستطيع أن نفرض $c\in P$ $\Leftarrow$ يوجد $x_j\in P$ بحيث أن $c=x_j$ لبعض $j=1,2,\cdots,n$ (ما عدى ذلك نتأمل تجزئة تنعيم إلى P بإضافة النقطة c) . فان $P_1=\{x_0,x_1,\cdots,x_j\}$ تجزئة للفترة $[a,c]$ و $P_1=\{x_j,x_{j+1},\cdots,x_n\}$ تجزئة للفترة $[c,b]$ وأكثر من ذلك

$$\overline{R}(f,P)=\overline{R}(f,P_1)+\overline{R}(f,P_2)\qquad \underline{R}(f,P)=\underline{R}(f,P_1)+\underline{R}(f,P_2)$$

وعليه

$$(\overline{R}(f,P_1)-\underline{R}(f,P_1))+(\overline{R}(f,P_2)-\underline{R}(f,P_2))=\overline{R}(f,P)-(\underline{R}(f,P)<\varepsilon$$

ولكن $\overline{R}(f,P_2)-\underline{R}(f,P_2)\ge 0$ $\quad$ $\overline{R}(f,P_1)-\underline{R}(f,P_1)\ge 0$ فان

$$\overline{R}(f,P_2)-\underline{R}(f,P_2)<\varepsilon\qquad \overline{R}(f,P_1)-\underline{R}(f,P_1)<\varepsilon$$

وعليه الدالة f تكون قابلة للتكامل الريماني على كل من الفترتين $[a,c]$ و $[c,b]$. وكذلك

$$\underline{R}(f,P_1)\le\int_a^c f(x)dx\le\overline{R}(f,P_1)\qquad \underline{R}(f,P_2)\le\int_c^b f(x)dx\le\overline{R}(f,P_2)$$

$$\Leftarrow\quad \underline{R}(f,P_1)+\underline{R}(f,P_2)\le\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\le\overline{R}(f,P_1)+\overline{R}(f,P_2)$$

$\Leftarrow$ $\underline{R}(f,P)\le\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\le\overline{R}(f,P)$ لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$ وعليه $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

ملاحظة

سبق وان عرفنا التكامل $\int_a^b f(x)dx$ فقط عندما $a<b$ ، نُضيفُ بالتعريف ذلك

$$\int_a^a f(x)dx=0\qquad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

مبرهنة (3.6.2)

لتكن الدالة المقيدة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني ، فان، لكل $\alpha\in\mathbb{R}$ ، الدالة αf تكون قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$ وان

$$\int_a^b \alpha\, f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

البرهان:

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ ، فان $D(f,[a,b])$ مجموعة مهملة

بما أن $D(\alpha f,[a,b]) \subseteq D(f,[a,b])$ لكل $\alpha \neq 0 \Leftarrow$ $D(\alpha f,[a,b])$ مجموعة مهملة وعليه الدالة αf تكون قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

بما أن f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b] \quad \Leftarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \overline{R}\int f = \underline{R}\int f$

بما أن $\overline{R}\int f = \inf\{\overline{R}(f)\} \;,\; \underline{R}\int f = \sup\{\underline{R}(f)\} \quad \Leftarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \inf\{\overline{R}(f)\} = \sup\{\underline{R}(f)\}$

ليكن $\varepsilon > 0$ ، توجد تجزئة P للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\overline{R}(f,P) < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon \qquad \int_a^b f(x)dx - \varepsilon < \underline{R}(f,P)$$

- إذا كانت $\alpha > 0$ ، فان لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$ نحصل على

$$\overline{R}(\alpha f,P) = \alpha \overline{R}(f,P) \qquad \underline{R}(\alpha f,P) = \alpha \underline{R}(f,P)$$

$$\alpha\int_a^b f(x)dx - \alpha\varepsilon = \alpha\left(\int_a^b f(x)dx - \varepsilon\right) \le \alpha \underline{R}(f,P) = \underline{R}(\alpha f,P) \le \underline{R}\int(\alpha f)$$

$$\overline{R}\int(\alpha f) \le \overline{R}(\alpha f,P) = \alpha \overline{R}(f,P) \le \alpha\left(\int_a^b f(x)dx + \varepsilon\right) = \alpha\int_a^b f(x)dx + \alpha\varepsilon$$

بما أن المتراجحات أعلاه تتحقق لكل $\varepsilon > 0$ ، $\alpha > 0$ ينتج أن :

$$\alpha\int_a^b f(x)dx < \underline{R}\int(\alpha f) < \overline{R}\int(\alpha f) \le \alpha\int_a^b f(x)dx$$

ومن هذا نستنتج أن

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

- إذا كانت $\alpha < 0$ ، فان لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$ نحصل على

$$\overline{R}(\alpha f,P) = \alpha \underline{R}(f,P) \qquad \underline{R}(\alpha f,P) = \alpha \overline{R}(f,P)$$

$$\alpha\int_a^b f(x)dx + \alpha\varepsilon = \alpha\left(\int_a^b f(x)dx + \varepsilon\right) \le \alpha \overline{R}(f,P) = \underline{R}(\alpha f,P) \le \underline{R}\int(\alpha f)$$

$$\overline{R}\int(\alpha f) \le \overline{R}(\alpha f,P) = \alpha \underline{R}(f,P) < \alpha\left(\int_a^b f(x)dx - \varepsilon\right) = \alpha\int_a^b f(x)dx - \alpha\varepsilon$$

ومن هذا نستنتج أن

$$\int_a^b (ª\, f)(x)dx = ª \int_a^b f(x)dx$$

مبرهنـــة(4.6.2)

لتكن كل من $f\,, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الريماني ، فان الدالة $f+g$ تكون قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$ وان

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

البرهان :

بما أن كل من $f\,, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الريماني ، فان كل من $D(f,[a,b])$ ، $D(g,[a,b])$ مجموعة مهملة $\Leftarrow$ $D(f,[a,b]) \cup D(g,[a,b])$ مجموعة مهملة

بما أن $D(f+g,[a,b]) \subseteq D(f,[a,b]) \cup D(g,[a,b])$ $\Leftarrow$ $D(f+g,[a,b])$ مجموعة مهملة

وعليه الدالة $f+g$ تكون قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$. وكذلك لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$ نحصل على

$$\underline{R}(f,P) + \underline{R}(g,P) \le \underline{R}(f+g,P) \qquad \overline{R}(f+g,P) \le \overline{R}(f,P) + \overline{R}(g,P)$$

وعليه $\underline{R}(f,P) + \underline{R}(g,P) \le \underline{R}(f+g,P) \le \overline{R}(f+g,P) \le \overline{R}(f,P) + \overline{R}(g,P)$

ليكن $£ > 0$

بما أن كل من الدالة f والدالة g قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ $\Leftarrow$ توجد تجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ وتجزئة P_2 للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\overline{R}(f,P_1) - \underline{R}(f,P_1) < \frac{£}{2} \qquad \overline{R}(g,P_2) - \underline{R}(g,P_2) < \frac{£}{2}$$

نضع $P = P_1 \cup P_2$ $\Leftarrow$ P تجزئة للفترة $[a,b]$ وتنعيم لكل من P_1 ، P_2

$$\underline{R}(f,P_1) + \underline{R}(g,P_2) \le \underline{R}(f,P) + \underline{R}(g,P) \le \underline{R}(f+g,P) \le \underline{R}\int(f+g) \le \overline{R}(f+g,P) \le \overline{R}(f,P) + \overline{R}(g,P)$$
$$\le \overline{R}(f,P_1) + \overline{R}(g,P_2) \le \underline{R}(f,P_1) + \underline{R}(g,P_2) + £$$

وبالمثل

$$\underline{R}(f,P_1) + \underline{R}(g,P_2) \le \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \le \underline{R}(f,P_1) + \underline{R}(g,P_2) + £$$

وعليه

$$\left| \int_a^b (f+g)(x)dx - \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| < £$$

بما أن $£$ أي عدد موجب، فان $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

برهان أخر:

ممكن أن نبرهن على أن الدالة $f+g$ تكون قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$ بدون استخدام مبرهنة ليبيك في التكامل الريماني وكالاتي : ليكن $£ > 0$

بما أن كل من f,g دالة قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$ $\Leftarrow$ توجد تجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ وتجزئة P_2 للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\overline{R}(f,P_1)<\int_a^b f(x)dx+\pounds \qquad \int_a^b f(x)dx-\pounds<\underline{R}(f,P_1)$$

$$\overline{R}(g,P_2)<\int_a^b g(x)dx+\pounds \qquad \int_a^b g(x)dx-\pounds<\underline{R}(g,P_2)$$

نضع $P=P_1\cup P_2$ $\Leftarrow$ P تجزئة للفترة $[a,b]$ $\Leftarrow$ $P=\{J_1,J_2,\cdots J_n\}$

$$m_i=\inf\{(f+g)(x):x\in J_i\} \qquad m_i'=\inf\{f(x):x\in J_i\} \qquad m_i''=\inf\{g(x):x\in J_i\}$$

$$M_i=\sup\{(f+g)(x):x\in J_i\} \qquad M_i'=\sup\{f(x):x\in J_i\} \qquad M_i''=\sup\{g(x):x\in J_i\}$$

$\Leftarrow$ $m_i\ge m_i'+m_i''$ و $M_i\le M_i'+M_i''$ وعليه نحصل على

$$\underline{R}(f,P)+\underline{R}(g,P)\le\underline{R}(f+g,P) \qquad \overline{R}(f+g,P)\le\overline{R}(f,P)+\overline{R}(g,P)$$

$\Leftarrow$ $\underline{R}(f,P)+\underline{R}(g,P)\le\underline{R}(f+g,P)\le\overline{R}(f+g,P)\le\overline{R}(f,P)+\overline{R}(g,P)$ فان

$$\overline{R}(f+g,P)-\underline{R}(f+g,P)\le\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)+\overline{R}(g,P)-\underline{R}(g,P)$$

ولكن $\overline{R}(g,P_2)-\underline{R}(g,P_2)<\frac{\pounds}{2}$, $\overline{R}(f,P_1)-\underline{R}(f,P_1)<\frac{\pounds}{2}$ فان $\overline{R}(f+g,P)-\underline{R}(f+g,P)<\pounds$

$\Leftarrow$ $f+g$ قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$ ، وأكثر من ذلك

$$\underline{R}\int f+\underline{R}\int g-2\pounds\le\underline{R}(f,P_1)+\underline{R}(g,P_2)\le\underline{R}(f,P)+\underline{R}(g,P)\le\underline{R}(f+g,P)\le\underline{R}\int(f+g)$$

$\Leftarrow$ $\underline{R}\int f+\underline{R}\int g-2\pounds\le\underline{R}\int(f+g)$ وبالمثل نبرهن $\overline{R}\int(f+g)\le\overline{R}\int f+\overline{R}\int g+2\pounds$ وعليه

$$\underline{R}\int f+\underline{R}\int g-2\pounds\le\underline{R}\int(f+g)\le\overline{R}\int(f+g)\le\overline{R}\int f+\overline{R}\int g+2\pounds$$

بما أن $\pounds$ أي عدد موجب، فان $\underline{R}\int f+\underline{R}\int g\le\underline{R}\int(f+g)\le\overline{R}\int(f+g)\le\overline{R}\int f+\overline{R}\int g$

بما أن كل من f,g دالة قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

$$\Leftarrow \quad \int_a^b f(x)dx=\overline{R}\int f=\underline{R}\int f \quad \text{و} \quad \int_a^b g(x)dx=\overline{R}\int g=\underline{R}\int g$$

وعليه $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\le\underline{R}\int(f+g)\le\overline{R}\int(f+g)\le\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

$$\Leftarrow \quad \int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

نتيجة(5.6.2)

لتكن كل من $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الريماني ولتكن $\sim,\ \in R$ فان الدالة $\sim f+\ g$ تكون قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$ وان

$$\int_a^b(\sim f+\ g)(x)dx=\sim\int_a^b f(x)dx+\ \int_a^b g(x)dx$$

مبرهنــة(6.6.2)

لتكن كل من $f\,,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الريماني ، فان

(1) إذا كانت $f\geq 0$ (أي أن $f(x)\geq 0$ لكل $x\in[a,b]$) فان $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

(2) إذا كانت $f\leq g$ (أي أن $f(x)\leq g(x)$ لكل $x\in[a,b]$) فان $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

(3) إذا كانت $\in R$ ، $\sim,$ بحيث أن $\leq f(x)\leq\ \sim$ لكل $x\in[a,b]$ فان $(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq\ \sim(b-a)$

البرهان :

(1) بما أن $f(x)\geq 0$ لكل $x\in[a,b]$ $\Leftarrow$ $\underline{R}(f,P)\geq 0$ لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$ $\underline{R}\int f\geq 0$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ $\Leftarrow$ $\int_a^b f(x)dx=\overline{R}\int f=\underline{R}\int f$ $\Leftarrow$ $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

(2) نضع $h=g-f$

بما أن $f(x)\leq g(x)$ لكل $x\in[a,b]$ $\Leftarrow$ $h(x)\geq 0$ لكل $x\in[a,b]$ وعليه $\int_a^b h(x)dx\geq 0$ ولكن

$$\int_a^b h(x)dx=\int_a^b(g-f)(x)dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\Rightarrow\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx\geq 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

(3) مباشرة من (2)

مبرهنـــة(7.6.2)

لتكن الدالة المقيدة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني ، فان الدالة $|f|$ قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ وان

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$$

البرهان:

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ ، فان $D(f,[a,b])$ مجموعة مهملة

بما أن $D(|f|,[a,b])\subseteq D(f,[a,b])$ $\Leftarrow$ $D(|f|,[a,b])$ مجموعة مهملة

وعليه الدالة $|f|$ تكون قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

برهان أخر: ليكن $\pounds>0$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ ، فانه توجد تجزئة P للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)<\pounds$

$\Leftarrow$ $P=\{J_1,J_2,\cdots J_n\}$

$m_i=\inf\{f(x):x\in J_i\}\qquad m_i'=\inf\{|f(x)|:x\in J_i\}$

$M_i=\sup\{f(x):x\in J_i\}\qquad M_i'=\sup\{|f(x)|:x\in J_i\}$

$\Leftarrow$ $M_i'-m_i'\leq M_i-m_i$ و عليه نحصل على

$$\overline{R}(|f|,P)-\underline{R}(|f|,P)\le \overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)<\varepsilon$$

وعليه الدالة $|f|$ تكون قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

بما أن $-|f|\le f\le |f| \;\Rightarrow\; -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \;\Rightarrow\; \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ملاحظة

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة المقيدة وكانت الدالة $|f|$ قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ ، فانه ليس من الضروري أن تكون الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

مبرهنــة(8.6.2)

لتكن كل من $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الريماني ، فان

(1) الدالة f^2 قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

(2) الدالة fg قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

(3) إذا كانت الدالة $\frac{1}{f}$ مقيدة فأنها قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

البرهان :

(1) ليكن $\varepsilon>0$

بما أن الدالة f مقيدة ، $\Leftarrow$ يوجد $k>o$ بحيث أن $|f(x)|\le k$ لكل $x\in J=[a,b]$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ $\Leftarrow$ توجد تجزئة $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)<\frac{\varepsilon}{2k}$$

$$\overline{R}(f,P)-\underline{R}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2k}$$

وكذلك $m_i\le M_i\le k \;\Rightarrow\; M_i+m_i\le 2k$

- إذا كانت $f\ge 0$ فان

$$\overline{R}(f^2,P)-\underline{R}(f^2,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i^2\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i^2-m_i^2)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i+m_i)(M_i-m_i)\Delta x_i$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}2k(M_i-m_i)\Delta x_i=2k\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<2k\frac{\varepsilon}{2k}=\varepsilon$$

$\Leftarrow$ الدالة f^2 قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

- إذا كانت $f<0$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ $\Leftarrow$ الدالة $|f|$ قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

بما أن $|f|\ge 0$ $\Leftarrow$ الدالة $|f|^2$ قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

ولكن $|f|^2=f^2$ $\Leftarrow$ الدالة f^2 قابلة للتكامل الريماني على $[a,b]$

(2)

بما أن كل من f,g دالة قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$، فان كل من $D(f,[a,b])$ ، $D(g,[a,b])$ مجموعة مهملة $\Leftarrow$ $D(f,[a,b]) \cup D(g,[a,b])$ مجموعة مهملة

بما أن $D(fg,[a,b]) \subseteq D(f,[a,b]) \cup D(g,[a,b])$ $\Leftarrow$ $D(fg,[a,b])$ مجموعة مهملة

وعليه الدالة fg قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

برهان أخر :

بما أن كل من f,g دالة قابلة للتكامل الريماني، فان كل من $f^2, g^2, (f+g)^2$ دالة قابلة للتكامل الريماني

وعليه الدالة $(f+g)^2 - f^2 - g^2$ دالة قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

ولكن $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ $\Leftarrow$ fg دالة قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

مبرهنــة(9.6.2) مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل Mean Value Theorem for Integral

إذا كانت الدالة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة ، فانه يوجد $c \in [a,b]$ بحيث أن

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

البرهان:

بما أن الدالة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة فأنها مقيدة و قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ و كذلك لها قيمة صغرى مطلقة ~ عند النقطة x_0 وقيمة عظمى مطلقة عند النقطة y_0، أي أن $f(y_0) =$ ، $f(x_0) = \sim$ ولذلك فان $\sim \le f(x) \le$ لكل $x \in [a,b]$ وعليه من((3) مبرهنة 6) نحصل على

$$\sim (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \quad (b-a)$$

بما أن $b-a \neq 0$ $\Leftarrow$ $\sim \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le$

إذا كانت $= \sim$ فان $\Leftarrow$ $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \sim = f(x_0)$ وعليه $\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$ ، أي أن $c = x_0$

أما إذا كانت $\neq \sim$ فان $< \sim$. ضع $s = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ $\Leftarrow$ $\sim \le s \le$

بما أن الدالة $f:[x_0,y_0] \to \mathbb{R}$ مستمرة فأنها تحقق خاصية القيمة المتوسطة ، فانه يوجد $c \in [x_0,y_0]$ بحيث أن $f(c) = s$

بما أن $[x_0,y_0] \subseteq [a,b]$ $\Leftarrow$ $c \in [a,b]$ وان $f(c) = s = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ وعليه $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

ملاحظـــة

- سترمز لمجموعة الدوال المقيدة المعرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالرمز $\mathrm{B}[a,b]$. ويمكن بسهولة إثبات أن $\mathrm{B}[a,b]$ فضاء جزئي من فضاء الدوال الحقيقية المعرفة على $[a,b]$ وبعبارة أخرى .

إذا كان $f,g \in \mathrm{B}[a,b]$ ، $\sim, \ \in \mathbb{R}$ فــان $\sim f + \ g \in \mathrm{B}[a,b]$

وأيضا يمكن إثبات $\mathrm{B}[a,b]$ جبر جزئي من جبر الدوال المعرفة على $[a,b]$ ، أي نبرهن إذا كان $f,g \in \mathrm{B}[a,b]$ فــــأن $fg \in \mathrm{B}[a,b]$.

- سترمز لمجموعة الدوال المستمرة المعرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالرمز $C[a,b]$. ويمكن بسهولة إثبات أن $C[a,b]$ فضاء جزئي من $\mathrm{B}[a,b]$ وبعبارة أخرى .

إذا كان $f,g \in C[a,b]$ ، $\sim, \ \in \mathbb{R}$ فــان $\sim f + \ g \in C[a,b]$

وأيضا يمكن إثبات $C[a,b]$ جبر جزئي من $\mathrm{B}[a,b]$، أي نبرهن إذا كان $f,g \in C[a,b]$ فــــأن $fg \in C[a,b]$

- سترمز لمجموعة الدوال المقيدة القابلة للتكامل ريمانيا على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالرمز $R\mathrm{I}[a,b]$. ويمكن إثبات أن $R\mathrm{I}[a,b]$ فضاء جزئي من $\mathrm{B}[a,b]$ (راجع المبرهنتين 3 ، 4) وبعبارة أخرى .

إذا كان $f,g \in R\mathrm{I}[a,b]$ ، $\sim, \ \in \mathbb{R}$ فــان $\sim f + \ g \in R\mathrm{I}[a,b]$

وأيضا يمكن إثبات $R\mathrm{I}[a,b]$ جبر جزئي من $\mathrm{B}[a,b]$ (راجع المبرهنة 8) ، أي نبرهن إذا كان $f,g \in R\mathrm{I}[a,b]$ فــــأن $fg \in R\mathrm{I}[a,b]$

$$C[a,b] \subseteq R\mathrm{I}[a,b] \subseteq \mathrm{B}[a,b]$$

ملاحظة

تكامل ريمان هو

(1) دالة خطية (راجع النتيجة 5)، أي أن الدالة $\int : R\mathrm{I}[a,b] \to \mathbb{R}$ خطية، بعبارة أخرى

إذا كانت $f,g \in R\mathrm{I}[a,b]$ ، $\sim, \ \in \mathbb{R}$ فــان $\int_a^b (\sim f + \ g)(x)dx = \sim \int_a^b f(x)dx + \ \int_a^b g(x)dx$

(2) دالة رتيبة (راجع المبرهنة 6) ، أي أن الدالة $\int : R\mathrm{I}[a,b] \to \mathbb{R}$ رتيبة ، بعبارة أخرى

إذا كانت $f,g \in R\mathrm{I}[a,b]$ بحيث أن $f \le g$ فان $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(3) دالة غير متباينة ، أي أن الدالة $\int : R\mathrm{I}[a,b] \to \mathbb{R}$ غير متباينة ، بعبارة أخرى

إذا كانت $f,g \in R\mathrm{I}[a,b]$ بحيث أن $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ فانه ليس من الضروري أن يكون $f = g$.

والمثال التالي يوضح ذلك

لتكن الدالة $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x) = x$ لكل $x \in [-1,1]$. فان $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ ولكن $f \neq 0$

مبرهنــة(10.6.2)

لتكن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة وغير سالبة . إذا كان $\int_a^b f(x)dx = 0$ فان $f = 0$

البرهان :

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $f \neq 0 \Leftarrow$ يوجد $x_0 \in [a,b]$ بحيث أن $f(x_0) \neq 0$ ولكن الدالة f غير سالبة $\Leftarrow y_0 = f(x_0) > 0$

بما أن الدالة f مستمرة وان الفترة المفتوحة $(\frac{1}{2}y_0, \frac{3}{2}y_0)$ تحتوي على النقطة y_0 ، فانه توجد فترة مفتوحة V في $\mathbb{R}$ تحتوي على x_0 بحيث أن $f(V \cap [a,b]) \subseteq (\frac{1}{2}y_0, \frac{3}{2}y_0)$. من هذا نستنتج انه توجد فترة مغلقة $B=[c,d]$ في $[a,b]$ تحتوي على x_0 بحيث أن $f(x)>0$ لكل $x \in B$

بما أن الفترة B مغلقة ومقيدة فأنها مرصوصة

بما أن الدالة f مستمرة فأنها تمتلك قيمة صغرى مطلقة على B لتكن $m=\min\{f(x): x\in B\}$ $\Leftarrow$ $m>0$

بما أن $f(x)\geq 0$ لكل $x\in[a,b]$ $\Leftarrow$ $\int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx \geq m(d-c)>0$ وهذا تناقض $\Leftarrow$ $f(x)=0$ لكل $x\in[a,b]$.

ملاحظة

إذا كانت $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال المقيدة القابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$ وكانت $f_n \to f$ فانه ليس من الضروري أن تكون f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ والمثال التالي يوضح ذلك

مثال(11.6.2)

لتكن A تمثل مجموعة الأعداد النسبية في الفترة المغلقة $[a,b]$. لكل $n\in N$ نعرف الدالة $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ على النحو الأتي :

$$f_n(x)=\begin{cases}-3, & x\in B\\ 2, & x\notin B\end{cases}$$

حيث $B=\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}\subset A$. نلاحظ أن $D(f_n,[a,b])=B$ لكل $n\in N$

بما أن $D(f,[a,b])$ مجموعة منتهية $\Leftarrow$ $D(f_n,[a,b])$ مجموعة مهملة وعليه الدالة f_n قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ لكل $n\in N$ وكذلك $\int_a^b f_n(x)dx=2(b-a)$

ولتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ معرفة على النحو الأتي :

$$f(x)=\begin{cases}-3, & x\in A\\ 2, & x\notin A\end{cases}$$

نلاحظ أن $f_n\to f$ ولكن f ليس قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ وان هذا التقارب غير منتظم.

ملاحظة

إذا كانت $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال المقيدة القابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$ وكانت $f_n\to f$ بحيث أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ فانه ليس من الضروري أن يكون

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

أي أن

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx$$

والمثال التالي يوضح ذلك

مثال(12.6.2)

لكل $n \in N$ نعرف الدالة $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ على النحو الأتي :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n, & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

الدالة f_n مستمرة وعليه الدالة f_n قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[0,1]$ لكل $n \in N$ وكذلك

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (-n^2 x + 2n)dx + \int_{\frac{2}{n}}^{1} (0)dx = 1$$

فان المتتابعة العددية $\{\int_a^b f_n(x)dx\}$ تقترب إلى المتتابعة $\{1\}$. ومن جهة أخرى المتتابعة $\{f_n\}$ تقترب إلى الدالة الصفرية ، أي أن $f_n \to f = 0$ ومن الواضح أن هذة الدالة قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[0,1]$ وان

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

ولكن $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = 1$ وكذلك $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = 0$ وعليه $\int_a^b f_n(x)dx \not\to \int_a^b f(x)dx$

مبرهنة(13.6.2)

إذا كانت $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال المقيدة القابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$ وكانت $f_n \xrightarrow{u} f$ فان الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ وان

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

البرهان :

بما أن $f_n \xrightarrow{u} f$ وكل من الدوال f_n مقيدة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة f مقيدة على الفترة $[a,b]$ بالإضافة إلى هذا لكل $£ > 0$ يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{£}{2(b-a)}$ لكل $n > k$ ولكل $x \in X$.

بما أن كل من الدوال f_n قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$ ، فكل من المجموعات $D(f_n,[a,b])$ مجموعة مهملة .

نضع $D=\bigcup_{n=1}^{\infty} D(f_n,[a,b])$ وعليه D مجموعة مهملة

من الواضح أن كل من الدوال f_n تكون مستمرة على المجموعة D' حيث $D'=[a,b]\,|\,D$

بما أن $f_n \xrightarrow{u} f$ فان الدالة f مستمرة على D'، أي أن $D(f,[a,b])\subseteq D$

$\Leftarrow$ $D(f,[a,b])$ مجموعة مهملة وعليه الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$

والآن لكل $n>k$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right|\le\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\Leftarrow \quad \int_a^b f_n(x)dx\to\int_a^b f(x)dx$$

7.2 الاشتقاق والتكامل الريماني Differentiation and Riemann Integration

مبرهنة(1.7.2)

لتكن I فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولتكن $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة وقابلة للتكامل الريماني على كل فترة جزئية مغلقة من I . إذا كانت $a\in\mathrm{I}$ ، فان الدالة $F:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة التالية : لكل $x\neq a$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

وان $F(a)=0$ تكون مستمرة

البرهان:

بما أن الدالة $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ مقيدة . نضع $M=\sup\{|f(x)|:x\in[a,b]\}$ فان لكل $x,y\in\mathrm{I}$ نحصل على

$$|F(x)-F(y)|=\left|\int_a^x f(t)dt-\int_a^y f(t)dt\right|=\left|\int_x^y f(t)dt\right|\le M|x-y|$$

والآن إذا كان $\varepsilon>0$ ، نأخذ $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$ ولهذا

إذا كان $|x-y|<\delta$ فان $|F(x)-F(y)|<\varepsilon$

وعليه الدالة F مستمرة بانتظام.

المبرهنة التالية تبين المقصود بالعبارة (التكامل هو عكس التفاضل)

مبرهنة(2.7.2)

لتكن I فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولتكن $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة. إذا كانت $a\in\mathrm{I}$ ، فان الدالة $F:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة التالية : لكل $x\neq a$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

وان $F(a)=0$ تكون قابلة للاشتقاق وان $F'=f$

البرهان:

ليكن $x_0 \in I$. ليكن $h > 0$

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى للتكامل ، يوجد $c \in [x_0, x_0+h]$ بحيث أن

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(c)(x_0+h-x_0) = f(c)h$$

وعليه فان $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(c)$

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$$

بما أن $c \in [x_0, x_0+h] \Leftarrow x_0 \le c \le x_0+h$ إذا كان $h \to 0$ فان $c \to x_0$ وعليه $\lim_{h\to 0} f(c) = f(x_0)$

$\Leftarrow F'(x_0) = f(x_0)$. وبالمثل نبرهن في حالة $h < 0$ وكذلك تبرهن في حالة $c = a$ أو $c = b$

مبرهنة(3.7.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة ،ولتكن الدالة $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة بحيث أن $g'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$ ، فان لكل $x \in [a,b]$ نحصل على

$$\int_a^x f(t)dt = g(x) - g(a)$$

البرهان:

نعرف الدالة $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ بالصيغة $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ لكل $x \in [a,b]$. باستخدام المبرهنة (3) تكون الدالة $F - g$ قابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$ و $F' - g' = (F-g)' = 0$

وباستخدام المبرهنة(4) في المحاضرة الثالثة ، يوجد عدد c بحيث أن $F(x) = g(x) + c$ لكل $x \in [a,b]$

بما أن $F(a) = 0$ فان $g(a) = -c$ وعلبه لكل $x \in [a,b]$ فان

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = g(x) + c = g(x) - g(a)$$

نتيجـــة(4.7.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة ،فانه توجد دالة $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق بحيث أن $g'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$. بالإضافة إلى هذا ، لكل دالة أخرى $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ لها الخاصية نفسها $h'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$ ، يوجد ثابت c بحيث أن $h = g + c$.

المبرهنة التالية تسمى **المبرهنـة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل**

مبرهنة(5.7.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة وقابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$ ،ولتكن الدالة $g : [a,b] \to R$ دالة بحيث أن $g'(x) = f(x)$ لكل $x \in [a,b]$ ، فان

$$\int_a^b f(t)dt = g(x) - g(a)$$

البرهان:

لتكن $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$

بما أن الدالة g قابلة للاشتقاق ، باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى ، يوجد $t_i \in J_i$ بحيث أن

$$g'(t_i) = \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\Leftarrow \quad g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \Leftarrow \quad g(x_i) - g(x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

فان $m_i(x_i - x_{i-1}) \le f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \Leftarrow \quad m_i(x_i - x_{i-1}) \le g(x_i) - g(x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1})$

$$\Leftarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - g(x_{i-1})) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\Leftarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le g(b) - g(a) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \Leftarrow \quad \underline{R}(f,P) \le g(b) - g(a) \le \overline{R}(f,P)$$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الريماني على الفترة $[a,b]$، فان $\int_a^b f(t)dt = g(x) - g(a)$

مبرهنة(6.7.2) (قاعدة ليبتز Leibniz's Rule)

إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة وكانت كل من الدوال $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ ، $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق عند كل $x \in [a,b]$ فــأن

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

8.2 تكامل ريمــان – ستيلتجس Riemann-Stieltjes integral

تمكن الرياضي الهولندي ستيلتجس سنة 1894 م من الوصول إلى مفهوم أخر للتكامل يطلق عليه الآن تكامل ريمان– ستيلتجس والذي هو أكثر عمومية من مفهوم ريمان للتكامل وفيما يلي تعريف أو بعض خواص هذا التكامل.

تعريف(1.8.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن $\sim : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة متزايدة .لكل تجزئة $P = \{a = x_\circ < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ للفترة $J = [a,b]$. نعرف $\Delta\sim_i = \sim(x_i) - \sim(x_{i-1})$ لكل $i = 1,2,\cdots,n$. بما أن $x_{i-1} < x_i$ وان $\sim$ غير متناقصة $\Leftarrow \Delta\sim_i \ge 0$ لكل $i = 1,2,\cdots,n$.

الآن نعرف

$$\overline{RS}(f,P,\sim) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sim_i, \qquad \underline{RS}(f,P,\sim) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sim_i$$

حيث M_i, m_i كما في تكامل ريمان

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\}, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

يطلق على العددين $\underline{R}(f,P,\sim),\overline{R}(f,P,\sim)$ على التوالي اسم مجموع ريمان– ستيلتجس الأعلى ومجموع ريمان – ستيلتجس الأسفل للدالة f بالنسبة إلى $\sim$ والتجزئة P . وبنفس الطريقة التي برهنا بها في تكامل ريمان نبرهن الآتـي :

(1) $\underline{RS}(f,P,\sim)\le\overline{RS}(f,P,\sim)$ لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$.

(2) إذا كان Q تجزئة منعمة للتجزئة P $(P\subseteq Q)$ فـــأن

$$\underline{RS}(f,Q,\sim)\ge\underline{RS}(f,P,\sim)\,,\ \overline{RS}(f,Q,\sim)\le\overline{RS}(f,P,\sim)$$

(3) إذا كانت كل من P,Q تجزئة للفترة $[a,b]$ فـــان

$$\underline{RS}(f,Q,\sim)\le\overline{RS}(f,P,\sim)$$

نضـــع

$$\overline{RS}(f,\sim)=\{\overline{RS}(f,P,\sim):[a,b]\ \text{تجزئة للفترة}\ P\}$$
$$\underline{RS}(f,\sim)=\{\underline{RS}(f,p,\sim):[a,b]\ \text{تجزئة للفترة}\ P\}$$

إذا كانت $P_0=\{a,b\}$ فـــأن

$$\overline{RS}(f,P_0,\sim)=M(\sim(b)-\sim(a))$$
$$\underline{RS}(f,P_0,\sim)=m(\sim(b)-\sim(a))$$

حيـــث

$$M=\sup\{f(x):x\in J\}\,,\ m=\inf\{f(x):x\in J\}$$

وعليـــــه

(1) $\overline{RS}(f,\sim)\ne ¤$ لان $\overline{RS}(f,P_0,\sim)\in\overline{RS}(f,\sim)$

(2) $\underline{RS}(f,\sim)\ne ¤$ لان $\underline{RS}(f,P_0,\sim)\in\underline{RS}(f,\sim)$

(3) $\overline{RS}(f,\sim)$ مقيدة من الأسفل لكل عنصر من $\underline{RS}(f,\sim)$

(4) $\underline{RS}(f,\sim)$ مقيدة من الأعلى لكل عنصر من $\overline{RS}(f,\sim)$

ولهذا نستطيع أن نعرف التكامل الأعلى والتكامل الأسفل للدالة f بالنسبة للدالة $\sim$ على النحو :

$$\overline{RS}\int fd\sim=\inf\{\overline{RS}(f,\sim)\}$$
$$\underline{RS}\int fd\sim=\sup\{\underline{RS}(f,\sim)\}$$

ومن الممكن أن نبرهن على أن

$$\underline{RS}\int fd\sim\le\overline{RS}\int fd\sim$$

تعريف(2.8.2)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن $\sim:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متزايدة . يقال عن الدالة f بأنها قابلة للتكامل بالنسبة للدالة $\sim$ حسب مفهوم ريمان- ستيلتجس إذا كان

$$\underline{RS}\int fd\sim=\overline{RS}\int fd\sim$$

وفي هذه الحال نكتب القيمة المشتركة للتكامليين الأعلى والأسفل بالرمز $\int fd\sim$ أو $\int_a^b fd\sim$.

ملاحظـــــة :

إذا كانت ~ دالة ذاتية (أي أن $\sim(x) = x$ لكل $x \in [a,b]$) . فان تكامل ريمان- ستيلتجس يصبح تكامل ريمان وان الرمز $\int_a^b fd\sim$ يصبح $\int_a^b fdx$

مثال(3.8.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن $\sim : [a,b] \to R$ دالة ثابتة حيث $\sim(x) = c$ لكل $x \in [a,b]$ فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى ~ وان $\int_a^b fd\sim = 0$

الحل:

$$\Delta\sim_i = \sim(x_i) - \sim(x_{i-1}) = c - c = 0$$

$$\overline{RS}(f,P,\sim) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sim_i = 0, \qquad \underline{RS}(f,P,\sim) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sim_i = 0$$

$$\underline{RS}\int fd\sim = 0, \quad \overline{RS}\int fd\sim = 0$$

وعليه $\underline{RS}\int fd\sim = \overline{RS}\int fd\sim$ وهكذا فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى ~ وان $\int_a^b fd\sim = 0$

مثال(4.8.2)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة ثابتة حيث $f(x) = c$ لكل $x \in [a,b]$ ولتكن $\sim : [a,b] \to R$ دالة غير متناقصة . فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى ~ وان $\int_a^b fd\sim = c(\sim(b) - \sim(a))$

الحل:

لتكن P تجزئة للفترة $[a,b]$

$$\Delta\sim_i = \sim(x_i) - \sim(x_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta\sim_i = \sim(b) - \sim(a)$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in J_i\} = c, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in J_i\} = c, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\overline{RS}(f,P,\sim) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sim_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta\sim_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta\sim_i = c(\sim(b) - \sim(a))$$

$$\underline{RS}(f,P,\sim) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sim_i = \sum_{i=1}^{n} c\Delta\sim_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta\sim_i = c(\sim(b) - \sim(a))$$

$$\overline{RS}(f,\sim) = \{c(\sim(b) - \sim(a))\}, \qquad \underline{RS}(f,\sim) = \{c(\sim(b) - \sim(a))\}$$

$$\overline{RS}\int fd\sim = \inf\{\overline{RS}(f,\sim)\} = c(\sim(b) - \sim(a))$$

$$\underline{RS}\int fd\sim = \sup\{\underline{RS}(f,\sim)\} = c(\sim(b) - \sim(a))$$

وعليه $\underline{RS}\int fd\sim = \overline{RS}\int fd\sim$ وهكذا فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى ~ وان $\int_a^b fd\sim = c(\sim(b) - \sim(a))$

مثال(5.8.2)

لتكن الدالة $f\ :[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x$ لكل $x\in[0,1]$ ولتكن الدالة $\sim :[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $\sim(x)=x^2$ لكل $x\in[0,1]$. برهن على أن الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى ~ وان

$$\int_0^1 x\,dx^2=\frac{2}{3}$$

الحل:

من الواضح أن الدالة f مقيدة على الفترة $[0,1]$ وان ~ دالة غير متناقصة على تلك الفترة

لكل عدد صحيح موجب n لتكن P_n تجزئة للفترة $[0,1]$ مكونة من n من الفترات الجزئية المتساوية الطول.

$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{n}$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$$x_i=a+i\frac{b-a}{n}=0+i\frac{1-0}{n}=\frac{i}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$M_i=\sup\{f(x):x\in J_i\}=f(x_i)=f(\frac{i}{n})=\frac{i}{n},\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$m_i=\inf\{f(x):x\in J_i\}=f(x_{i-1})=f(\frac{i-1}{n})=\frac{i-1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\Delta\sim_i=\sim(x_i)-\sim(x_{i-1})=\sim(\frac{i}{n})-\sim(\frac{i-1}{n})=\frac{i^2}{n^2}-\frac{(i-1)^2}{n^2}=\frac{i^2-i^2-2i-1}{n^2}=\frac{2i-1}{n^2}$$

$$\overline{R}(f,P_n,\sim)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sim_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{2i-1}{n^2}=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(2i^2-i)=\frac{1}{n^3}(\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2})$$

$$=\frac{n+1}{6n^2}(4n+2-3)=\frac{1}{6}(4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})$$

$$\underline{RS}(f,P_n,\sim)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sim_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\cdot\frac{2i-1}{n^2}=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}(2i^2-3i+1)=\frac{1}{n^3}(\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{3n(n+1)}{2}+n)$$

$$=\frac{1}{6}(4-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})$$

$$\overline{RS}\int f=\inf\{\overline{R}(f)\}\le\frac{1}{6}(4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})\quad,\quad \underline{RS}\int f=\sup\{\underline{R}(f)\}\ge\frac{1}{6}(4-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2})$$

لو كان $\underline{RS}\int f\ne\overline{RS}\int f$ فان

$d=\overline{RS}\int f-\underline{RS}\int f\le\dfrac{1}{6}(4+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2})-\dfrac{1}{6}(4-\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{1}{n}$ لكل n

بما أن $\underline{RS}\int f\le\overline{RS}\int f \iff d>0$ وهذا يناقض خاصية ارخميدس وعليه $\underline{RS}\int f=\overline{RS}\int f$

$$\int_0^1 f(x)dx=\overline{R}\int f=\inf\{\overline{R}(f)\}\le\inf\{\frac{1}{6}(4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}):n\in\mathbb{N}\}=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\underline{R}\int f=\sup\{\underline{R}(f)\}\ge\sup\{\frac{1}{6}(4-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}):n\in\mathbb{N}\}=\frac{2}{3}$$

ينتج من هذا أن $\int_0^1 x dx^2 = \underline{RS}\int f = \overline{RS}\int f = \frac{2}{3}$

ملاحظة

إن معظم الخواص الأولية لتكامل ريمان تبقى صحيحة في حالة تكامل ريمان- ستيلتجس ويمكن ان تبرهن بنفس الأسلوب المتبع في حالة تكامل ريمان. و فيما يلي سنسرد بعض هذه الخواص .

(1) لتكن كل من $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للتكامل بالنسبة إلى الدالة غير المتناقصة $\sim : [a,b] \to \mathbb{R}$ ولتكن $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ فان الدالة $r_1 f + r_2 g$ قابلة للتكامل بالنسبة إلى $\sim$ وأن

$$\int_a^b (r_1 f + r_2 g) d\sim = r_1 \int_a^b f d\sim + r_2 \int_a^b g d\sim$$

(2) إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للتكامل بالنسبة إلى كل من الدالتين غير المتناقصتين $\sim_1, \sim_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ وليكن r_1, r_2 عددين حقيقيين غير سالبين فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى $r_1\sim_1 + r_2\sim_2$ وأن

$$\int_a^b f d(r_1\sim_1 + r_2\sim_2) = r_1 \int_a^b f d\sim_1 + r_2 \int_a^b f d\sim_2$$

(3) إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ قابلة للتكامل بالنسبة إلى الدالة غير المتناقصة $\sim : [a,b] \to \mathbb{R}$ وكانت $a < c < b$ فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى $\sim$ على كل من الفترتين $[a,c]$ و $[b,c]$ وان

$$\int_a^b f d\sim = \int_a^c f d\sim + \int_c^b f d\sim$$

ملاحظـــة

من نقاط الاختلاف بين تكامل ريمان وتكامل ريمان - ستيلتجس هما :

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة للدالة $\sim$ على كل من $[a,c]$ و $[b,c]$ فليس من الضروري أن تكون قابلة للتكامل بالنسبة للدالة $\sim$ على الفترة $[a,b]$. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال(6.8.2)

لتكن كل من $f, \sim : [0,2] \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على النحو الأتي :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad \sim(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

بما أن $\sim$ دالة ثابتة على الفترة $[0,1]$ فان الدالة فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى $\sim$ وان

$$\int_0^1 f d\sim = 0$$

وكذلك بما أن الدالة f ثابتة على الفترة $[1,2]$ فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة إلى $\sim$ وان

$$\int_1^2 f d\sim = c(\sim(b) - \sim(a)) = 1 - 0 = 1$$

ولكن الدالة f غير قابلة للتكامل بالنسبة إلى $\sim$ على الفترة $[0,2]$.؟ لماذا

مبرهنـة (7.8.2)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة فان f قابلة للتكامل بالنسبة لكل دالة غير متناقصة ~ على الفترة $[a,b]$.

مبرهنــة (8.8.2)

لتكن كل من $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة غير المتناقصة . إذا كانت f قابلة للتكامل بالنسبة إلى g ، فان الدالة g تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى f وان

$$\int_a^b fdg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b gdf$$

وهو ما يسمى طريقة التجزئة لتكامل ريمان-ستيلتجس .

مبرهنــة(9.8.2)

لتكن $f\in R\mathrm{I}[a,b]$ ولتكن الدالة $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة وغير متناقصة وان g' مستمرة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة f تكون قابلة للتكامل بالنسبة إلى g وان $\int_a^b fdg = \int_a^b f(x)g'(x)dx$

9.2 المكاملات اللانهائية (Infinite Integrands)

يوجد نوع أخر من التكاملات المقفلة والتي صور تكاملها محددة ولكن مكاملاتها تكون لا نهائية عند نقطة واحدة أو أكثر من نقطة في فترة التكامل .

تعريف (1.9.2)

لتكن $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة وليكن $\lim_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$. نعرف

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

بشرط أن هذه الغاية موجودة . يستخدم تعريف مشابه عندما يصبح المكامل لا نهائيـــا عند الحد الأدنى للتكامل .

(1) إذا كانت الدالة $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة وكان $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$. عندئذ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

بشرط أن هذه الغاية موجودة .

(2) إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة عدا النقطة c حيث $a<c<b$ إذا كانت $\lim_{x\to c}|f(x)|=\infty$. عندئـــذ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

بشرط أن كلا من التكاملين في الطرف الأيمن موجود .

10.2 التكاملات المعتلة (Improper Integrals)

سنتطرق إلى نوع من التكاملات المحددة ذات حدود تكامل لا نهائية تسمى بالتكاملات المعتلة .

تعريف (1.10.2)

لتكن $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة تعرف

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

يقال عن التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب إذا كانت الغاية موجودة وبخلاف ذلك يقال عنه متباعد. وبصورة متشابهة نعرف التكامل المعتل عندما يكون الحد الأدنى للتكامل لا نهائيا وعندما يكون حدا التكامل لا نهائيين .

- إذا كانت الدالة $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ مستمرة . عندئذ $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$

ويقال عن التكامل $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ متقارب إذا كانت الغاية موجودة وبخلاف ذلك يقال عنه متباعد .

- إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مستمرة عندئذ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^\infty f(x)dx$

حيث c هو ثابت اختياري معطى . بشرط أن كلا التكاملين الممثلين في الطرف الأيمن متقاربان.

مثال(2.10.2)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}(1-\frac{1}{t})=1$$

مبرهنـــة(3.10.2)

لتكن $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ دالة ليست متناقصة . إذا كانت f مقيدة من الأعلى بالعدد α فأن $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود وان $\lim_{x\to\infty} f(x)\le\alpha$.

تعريف(4.10.2)

لتكن I فترة جزئية من $\mathbb{R}$ (ليس بالضرورة أن تكون محددة) . يقال عن الدالة $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ بأنها مهيمنة أو تتحكم (Dominate) بالدالة $f:I\to\mathbb{R}$ أذا كان $|f(x)|\le g(x)$ لكل $x\in\mathrm{I}$.

مبرهنـــة(5.10.2) اختيار المقارنة

لتكن كل من $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ ، $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ دالة بحيث أن g تهيمن على f . إذا كانت $f,g\in RI[a,b]$ وكان التكامل المعتل $\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربـا فان التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متقاربا أيضـــا .

Measure القياس .3

نظرية القياس فرع من فروع التحليل الرياضي تختص بدراسة مفهوم الحجم لمجموعة مجردة وكذلك دراسة دالة المجموعة

1.3 أطوال المجموعات المفتوحة المقيدة Lengths of Bounded Open Sets

تعريف(1.1.3)

لتكن I فترة مفتوحة مقيدة في $\mathbb{R}$ ، أي أن $\mathrm{I}=\emptyset$ أو $\mathrm{I}=(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$. طول(Length) الفترة I يرمز له بالرمز $L(\mathrm{I})$ ويعرف كالأتي

$$L(\mathrm{I})=\begin{cases} b-a & , \quad \mathrm{I}=(a,b) \\ 0 & , \quad \mathrm{I}=\emptyset \end{cases}$$

مثال (2.1.3)

(1) إذا كانت $\mathrm{I}=(3,8)$ فأن $L(\mathrm{I})=8-3=5$

(2) إذا كانت $\mathrm{I}=(-2,6)$ فأن $L(\mathrm{I})=6-(-2)=8$

(3) إذا كانت $\mathrm{I}=(-4,-2)$ فأن $L(\mathrm{I})=-2-(-4)=2$

مبرهنة (3.1.3)

إذا كانت كل من $\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2$ فترة مفتوحة مقيدة وكانت $\mathrm{I}_1\subseteq \mathrm{I}_2$ فان $L(\mathrm{I}_1)\le L(\mathrm{I}_2)$.

البرهان :

لتكن $\mathrm{I}_1=(a_1,b_1),\quad \mathrm{I}_2=(a_2,b_2)$

بما أن $\mathrm{I}_1\subseteq \mathrm{I}_2 \Leftarrow a_2\le a_1,\ b_1\le b_2 \Leftarrow b_1-a_1\le b_2-a_1\le b_2-a_2 \Leftarrow L(\mathrm{I}_1)\le L(\mathrm{I}_2)$

مبرهنة (4.1.3)

إذا كانت كل من $\mathrm{I},\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2,\cdots,\mathrm{I}_n$ فترة مفتوحة مقيدة وكانت $\mathrm{I}\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{I}_k$ فان $L(\mathrm{I})\le\sum_{k=1}^{n}L(\mathrm{I}_k)$

البرهان:

بطريقة الاستقراء الرياضي

عندما $n=1 \Leftarrow \mathrm{I}\subseteq \mathrm{I}_1$ ، باستخدام المبرهنة (3.1.3) نحصل على $L(\mathrm{I})\le L(\mathrm{I}_1)$

نفرض العلاقة صحيحة عندما $n=r$ ، أي إذا كان $\mathrm{I}\subseteq\bigcup_{k=1}^{r}\mathrm{I}_k$ فان $L(\mathrm{I})\le\sum_{k=1}^{r}L(\mathrm{I}_k)$

الآن يجب نبرهن على صحة العلاقة عندما $n=r+1$

$$\mathrm{I}\subseteq\bigcup_{k=1}^{r+1}\mathrm{I}_k=\bigcup_{k=1}^{r}\mathrm{I}_k\cup \mathrm{I}_{r+1}$$

$$L(\mathrm{I})\le L(\bigcup_{k=1}^{r}\mathrm{I}_k\cup \mathrm{I}_{r+1})\le L(\bigcup_{k=1}^{r}\mathrm{I}_k)+\mathrm{I}_{r+1})\le\sum_{k=1}^{r}L(\mathrm{I}_k)+L(\mathrm{I}_{r+1})=\sum_{k=1}^{r+1}L(\mathrm{I}_k)$$

إذن العلاقة صحيحة عندما $n=r+1 \Leftarrow$ صحيحة لجميع قيم n من الأعداد الصحيحة الموجبة

مبرهنة (5.1.3)

إذا كانت كل من $\mathrm{I},\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2,\cdots$ فترة مفتوحة مقيدة وكانت $\mathrm{I}\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{I}_k$ فان $L(\mathrm{I})\le\sum_{k=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_k)$.

البرهان :

بما أن I فترة مفتوحة مقيدة فان $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ أو $\mathrm{I}=(a,b)$

إذا كانت $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ فان المبرهنة واضحة، أما إذا كانت $\mathrm{I}=(a,b)$

ليكن $\varepsilon>0$ ولتكن $\mathrm{I}_0=(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$, $\mathrm{I}_{-1}=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, $\Leftarrow$ العائلة $\{\mathrm{I}_k : k\geq -1\}$ تكون غطاء مفتوح للفترة $[a,b]$ بما أن الفترة المغلقة $[a,b]$ مجموعة مرصوصة ، فأنة يوجد عدد منتهي من الفترات المفتوحة تغطي الفترة المغلقة $[a,b]$ وبالتالي تغطي الفترة المفتوحة $\mathrm{I}=(a,b)$ ، أي أن

$$\mathrm{I}\subset \mathrm{I}_{-1}\cup\mathrm{I}_0\cup\cdots\cup\mathrm{I}_n$$

$$L(\mathrm{I})\leq L(\mathrm{I}_{-1})+L(\mathrm{I}_0)+L(\mathrm{I}_1)+\cdots+L(\mathrm{I}_n)+\cdots=L(\mathrm{I}_{-1})+L(\mathrm{I}_0)+\sum_{k=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_k)$$

$$=2\varepsilon+2\varepsilon+\sum_{k=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_k)\leq 4\varepsilon+\sum_{k=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_k)$$

بما أن ε اختياري ينتج أن $L(\mathrm{I})\leq\sum_{k=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_k)$

مبرهنة (6.1.3)

إذا كانت $\{\mathrm{I}_k : k=1,2,\cdots,n\}$ عائلة منتهية من الفترات المفتوحة المقيدة والمتنافية مثنى مثنى وإذا كانت I فترة مفتوحة مقيدة وكانت $\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{I}_k\subseteq\mathrm{I}$ فان $\sum_{k=1}^{n}L(\mathrm{I}_k)\leq L(\mathrm{I})$

مبرهنة (7.1.3)

إذا كانت $\{\mathrm{I}_k\}$ عائلة قابلة للعد من الفترات المفتوحة المقيدة والمتنافية مثنى مثنى وإذا كانت I فترة مفتوحة مقيدة وكانت $\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{I}_k\subseteq\mathrm{I}$ فان $\sum_{k=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_k)\leq L(\mathrm{I})$

مبرهنة (8.1.3)

إذا كانت كل من $\{\mathrm{I}_n\}$ ، $\{J_k\}$ عائلة قابلة للعد من الفترات المفتوحة المقيدة والمتنافية مثنى مثنى بحيث أن $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}J_k$ فان $\sum_{n=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_n)\leq\sum_{k=1}^{\infty}L(J_k)$

البرهان:

$\mathrm{I}_n\cap J_k$ فترة مفتوحة مقيدة لكل قيم n,k

لكل قيم n فان $\mathrm{I}_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathrm{I}_n\cap J_k)$ ، باستخدام المبرهنات (5.1.3،4.1.3) نحصل على $L(\mathrm{I}_n)\leq\sum_{k=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_n\cap J_k)$

لكل قيم k ، المجموعات $\mathrm{I}_n\cap J_k$ تكون متنافية مثنى مثنى وكذلك $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathrm{I}_n\cap J_k)=(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n)\cap J_k\subseteq J_k$

باستخدام المبرهنات (7.1.3،6.1.3) نحصل على $\sum_{n=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_n\cap J_k)\leq L(J_k)$ وعليه

$$\sum_{n=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_n\cap J_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_n\cap J_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}L(J_k)$$

ر 332

تحليل رياضي (2) Mathematical Analysis II

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

ملاحظة

سبق وان برهنا في التحليل الرياضي(1) (راجع محاضرة التبولوجيا المترية في ر331) المبرهنة الآتية :

مبرهنة(9.1.3)

إذا كانت G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ، فان G تساوي اتحاد عائلة قابلة للعد من الفترات المفتوحة المتنافية مثنى مثنى، بالإضافة إلى هذا فان تجزئة هذه إلى فترات مفتوحة يكون وحيداً. بعبارة أخرى يمكن تجزئة G إلى عائلة وحيدة قابلة للعد من الفترات المفتوحة المقيدة $\{\mathrm{I}_n\}$ بحيث أن

$$(1)\ \ G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n \qquad (2)\ \ \mathrm{I}_n\cap\mathrm{I}_m=\emptyset \ \text{ لكل } n\neq m.$$

تعريف(10.1.3)

لتكن G مجموعة مقيدة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ،حسب المبرهنة السابقة يمكن تجزئة G إلى عائلة وحيدة قابلة للعد من الفترات المفتوحة المقيدة $\{\mathrm{I}_n\}$ بحيث أن $(1)\ G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n$ $(2)\ \mathrm{I}_n\cap\mathrm{I}_m=\emptyset$ لكل $n\neq m$.

طول المجموعة G يرمز له بالرمز $L(G)$ ويعرف بالصيغة $L(G)=\sum_{n=1}^{\infty}L(\mathrm{I}_n)$

من السهولة أن نبين أن هذه المتسلسلة متقاربة. في الواقع إذا كان $S_n=\sum_{k=1}^{n}L(\mathrm{I}_k)$

فمن الواضح أن $S_n\le L(\mathrm{I})$ ، حيث I أية فترة مفتوحة تحتوي على G . بالإضافة إلى هذا ، فان متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ هي متتابعة غير متناقصة(لان $L(\mathrm{I}_n)>0$) ولهذا فان هذه المتابعة متقاربة وبالتالي فالمتسلسلة متقاربة.

مبرهنة (11.1.3)

لتكن $\mathcal{F}$ تمثل عائلة جميع المجموعات المفتوحة المقيدة في $\mathbb{R}$ فان L دالة من $\mathcal{F}$ إلى $\mathbb{R}$ (أي أن $L:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ دالة) وتحقق الخواص التالية

(1) $L(A)\ge 0$ لكل $A\in\mathcal{F}$. أي أن الدالة L دالة غير سالبة

(2) $L(\emptyset)=0$

(3) إذا كانت $A,B\in\mathcal{F}$ بحيث أن $A\subseteq B$ فان $L(A)\le L(B)$ ، أي الدالة L دالة رتيبة غير متناقصة.

(4) إذا كانت $A,B\in\mathcal{F}$ فان $L(A\cup B)+L(A\cap B)=L(A)+L(B)$ وعليه $L(A\cup B)\le L(A)+L(B)$

وبصورة خاصة إذا كانت $A\cap B=\emptyset$ فان $L(A\cup B)=L(A)+L(B)$ ، أي الدالة L دالة تجميعية.

(5) إذا كانت $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات في $\mathcal{F}$ بحيث أن $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$ فان $L(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}L(A_n)$

وبصورة خاصة إذا كانت المجموعات $\{A_n\}$ متنافية مثنى مثنى فان $L(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}L(A_n)$

أي أن الدالة L دالة تجميعية بصورة معدودة

(6) إذا كانت $A\in\mathcal{F}$ وكانت r عددا حقيقيا فان $L(A)=L(A+r)$ حيث $A+r=\{x+r:x\in A\}$ ، أي أن طول المجموعة لا يتغير عند أزاحتها.

البرهان: واجب

2.3 القياس الخارجي للمجموعة المقيدة Outer Measure of a Bounded Set

تعريف(1.2.3)

لتكن $\mathcal{F}$ تمثل عائلة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة Ω. يقال عن دالة المجموعة $«:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ بأنها قياس خارجي على المجموعة Ω إذا تحققت البديهيات الآتية :

(1) $«(A)\geq 0$ لكل $A\in\mathcal{F}$

(2) $«(¤)=0$

(3) إذا كانت $A\subseteq B$ فان $«(A)\leq «(B)$

(4) إذا كانت $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات الجزئية من المجموعة Ω فان $«(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}«(A_n)$

من الواضح أن $«(A\cup B)\leq «(A)+«(B)$ لكل $A,B\in F$

مثال(2.2.3)

لتكن المجموعة Ω تحتوي على أكثر من عنصر ، ولتكن $\mathcal{F}$ تمثل عائلة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة Ω.
نعرف الدالة $«:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ بالصيغة

$$«(A)=\begin{cases}0, & A=¤\\ 1, & A\neq ¤\end{cases}$$

لكل $A\in\mathcal{F}$، فان $«$ قياس خارجي على المجموعة Ω .

ملاحظة

لتكن A مجموعة مقيدة في $\mathcal{F}$، ولتكن $\mathcal{F}_A$ تمثل عائلة جميع المجموعات المقيدة المفتوحة G في $\mathbb{R}$ والتي تحتوي على A، (أي إن $A\subseteq G$)

$\mathcal{F}_A=\{G\subseteq\mathbb{R}:A\subseteq G$ ، مجموعة مقيدة مفتوحة $G\}$

نلاحظ أن $\mathcal{F}_A\neq ¤$ لأنه توجد فترة مفتوحة (a,b) وتحتوي على A. وكذلك إذا كانت كل من A,B، مجموعة جزئية في $\mathbb{R}$ بحيث أن $A\subseteq B$ فان $\mathcal{F}_B\subseteq\mathcal{F}_A$

تعريف(3.2.3)

لتكن $\mathcal{F}$ عائلة جميع المجموعات المقيدة في $\mathbb{R}$. نعرف الدالة $«^*:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ بالصيغة

$$«^*(A)=\inf\{L(G):G\in\mathcal{F}_A\}$$

لكل $A\in\mathcal{F}$. من الواضح أن اكبر قيد أسفل $«^*(A)$ موجود لان المجموعة التي على الجهة اليمنى مقيدة من الأسفل بالصفر. كما أن هذه المجموعة غير خالية، ومن الواضح أيضا. إذا كانت A مجموعة مقيدة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فان
$«^*(A)=L(A)$

مبرهنة(4.2.3)

$«^*$ قياس خارجي على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ويسمى القياس الخارجي إلى لبيبيك. سنطلق على العدد $«^*(A)$ اسم القياس الخارجي للمجموعة A.

البرهان:

(1) لتكن A مجموعة مقيدة في $\mathbb{R}$
بما أن $«^*(A)$ هو اكبر قيد أسفل لمجموعة عناصرها أعداد غير سالبة ، وعليه $«^*(A)\geq 0$

(2) بما أن ¤ مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ $«^*(¤)=L(¤)=0$

(3) لتكن كل من A,B مجموعة مقيدة في $\mathbb{R}$ بحيث أن $A\subseteq B$

بما إن $A\subseteq B$ فان $\mathcal{F}_B\subseteq\mathcal{F}_A \Leftarrow \{L(G):G\in\mathcal{F}_B\}\subseteq\{L(G):G\in\mathcal{F}_A\}$ وعليه

$\inf\{L(G):G\in\mathcal{F}_A\}\le\inf\{L(G):G\in\mathcal{F}_B\}$

$\Leftarrow \lambda^*(A)\le\lambda^*(B)$

(4) لتكن $\{A_n\}$ عائلة قابلة للعد من المجموعات المقيدة في $\mathbb{R}$

لكل $\varepsilon>0$ ولكل n توجد مجموعة مفتوحة G_n بحيث أن $A_n\subseteq G_n$ وان $L(G_n)\le\lambda^*(A)+\frac{\varepsilon}{2^n}$ (حسب تعريف λ^*)

نضع $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n \Leftarrow G$ مجموعة مفتوحة وان $L(G)\le\sum_{n=1}^{\infty}L(G_n)$

$\Leftarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=G \Leftarrow \lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\le L(G)\le\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n})$

$\Leftarrow \lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)+\varepsilon$ لكل $\varepsilon>0$ ومن هذا نستنتج $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n)$

ملاحظة

إذا كانت كل من A,B مجموعة مقيدة في R بحيث أن $A\cap B=\emptyset$ ، فانه ليس من الضروري أن يكون

$\lambda^*(A\cup B)=\lambda^*(A)+\lambda^*(B)$

من جهة أخرى (راجع المبرهنة 11.2.3 الجزء 4) إذا كانت كل من A,B مجموعة مقيدة مفتوحة في $\mathbb{R}$ بحيث أن $A\cap B=\emptyset$ فان $L(A\cup B)=L(A)+L(B)$

لوقارنا بين النتيجتين ، نجد أن الدالتين L ، λ^* يختلفان في تحقيقهما تلك الخاصية فقط. أن وجود المجموعات A,B التي لا تسلك بصورة جيدة ، أي أن $\lambda^*(A\cup B)\ne\lambda^*(A)+\lambda^*(B)$ على الرغم من $A\cap B=\emptyset$. تجعلنا نقصر اهتمامنا على المجموعات " جيدة السلوك" والتي سنطلق عليها في البند (4) اسم المجموعات القابلة للقياس.

مبرهنة(5.2.3)

(1) إذا كانت A مجموعة ما في $\mathbb{R}$ ، فانه لكل $\varepsilon>0$ توجد مجموعة مفتوحة G تحوي على A وان $\lambda^*(A)\le\lambda^*(G)$ و $\lambda^*(A)<\lambda^*(G)+\varepsilon$

(2) إذا كانت A مجموعة مقيدة في $\mathbb{R}$ وكانت r عددا حقيقيا فان $\lambda^*(A)=\lambda^*(A+r)$ حيث $A+r=\{x+r:x\in A\}$ ، أي هذه الخاصية تبين أن القياس الخارجي للمجموعة لا تتغير عند إزاحة المجموعة ، أو أن المجموعات المتطابقة تملك نفس القياس الخارجي .

البرهان :

(1)

باستخدام تعريف اكبر قيد أسفل ، توجد مفتوحة G تحوي على A بحيث أن $\lambda^*(A)<L(G)+\varepsilon$

بما أن G مجموعة مفتوحة $\Leftarrow \lambda^*(G)=L(G) \Leftarrow \lambda^*(A)<\lambda^*(G)+\varepsilon$

بما أن $A\subseteq G \Leftarrow \lambda^*(A)\le\lambda^*(G)$

(2) يترك للقارئ

مبرهنة(6.2.3)

(1) إذا كانت $A=\{x\}$ فان $\lambda^*(A)=0$ وبصورة عامة إذا كانت A مجموعة قابلة للعد فان $\lambda^*(A)=0$

(2) إذا كانت A مجموعة مهملة فان $\lambda^*(A)=0$

(3) إذا كانت المجموعة A مقيدة وكان $\mu^*(A)=0$ فان A مهملة

(4) إذا كانت $A_1=[a,b),\quad A_2=(a,b],\quad A_3=[a,b]$ ، فان $\mu^*(A_i)=b-a$ لكل $i=1,2,3$

(5) إذا كانت A تمثل مجموعة الأعداد غير النسبية في الفترة $[a,b]$ فان $\mu^*(A)=b-a$

البرهان:

(1) لكل $n\in\mathbb{N}$ فان الفترة $G_n=(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})$ تحتوي على x وان $L(G_n)=(x+\frac{1}{n})-(x-\frac{1}{n})=\frac{2}{n}$

من تعريف μ^* نحصل على $0\le\mu^*(A)\le\frac{2}{n}$ لكل $n\in\mathbb{N}$ وعليه $\mu^*(A)=0$

الآن نبرهن في حالة A مجموعة قابلة للعد : ليكن $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$

ليكن $\varepsilon>0$: لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع $G_n=(x_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},x_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$

من الواضح أن G_n فترة مفتوحة تحتوي على x_n وان $L(G_n)=(x_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})-(x_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})=\frac{\varepsilon}{2^n}$

بما أن $x_n\in G_n \Leftarrow A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$

بما أن $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ مجموعة مفتوحة $\Leftarrow L(G)=L(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}L(G_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$

من تعريف μ^* نحصل على $0\le\mu^*(A)<\varepsilon$ وعليه $\mu^*(A)=0$

(2)

بما أن A مجموعة مهملة $\Leftarrow$ لكل $\varepsilon>0$ ، توجد عائلة قابلة للعد $\{G_n\}$ من الفترات المفتوحة بحيث أن

$$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n \quad \text{وان} \quad \sum_{n=1}^{\infty}L(G_n)<\varepsilon$$

بما أن $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ مجموعة مفتوحة $\Leftarrow L(G)=L(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}L(G_n)<\varepsilon$

من تعريف μ^* نحصل على $0\le\mu^*(A)<\varepsilon$ وعليه $\mu^*(A)=0$

(3) بما أن $\mu^*(A)=0 \Leftarrow$ لكل $\varepsilon>0$ ، توجد مجموعة مفتوحة G في $\mathbb{R}$ وتحتوي على A بحيث أن $L(G)<\varepsilon$

بما أن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R} \Leftarrow G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ حيث G_n فترة مفتوحة وان $G_n\cap G_m=\phi$ لكل $n\neq m$

$$\sum_{n=1}^{\infty}L(G_n)=L(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n)=L(G)<\varepsilon$$

وعليه $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ وان $\sum_{n=1}^{\infty}L(G_n)<\varepsilon \Leftarrow A$ مجموعة مهملة

(4) لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع $G_n=(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n})$

من الواضح أن G_n فترة مفتوحة تحتوي على A وان $L(G_n)=(b+\frac{1}{n})-(a-\frac{1}{n})=b-a+\frac{2}{n}$

من تعريف $«^*$ نحصل على $«^*(A_3) \le b-a+\frac{2}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و عليه $«^*(A_3) \le b-a$ ومن جهة أخرى فانه كل مجموعة مفتوحة G تحتوي على A_3 فأنها تحتوي على الفترة المفتوحة (a,b) ، أي أن $(a,b) \subseteq G$
$\Leftarrow \quad L(a,b) \le LG) \quad \Leftarrow \quad b-a \le LG) \quad \Leftarrow \quad b-a \le «^*(A_3)$ وعليه $«^*(A_3) = b-a$.

برهان أخر:

بما أن $(a,b) \subset [a,b] \quad \Leftarrow \quad b-a = «^*(a,b) \le «^*([a,b])$

و بما أن $[a,b] = \{a\} \cup (a,b) \cup \{b\}$

$\Leftarrow \quad «^*([a,b]) = «^*(\{a\} \cup (a,b) \cup \{b\}) \le «^*(\{a\}) + «^*((a,b) + «^*(\{b\})$

$«^*([a,b]) \le 0 + (b-a) + 0 = b-a$ وعليه $«^*([a,b]) = b-a$

وبالمثل نبرهن على أن : $«^*(A_1) = b-a$ و $«^*(A_2) = b-a$

(5)

بما أن $A \subset [a,b] \quad \Leftarrow \quad «^*(A) \le «^*([a,b]) = b-a$

لتكن B تمثل مجموعة الأعداد النسبية في الفترة $[a,b]$ فان $[a,b] = A \cup B$

$\Leftarrow \quad «^*([a,b]) \le «^*(A) + «^*(B) \quad \Leftarrow \quad b-a \le «^*(A) + «^*(B)$

بما أن B قابلة للعد فان $«^*(B) = 0$ وعليه $b-a \le «^*(A) \quad \Leftarrow \quad «^*(A) = b-a$

3.3 القياس الداخلي للمجموعة المقيدة Inner Measure of a Bounded Set

لتكن A مجموعة مقيدة في $\mathbb{R}$ ، ولتكن $\mathcal{G}_A$ تمثل عائلة جميع المجموعات المقيدة المغلقة H في $\mathbb{R}$ والمحتواة في A ، (أي إن $H \subseteq A$)

$\mathcal{G}_A = \{H \subseteq \mathbb{R} : H \subseteq A$ ، مجموعة مقيدة مغلقة $H\}$

نلاحظ أن $\mathcal{G}_A \ne ¤$ لأنه توجد مجموعة مغلقة ومحتواة في A . وكذلك إذا كانت كل من A, B مجموعة جزئية في $\mathbb{R}$ بحيث أن $A \subseteq B$ فان $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_B$ وكذلك $\{«^*(H) : H \in \mathcal{G}_A\} \subseteq \{«^*(H) : H \in \mathcal{G}_B\}$

تعريف(1.3.3)

لتكن $\mathcal{F}$ عائلة جميع المجموعات المقيدة في $\mathbb{R}$. نعرف الدالة $«_* : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ بالصيغة

$«_*(A) = \sup\{«^*(H) : H \in \mathcal{G}_A\}$

لكل $A \in \mathcal{F}$. من الواضح أن الصغر قيد أعلى $«^*(A)$ موجود لان المجموعة التي على الجهة اليمنى مقيدة من الأعلى بالعدد $«^*(A)$. كما أن هذه المجموعة غير خالية.

مبرهنة(2.3.3)

لتكن $\mathcal{F}$ عائلة جميع المجموعات المقيدة في $\mathbb{R}$

(1) $«_*(A) \ge 0$ لكل $A \in \mathcal{F}$

(2) $«_*(A) \le «^*(A)$ لكل $A \in \mathcal{F}$

(3) إذا كانت $A, B \in \mathcal{F}$ بحيث أن $A \subseteq B$ فان $«_*(A) \le «_*(B)$

(4) إذا كانت $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات المتنافية مثنى مثنى في $\mathcal{F}$ بحيث أن $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ فان

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(A_n) \le \mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

(5) إذا كانت A مجموعة مغلقة في $\mathcal{F}$ فان $\mu_*(A)=\mu^*(A)$

(6) إذا كانت $A_1=[a,b],\quad A_2=(a,b),\quad A_3=[a,b),\quad A_4=(a,b]$ ، فان $\mu_*(A_i)=b-a$ لكل $i=1,2,3,4$

(7) إذا كانت A مجموعة مفتوحة في $\mathcal{F}$ فان $\mu_*(A)=\mu^*(A)$

البرهان:

(1) لتكن $A\in\mathcal{F}$ بما أن $\mu_*(A)$ هو اصغر قيد أعلى لمجموعة عناصرها غير سالبة ، وعليه $\mu_*(A)\ge 0$

(2) لتكن $A\in\mathcal{F}$

لكل H مجموعة مغلقة مقيدة H بحيث $H\subseteq A \;\Leftarrow\; \mu^*(H)\le\mu^*(A)$ ، وعليه

$\sup\{\mu^*(H): H\in\mathcal{G}_A\}\le\mu^*(A) \;\Leftarrow\; \mu_*(A)\le\mu^*(A)$

(3) لتكن $A,B\in\mathcal{F}$ بحيث أن $A\subseteq B$

$\mathcal{G}_A\subseteq\mathcal{G}_B$ وكذلك $\{\mu^*(H): H\in\mathcal{G}_A\}\subseteq\{\mu^*(H): H\in\mathcal{G}_B\}$ وعليه

$$\sup\{\mu^*(H): H\in\mathcal{G}_A\}\le\sup\{\mu^*(H): H\in\mathcal{G}_B\}$$

$\Leftarrow\; \mu_*(A)\le\mu_*(B)$

4.3 المجموعات القابلة للقياس Measurable Sets

تعريف(1.4.3)

ليكن μ^* قياس خارجي على المجموعة Ω. يقال عن المجموعة A بأنها قابلة للقياس بالنسبة إلى μ^* (أو قابلة للقياس في حالة عدم وجود التباس) إذا كانت $\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^c)$ لكل $T\subseteq\Omega$

ملاحظة

بما أن $T=(T\cap A)\cup(T\cap A^c)$ لكل $A,T\subseteq\Omega$

باستخدام البديهية(4) من تعريف القياس الخارجي، نحصل على

$$\mu^*(T)=\mu^*((T\cap A)\cup(T\cap A^c))\le\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^c)$$

وعليه A تكون قابلة للقياس إذا وفقط إذا كان $\mu^*(T)\ge\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^c)$ لكل $T\subseteq\Omega$.

مبرهنة(2.4.3)

ليكن μ^* قياس خارجي على المجموعة Ω . إذا كان $\mu^*(A)=0$ فان A تكون قابلة للقياس ، وعليه $\emptyset$ تكون قابلة للقياس.

البرهان :

ليكن $T\subseteq\Omega$

بما أن $T\cap A\subset A \;\Leftarrow\; \mu^*(T\cap A)\le\mu^*(A)=0$ وكذلك $T\cap A^c\subset T \;\Leftarrow\; \mu^*(T\cap A^c)\le\mu^*(T)$

$\Leftarrow\; \mu^*(T)\ge\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^c) \;\Leftarrow\; A$ قابلة للقياس

بما أن $\mu^*(\emptyset)=0$ فان $\emptyset$ قابلة للقياس

مبرهنة(3.4.5)

ليكن μ^* قياس خارجي على المجموعة Ω. إذا كانت المجموعة A قابلة للقياس فان A^c تكون أيضا قابلة للقياس ، وعليه Ω تكون قابلة للقياس.

البرهان :

ليكن $T \subseteq \Omega$

بما أن المجموعة A قابلة للقياس

$\Leftarrow \quad \mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c) = \mu^*(T \cap A^c) + \mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cap A^c) + \mu^*(T \cap (A^c)^c)$

$\Leftarrow$ A^c قابلة للقياس

بما أن $\emptyset$ قابلة للقياس و $\Omega = \emptyset^c$ فان Ω تكون قابلة للقياس.

مبرهنة(4.4.3)

ليكن μ^* قياس خارجي على المجموعة Ω. إذا كانت المجموعتان A, B قابلتين للقياس فان $A \cap B$ تكون أيضا قابلة للقياس

البرهان:

ليكن $T \subseteq \Omega \Leftarrow T \cap A \subset \Omega$

بما أن المجموعة B قابلة للقياس ، فان

$$\mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \cap A \cap B^c) \qquad \cdots \quad (1)$$

بما أن $A \cap B \subset A$ ، نحصل على $A^c \subseteq (A \cap B)^c \quad \Leftarrow \quad T \cap A^c \subseteq T \cap (A \cap B)^c$ وعليه

$$T \cap A^c = (T \cap (A \cap B)^c) \cap (T \cap A^c) = T \cap (A \cap B)^c \cap A^c \qquad \cdots \quad (2)$$

بما إن $(A \cap B)^c \cap A = (A^c \cup B^c) \cap A = A \cap B^c$ ، نحصل على

$$T \cap (A \cap B)^c \cap A = T \cap A \cap B^c \qquad \cdots \quad (3)$$

بما أن $T \cap (A \cap B)^c \subset \Omega$ والمجموعة A قابلة للقياس

$$\mu^*(T \cap (A \cap B)^c) = \mu^*(T \cap (A \cap B)^c) \cap A) + \mu^*(T \cap (A \cap B^c) \cap A^c)$$

$$\mu^*(T \cap (A \cap B)^c) = \mu^*(T \cap A \cap B^c) + \mu^*(T \cap A^c) \qquad \cdots \quad (4)$$

$$\mu^*(T \cap (A \cap B)) + \mu^*(T \cap (A \cap B)^c) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \cap A \cap B)^c) + \mu^*(T \cap A^c)$$

$$= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$$

بما أن $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$ ، نحصل على $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \cap (A \cap B)^c)$

$\Leftarrow$ $A \cap B$ قابلة للقياس

نتيجة(5.4.3)

ليكن μ^* قياس خارجي على المجموعة Ω. إذا كانت المجموعتين A ، B قابلتين للقياس فان كل من $A \cup B$ ، $A \setminus B$ تكون أيضا قابلة للقياس

البرهان:

(1)

بما أن كل من A, B مجموعة قابلة للقياس $\Leftarrow$ كل من A^c ، B^c مجموعة قابلة للقياس $\Leftarrow$ $A^c \cap B^c$ مجموعة قابلة للقياس $\Leftarrow$ $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ مجموعة قابلة للقياس

(2)

بما أن $A \setminus B = A \cap B^c$ فان $A \setminus B$ تكون أيضا قابلة للقياس

مبرهنة(6.4.3)

ليكن μ^* قياس خارجي على المجموعة Ω. إذا كانت المجموعة A قابلة للقياس وكانت B مجموعة ما جزئية من Ω بحيث أن $A \cap B = \emptyset$ فان $\mu^*(T \cap (A \cup B)) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap B)$ لكل $T \subseteq \Omega$.

البرهان:

بما أن $T\cap(A\cup B)\subseteq\Omega$ والمجموعة A قابلة للقياس فان

$$\mu^*(T\cap(A\cup B))=\mu^*((T\cap(A\cup B))\cap A)+\mu^*((T\cap(A\cup B))\cap A^c)$$

بما أن $A\cap B=\emptyset \;\Leftarrow\; B\subset A^c$ ، نحصل على $\mu^*(T\cap(A\cup B))=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap B)$

مبرهنة (7.4.3)

لتكن A مجموعة مقيدة في $\mathbb{R}$ فان العبارات آلاتية متكافئة

(1) المجموعة A قابلة للقياس

(2) لكل $\varepsilon>0$ توجد مجموعة مقيدة مفتوحة G في R بحيث أن $\mu^*(G\Delta A)<\varepsilon$

(3) لكل $\varepsilon>0$ توجد مجموعة مقيدة مفتوحة G في R وتحتوي على A بحيث أن $\mu^*(G\cap A^c)<\varepsilon$

(4) $\mu^*(A)=\mu_*(A)$

(5) لكل $\varepsilon>0$ ، توجد مجموعة مفتوحة G ومجموعة مغلقة H بحيث أن $H\subset A\subset G$ و $\mu(G\cap H^c)<\varepsilon$

قياس المجموعات المقيدة Measure of Bounded Sets

تعريف (8.4.3)

لتكن $\mathcal{F}$ تمثل عائلة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة Ω. يقال عن دالة المجموعة $\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ بأنها قياس على المجموعة Ω إذا تحققت البديهيات الآتية :

(1) $\mu(A)\geq 0$ لكل $A\in\mathcal{F}$

(2) إذا كانت $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات المتنافية مثنى مثنى في $\mathcal{F}$ فان $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

مبرهنة (9.4.3)

لتكن $\mathcal{F}$ تمثل عائلة جميع المجموعات المقيدة القابلة للقياس في $\mathbb{R}$.نعرف الدالة $\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ بالصيغة $\mu(A)=\mu^*(A)$ لكل $A\in\mathcal{F}$ ، فان μ قياس على المجموعة $\mathbb{R}$ ، ويسمى العدد $\mu(A)$ قياس ليبيك للمجموعة A

البرهان :

(1)

لتكن A مجموعة مقيدة وقابلة للقياس في $\mathbb{R} \;\Leftarrow\; \mu(A)=\mu^*(A)\geq 0$

(2) لتكن $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات المقيدة القابلة للقياس والمتنافية مثنى مثنى وان $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ مجموعة مقيدة في $\mathbb{R}$

بما أن المجموعة A_n قابلة للقياس لكل قيم $n \;\Leftarrow\;$ المجموعة $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ قابلة للقياس

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

(3) إذا كانت $A\subseteq B$ فان $\mu(A)\leq\mu(B)$

(4) إذا كانت $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات الجزئية من المجموعة Ω فان $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

من الواضح أن $\mu(A\cup B)\leq\mu(A)+\mu(B)$ لكل $A,B\in\mathcal{F}$

إذا كانت المجموعة A قابلة للقياس ، فسنضع $\mu(A)=\mu^*(A)$ ويسمى العدد $\mu(A)$ قياس ليبيك للمجموعة A .

ملاحظات

(1) إذا كانت A مجموعة مقيدة ومفتوحة فان A قابلة للقياس وان $\mu(A) = L(A)$

(2) إذا كانت A مجموعة مهملة فان A تكون قابلة للقياس وان $\mu(A) = 0$

(3) إذا كانت $A_1 = (a,b), A_2 = (a,b], A_3 = [a,b), A_4 = [a,b]$ فان كل من A_i قابلة للقياس وان $\mu^*(A_i) = b - a$ لكل $i = 1,2,3,4$

قياس المجموعات غير المقيدة Measure of Unbounded Sets

سبق وان تطرقنا لقياس المجموعات الحقيقة المقيدة والآن نحتاج لمعرفة قياس المجموعات غير المقيدة مثل مجوعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد النسبية والفترات غير المقيدة

مبرهنة (10.4.3)

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ولتكن $A_n = (-n,n) \cap A$ لكل قيم n. فان A تكون قابلة للقياس إذا كانت المجموعة A_n قابلة للقياس لكل قيم n.

البرهان:

بما أن $A_n \subseteq A_{n+1}$ لكل قيم n

إذا كانت المجموعة A_n قابلة للقياس لكل قيم n فان $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n+1})$ لكل قيم n. وعليه فان المتتابعة $\{\mu(A_n)\}$ تكون تزايدية .

إذا كانت المتتابعة $\{\mu(A_n)\}$ مقيدة فأنها متقاربة ، ونعرف قياس المجموعة A بأنه نقطة تقارب هذه المتتابعة . إما إذا كانت المتتابعة غير مقيدة ، فنعرف قياس المجموعة A بأنه ∞ ، سوف نرمز لقياس المجموعة A بالرمز $\mu(A)$ ، أي أن $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ إذا كانت المتتابعة $\{\mu(A_n)\}$ مقيدة ،وإما إذا كانت المتتابعة غير مقيدة فان $\mu(A) = \infty$

مثال(11.4.3)

إذا كانت $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ حيث $G_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \Leftarrow \mu(G_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ من الواضح أن A غير مقيدة.

لكل قيم n فان $A_n = (-n,n) \cap A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$ مجموعة قابلة للقياس وعليه المجموعة A تكون قابلة للقياس وان فان

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{n} G_k) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \mu(G_k)) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})) = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

مثال(12.4.3)

إذا كانت $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ حيث $G_n = (n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}) \Leftarrow \mu(G_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$

من الواضح أن A غير مقيدة.

لكل قيم n فان $A_n = (-n,n) \cap A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$ مجموعة قابلة للقياس وعليه المجموعة A تكون قابلة للقياس وان

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{n} G_k) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \mu(G_k)) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}}) = 2$$

مثال(12.4.3)

إذا كانت $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ حيث $G_n=(n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}) \Leftarrow «(G_n)=\frac{1}{n}$

من الواضح أن A غير مقيدة.

لكل قيم n فان $A_n=(-n,n)\cap A=\bigcup_{k=1}^{n}G_k$ مجموعة قابلة للقياس وعليه المجموعة A تكون قابلة للقياس وان

$$«(A)=\lim_{n\to\infty}«(A_n)=\lim_{n\to\infty}«(\bigcup_{k=1}^{n}G_k))=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}«(G_k))=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n})=\infty$$

مثال(13.4.3)

(1) إذا كانت المجموعة A قابلة للعد فان A تكون قابلة للقياس وان $«(A)=0$ ، وعلبه كل من مجوعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، مجوعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ومجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ تكون قابلة للقياس وقياسها يساوي صفر.

(2) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ قابلة للقياس وان $«(\mathbb{R})=\infty$

الحل:

(1)

بما أن المجموعة A قابلة للعد فان لكل قيم n تكون المجوعة $A_n=(-n,n)\cap A$ تكون مجموعة مقيدة وقابلة للعد وعليه A_n تكون قابلة للقياس لكل قيم n وان $«(A_n)=0$ ولذلك فان المجموعة A تكون قابلة للقياس

من الواضح الآن :

أن المتتابعة $\{«(A_n)\}$ متقاربة وتقترب إلى الصفر (كل حد من حدودها يساوي صفر) ولذلك فان $«(A)=0$.

(2)

لكل قيم n تكون المجوعة $A_n=(-n,n)\cap\mathbb{R}=(-n,n)$ تكون فترة مفتوحة وعليه A_n تكون قابلة للقياس لكل قيم n . ولذلك فان المجموعة $\mathbb{R}$ تكون قابلة للقياس $«(A_n)=«(-n,n)=2n$ والمتتابعة العددية $\{«(A_n)\}=\{2n\}$ غير مقيدة فان $«(\mathbb{R})=\infty$

مبرهنة(14.4.3)

المجموعة الحقيقية A تكون قابلة للقياس إذا وفقط إذا كان لكل $£>0$ ، توجد مجموعة مفتوحة G ومجموعة مغلقة H بحيث أن $H\subset A\subset G$ و $«(G\,|\,H)<£$

البرهان:

نفرض أن : المجموعة A قابلة للقياس

ليكن $£>0$: لكل عدد صحيح موجب n ، نعرف

$$B_n=\{x\in R: n-1\le|x|<n\},\qquad A_n=A\cap B_n$$

فان لكل A_n قابلة للقياس و $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$

باستخدام المبرهنة () لكل عدد صحيح موجب n ، توجد مجموعة مفتوحة G_n ومجموعة مغلقة H_n بحيث أن

$$H_n\subset A_n\subset G_n \text{ و } «(G_n\,|\,H_n)<\frac{£}{2^n}$$

مبرهنة (15.4.3)

(1) الفترة (a,∞) قابلة للقياس وان $\mu((a,\infty))=\infty$ (2) الفترة $(-\infty,b)$ قابلة للقياس وان $\mu((-\infty,b))=\infty$

(3) كل مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ تكون قابلة للقياس (4) كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تكون قابلة للقياس

(5) إذا كانت $A=\{(x_1,x_2)\in R^2 : a_i\le x_i\le b_i,\quad i=1,2\}$ فان A قابلة للقياس وان

$\mu(A)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)$

(6) إذا كانت $B=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 : a_i\le x_i\le b_i,\quad i=1,2,3\}$ فان B قابلة للقياس وان

$\mu(B)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$

مجموعة غير قابلة للقياس A Non-Measurable Set

لتكن $J=[0,1]$ ولتكن $\sim$ علاقة معرفة على المجموعة J . بالصيغة الآتية:

$x\sim y$ إذا وفقط إذا كان $x-y$ عددا نسبيا

لكل $x,y\in J$ فان $\sim$ علاقة تكافؤ على J وعليه $\sim$ تجزئ J إلى صفوف تكافؤ

$[x]=\{y\in J : x\sim y\}=\{y\in J : x-y\in Q\}$

لتكن A مجموعة تتكون من عنصر واحد فقط من كل من صفوف التكافؤ المذكورة أعلاه(لاحظ إننا نحتاج بديهية الاختيار للحصول على المجموعة A)

مبرهنة(16.4.3)

المجموعة A المعرفة أعلاه تكون غير قابلة للقياس.

البرهان:

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض المجموعة قابلة للقياس

لتكن $S=\{r_n : n\in\mathbb{N}\}$ مجموعة الأعداد النسبية في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

نضع $A_n=A+r_n$ حيث أن $r_n\in S$ لكل قيم n

بما أن المجموعة A قابلة للقياس $\Leftarrow$ A_n مجموعة قابلة للعد وان $\mu(A_n)=\mu(A)$ لكل قيم n

ليكن $r_n,r_m\in S$ بحيث أن $r_n\neq r_m$ $\Leftarrow$ $A_n\cap A_m=(A+r_n)\cap(A+r_m)=\emptyset$

$\Leftarrow$ $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات القابلة للقياس والمتنافية مثنى مثنى .

نضع $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ $\Leftarrow$ $B\subseteq(-1,2)$ $\Leftarrow$ $\mu(B)\le\mu(-1,2)=2-(-1)=3$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\mu(B)\le 3$$

وهذا يعني أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ متقاربة ، وعليه يكون $\mu(A_n)\to 0$

بما أن $\mu(A_n)=\mu(A)$ لكل قيم n $\mu(A)=0$ وكذلك نحصل على أن $\mu(B)=0$

من جهة أخرى سنبرهن على أن $J\subseteq B$: ليكن $x\in J$ $\Leftarrow$ $x\in[x]$ $\Leftarrow$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $x-y$ عدد نسبي في الفترة المفتوحة $(-1,1)$ ، أي أن $x-y=r_n$ بحيث أن $r_n\in S$ ،

$x=y-r,\quad y\in A,\quad r_n\in S$

$\Leftarrow$ $x\in A_n$ $\Leftarrow$ $x\in B$ وعليه $J\subseteq B$ $\Leftarrow$ $\mu(J)\le\mu(B)$ $\Leftarrow$ $\mu(B)\ge\mu(J)=1$ وهذا تناقض .

5.3 الدوال القابلة للقياس Measurable Functions

قبل أن نطرق إلى تعريف الدالة القابلة للقياس والمبرهنات المتعلقة بها نحتاج إلى بعض الملاحظات المهمة

أولا: إذا كانت $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث أن $a<b$ فان

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,b-\frac{1}{n}]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}] \quad (1)$$

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a,b+\frac{1}{n})=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}) \quad (2)$$

ثانيا : ليكن $a,b\in\mathbb{R}$ ولتكن $f:\Omega\to\mathbb{R}^*$ دالة فان

$$f^{-1}([-\infty,b])=\{x\in\Omega: f(x)\le b\}=\{f\le b\} \quad (1)$$

$$f^{-1}([-\infty,b))=\{x\in\Omega: f(x)<b\}=\{f<b\} \quad (2)$$

$$f^{-1}([a,\infty])=\{x\in\Omega: f(x)\ge a\}=\{f\ge a\} \quad (3)$$

$$f^{-1}((a,\infty])=\{x\in\Omega: f(x)>a\}=\{f>a\} \quad (4)$$

$$\{f\le b\}^c=\{f>b\} \quad (5)$$

$$\{f<b\}^c=\{f\ge b\} \quad (6)$$

$$\{f\ge a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f>a-\frac{1}{n}\} \quad (7)$$

$$\{f>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f\ge a+\frac{1}{n}\} \quad (8)$$

$$\{f\le a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f>a+\frac{1}{n}\} \quad (9)$$

$$\{f<a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f\ge a-\frac{1}{n}\} \quad (10)$$

$$\{f=a\}=\{f\ge a\}\cap\{f\le a\} \quad (11)$$

$$\{f=\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f\ge n\} \quad (12)$$

$$\{f=-\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f\le -n\} \quad (\text{ب})$$

تعريف (1.5.3)

ليكن Ω مجموعة ما. يقال عن الدالة $f:\Omega\to\mathbb{R}$ بأنها قابلة للقياس (measurable function) إذا كان لكل مجموعة A قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ فان $f^{-1}(A)$ تكون قابلة للقياس في Ω.

مبرهنة (2.5.3)

ليكن Ω مجموعة ما وكانت $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة فان العبارات التالية متكافئة :

(1) الدالة f قابلة للقياس

(2) لكل $a\in\mathbb{R}$ فان المجموعة $\{f\le a\}$ تكون قابلة للقياس.

(3) لكل $a\in\mathbb{R}$ فان المجموعة $\{f<a\}$ تكون قابلة للقياس.

(4) لكل $a\in\mathbb{R}$ فان المجموعة $\{f\ge a\}$ تكون قابلة للقياس.

(5) لكل $a\in\mathbb{R}$ فان المجموعة $\{f>a\}$ تكون قابلة للقياس.

البرهان:

(1) $\Rightarrow$ (2) : ليكن $a\in R$

بما إن الدالة f قابلة للقياس وان المجموعة $[-\infty,a]$ قابلة للقياس في $\mathbb{R}$، فان $f^{-1}([-\infty,a])$ مجموعة قابلة للقياس في Ω ولكن $\{f\le a\}=f^{-1}([-\infty,a])$ فان المجموعة $\{f\le a\}$ قابلة للقياس.

(2) $\Rightarrow$ (3)

ليكن $a\in\mathbb{R}$ وليكن n عدد صحيح موجب فان $a-\frac{1}{n}\in\mathbb{R}$

من الشرط (2) نحصل على $\{f \le a-\frac{1}{n}\}$ مجموعة قابلة للقياس وعليه المجموعة $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f \le a-\frac{1}{n}\}$ قابلة للقياس

ولكن $\{f<a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f \le a-\frac{1}{n}\} \quad \Leftarrow \quad \{f<a\}$ مجموعة قابلة للقياس .

(3) $\Leftarrow$ (4)

ليكن $a\in\mathbb{R}$

بما أن المجموعة $\{f<a\}$ قابلة للقياس $\Leftarrow$. المجموعة $\{f<a\}^c$ قابلة للقياس ولكن $\{f\ge a\}=\{f<a\}^c$

$\Leftarrow$ المجموعة $\{f\ge a\}$ قابلة للقياس.

(4) $\Leftarrow$ (5)

ليكن $a\in\mathbb{R}$ وليكن n عدد صحيح موجب فان $a+\frac{1}{n}\in\mathbb{R}$

من الشرط (4) نحصل على $\{f \ge a+\frac{1}{n}\}$ مجموعة قابلة للقياس وعليه المجموعة $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f \ge a+\frac{1}{n}\}$ قابلة للقياس

ولكن $\{f>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f \ge a+\frac{1}{n}\} \quad \Leftarrow \quad \{f>a\}$ مجموعة قابلة للقياس .

(5) $\Leftarrow$ (1`)

يترك للقارئ

نتيجة(3.5.3)

ليكن Ω مجموعة ما وكانت $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس فان

(1) لكل $a\in\mathbb{R}$ تكون المجموعة $\{f=a\}$ قابلة للقياس .

(2) لكل $a\in\mathbb{R}$ تكون المجموعة $\{a<f<b\}$ قابلة للقياس .

(3) كل من $-f, |f|$ دالة قابلة للقياس .

مثال (4.5.3)

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases} x+5, & x<-1 \\ 2, & 1\le x<0 \\ x^2, & 0\le x \end{cases}$$

فان الدالة f قابلة للقياس لأنه

$$\{f\le a\}=\begin{cases} (-\infty,a-5), & a<0 \\ (-\infty,-5]\cup\{0\}, & a=o \\ (-\infty,a-5]\cup[0,\sqrt{a}], & 0<a<2 \\ (-\infty,a-5]\cup[-1,\sqrt{a}], & 2\le a<4 \\ (-\infty,\sqrt{a}], & 4\le k \end{cases}$$

بما أن كل من المجموعات $(-\infty,a-5),$ ، $(-\infty,-5]\cup\{0\}$ ، $(-\infty,a-5]\cup[0,\sqrt{a}],$ ، $(-\infty,a-5]\cup[-1,\sqrt{a}]$ ، $(-\infty,\sqrt{a}],$ مجموعة قابلة للقياس ،فان المجموعة $\{f(x)\le a\}$ تكون قابلة للقياس ، وعليه الدالة f قابلة للقياس.

مثال(5.5.3)
لتكن A تمثل مجموعة الأعداد النسبية في الفترة المغلقة $[a,b]$ ولتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالصيغة
$$f(x)=\begin{cases}2, & x\in A\\ 3, & x\notin A\end{cases}$$
فان الدالة f قابلة للقياس

مثال(6.5.3)
لتكن A تمثل مجموعة الأعداد النسبية في الفترة المغلقة $[0,1]$ ولتكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالصيغة
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ x, & x\notin A\end{cases}$$
فان الدالة f قابلة للقياس

مبرهنة(7.5.3)
ليكن D مجموعة قابلة للقياس في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ولتكن $f:D\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة فأنها تكون قابلة للقياساً.

البرهان:
ليكن $a\in\mathbb{R}$: نضع $A=\{f<a\}$
لكل $x\in A$ ، يوجد G_x جوار للنقطة x بحيث أن $f(y)<a$ لكل $y\in D\cap G_x$
لتكن $B=\bigcup_{x\in A}G_x$ فان المجموعة المفتوحة B تكون قابلة للقياس
بما أن $A=B\cap D$ فان المجموعة A تكون قابلة للقياس وعليه الدالة f تكون قابلة للقياس.

ملاحظة
لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، لتكن $D_f([a,b])$ مجموعة النقاط التي تكون فيها الدالة f غير مستمرة ، فان المجموعة $D_f([a,b])$ تكون مجموعة مهملة وقياسها يساوي صفر وعليه الدالة f تكون قابلة للقياس على المجموعة $D_f([a,b])$
بما أن الدالة f مستمرة على المجموعة $[a,b]|D_f([a,b])$ فان الدالة f تكون قابلة للقياس على المجموعة $[a,b]|D_f([a,b])$.

مبرهنة(8.5.3)
ليكن Ω مجموعة ما ، $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للقياساً. ولتكن $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة ، فان الدالة $g\circ f:\Omega\to\mathbb{R}$ فأن تكون قابلة للقياساً.

البرهان:
بما أن الدالة g مستمرة فأن المجموعة $\{g<a\}$ تكون مفتوحة لكل $a\in\mathbb{R}$
وعليه $\{g<a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_n$ حيث أن $\{\mathrm{I}_n\}$ عائلة قابلة للعد من الفترات المفتوحة المتنافية مثنى مثنى
بما أن الدالة f قابلة للقياس فان المجموعة $\{x\in\Omega: f(x)\in\mathrm{I}_n\}$ تكون قابلة للقياس لكل قيم n
$\Leftarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\Omega: f(x)\in\mathrm{I}_n\}$ مجموعة قابلة للقياس

ولكن $\Leftarrow \quad \{g \circ f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f(x) \in I_n\} \quad \Leftarrow \quad \{g \circ f < a\}$ مجموعة قابلة للقياس

وعليه الدالة $g \circ f$ قابلة للقياس .

مبرهنة(9.5.3)

ليكن Ω مجموعة ما. ولتكن كل من $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ، $g : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياسً.

(1) $\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{r < g\}) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r < g\}$

(2) المجموعات $\{f < g\}, \{f = g\}, \{f > g\}, \{f \le g\}, \{f \ge g\}$ قابلة للقياس

(3) $\{f + g < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{g < a - r\})$

البرهان:

(1) ليكن $x \in \{f < g\} \quad \Leftarrow \quad f(x) < g(x)$ ، يوجد عدد نسبي $r \in Q$ بحيث أن $f(x) < r < g(x)$ ،
وعليه $x \in \{f < r\} \cap \{r < g\}$ وبذلك $\{f < g\} \subset \bigcup_{r \in Q} (\{f < r\} \cap \{r < g\})$ وبالمثل نبرهن الجزء الأخر .

(2) بما الدوال f, g قابلة فان المجموعات $\{f < r\} = f^{-1}([-\infty, r))$ ، $\{r < g\} = g^{-1}((r, \infty])$ قابلة للقياس لكل $r \in \mathbb{Q}$ ، باستخدام (1) وان $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد نحصل على $\{f < g\}$ قابلة للعد ، وبالمثل نبرهن على أن $\{g < f\}$. وأكثر من ذلك نحصل على كل من $\{f \le g\} = \{g < f\}^c$ ، $\{g \le f\} = \{f < g\}^c$ مجموعة قابلة للقياس
وأخيرا نحصل على $\{f = g\} = \{f \le g\} \cap \{g \le f\}$ مجموعة قابلة للقياس

مبرهنة(10.5.3)

ليكن Ω مجموعة ما. ولتكن كل من $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ، $g : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياسً. وليكن $\sim \in \mathbb{R}$ فان كل من $f + \sim$ ، $\sim f$ ، $f \pm g$ ، f^2 ، fg ، $\frac{1}{f}$ (حيث $\frac{1}{f}(\mu) = \infty$ عندما $f(\mu) = 0$) تكون دالة قابلة للقياس.

البرهان:

(1) لتكن $a \in \mathbb{R}$ فان $\{\sim + f < a\} = \{f < a - \sim\}$

بما أن الدالة f قابلة للقياس ، فان المجموعة $\{f < a - \sim\}$ قابلة للقياس

ولكن $\{\sim + f < a\} = \{f < a - \sim\}$ فان المجموعة $\{\sim + f < a\}$ قابلة للقياس وبذلك الدالة $f + \sim$ تكون قابلة للقياس.

(2) لتكن $a \in \mathbb{R}$ فان

$$\{\sim f > a\} = \begin{cases} \{f > \frac{a}{\sim}\}, & \sim > 0 \\ \{f < \frac{a}{\sim}\}, & \sim < 0 \end{cases}$$

بما أن الدالة f قابلة للقياس ، فان كل من المجموعات $\{f > \frac{a}{\sim}\}$ ، $\{f < \frac{a}{\sim}\}$ تكون مجموعة قابلة للقياس فان المجموعة $\{\sim f > a\}$ قابلة للقياس وبذلك الدالة $\sim f$ تكون قابلة للقياس

(3) لتكن $a \in \mathbb{R}$ فان $\{f + g < a\} = \bigcup_{r \in Q} (\{f < r\} \cap \{g < a - r\})$

بما أن الدوال f,g قابلة للقياس ، فان كل من المجموعات $\{f<r\}$ ،$\{g<a-r\}$ مجموعة قابلة للقياس وعليه المجموعة $\{f+g<a\}=\bigcup_{r\in Q}(\{f<r\}\cap\{g<a-r\})$ تكون قابلة للقياس وبذلك الدالة $f+g$ تكون قابلة للقياس.

(4) لتكن $a\in\mathbb{R}$ فان

$$\{f^2\le a\}=\begin{cases}¤, & a<0\\ \{f=0\}, & a=0\\ \{-a\le f\le a\}, & a>0\end{cases}$$

بما أن الدالة f قابلة للقياس ، فان كل من المجموعات ¤، $\{f=0\}$ ،$\{-a\le f\le a\}$ تكون مجموعة قابلة للقياس فان المجموعة $\{f^2\le a\}$ قابلة للقياس وبذلك الدالة f^2 تكون قابلة للقياس.

(5) بما أن $fg=\frac{1}{2}((f+g)^2-f^2-g^2)$ فان الدالة fg قابلة للقياس

(6) لتكن $a\in\mathbb{R}$ فان

$$\{\frac{1}{f}<a\}=\begin{cases}\{\frac{1}{a}<f<0\}, & a<0\\ \{-\infty<f<0\}, & a=0\\ \{-\infty\le f<0\}\cup\{f>\frac{1}{a}], & a>0\end{cases}$$

بما أن الدالة f قابلة للقياس ، فان كل من المجموعات

$$\{-\infty\le f<0\}\cup\{f>\frac{1}{a}]\ ،\{-\infty<f<0\}\ ،\{\frac{1}{a}<f<0\}$$

تكون مجموعة قابلة للقياس فان المجموعة $\{\frac{1}{f}<a\}$ قابلة للقياس وبذلك الدالة $\frac{1}{f}$ تكون قابلة للقياس.

تعريف(11.5.3)

ليكن »ً قياسيا على المجموعةً Ω . يقال أن الشرط (أو الخاصية) متحقق دائماً تقريباً (almost everywhere) بالنسبة للقياس » ، (يكتب د.ت – » أو د.ت في حالة عدم وجود القياس) إذا وجدت مجموعة جزئية B من Ω قياسها صفر بحيث يتحقق الشرط خارج B .

مثلاً :

لتكن $f,g:\Omega\to R$ دوال . يقال إن $f=g$ د.ت إذا وجدت $B\subseteq\Omega$ ، $»(B)=0$ بحيث إن $f(x)=g(x)$ لكل $x\notin B$ (أي لكل $x\in B^c$) . وهذا يعني $»\{x\in\Omega: f(x)\ne g(x)\}=0$.

وكذلك يقال للدالة f بأنها منتهية دائما تقريبا ، إذا كان لكل $£>0$، يوجد k بحيث أن $»\{x\in\Omega: f(x)>k\}\le £$.

مبرهنة(12.5.3)

ليكن Ω مجموعة ما. ولتكن كل من $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ، $g:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة بحيث أن $f=g$ د.ت فان الدالة f تكون قابلة للقياس إذا وفقط إذا كانت الدالة g قابلة للقياسً

البرهان :

لكل $a\in\mathbb{R}$ فان $\{f<a\}\Delta\{g<a\}\subseteq\{f\ne g\}$ وعليه المجموعة $\{f<a\}$ تكون قابلة للقياس وعليه المجموعة $\{f<a\}$ تكون قابلة للقياس إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\{g<a\}$ قابلة للقياس.

تعريف(13.5.3)

ليكن x,y أعداد حقيقية .نعرف

$$x\vee y=\max(x,y)=\begin{cases}x & ,x\ge y\\ y & ,x\le y\end{cases} \quad ، \quad x\wedge y=\min(x,y)=\begin{cases}x & ,x\le y\\ y & ,x\ge y\end{cases}$$

وبسهولة يمكن إثبات

(1) $|x|=x\vee(-x)$ (2) $x\vee y=\frac{1}{2}[x+y+|x-y|]$ (3) $x\wedge y=\frac{1}{2}[x+y-|x-y|]$

وبصورة مشابهة إذا كانت f,g دوال حقيقية فان $f\wedge g\ ,\ f\vee g$ تكون دوال وتعرف بالشكل

$$(f\vee g)(x)=f(x)\vee g(x)\ ،\ (f\wedge g)(x)=f(x)\wedge g(x)$$

يمكن أن نثبت

(1) $\{f\vee g<a\}=\{f<a\}\bigcap\{g<a\}$.

(2) $\{f\wedge g<a\}=\{f<a\}\bigcup\{g<a\}$.

(3) الدوال $f\wedge g\ ,\ f\vee g$ قابلة للقياس إذا وفقط إذا كانت الدوال g,f قابلة للقياس .

تعريف(14.5.3)

لتكن Ω مجموعة ما ولتكن $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة . نعرف الجزء الموجب f^+ والجزء السالب f^- للدالة f بالشكل الأتي:

$$f^+=\max\{f,0\} \quad ، \quad f^-=-\min\{f,0\}=\max\{-f,0\}$$

وبعبارة أخرى

$$f^+(w)=\begin{cases}f(w) & , \quad f(w)\ge 0\\ 0 & , \quad f(w)<0\end{cases} \quad ، \quad f^-(w)=\begin{cases}-f(w) & , \quad f(w)\le 0\\ 0 & , \quad f(w)>0\end{cases}$$

ومن التعريف نستنتج إن

(1) $f=f^+-f^-\ ,\ |f|=f^++f^-$ ، وعليه $f^-=\frac{1}{2}(|f|-f)$ ، $f^+=\frac{1}{2}(|f|+f)$.

(2) كل من f^+ ، f^- غير سالبة .

(3) f قابلة للقياس إذا وفقط إذا كان كل من f^+ ، f^- قابلة للقياس .

الدالة المميزة characteristic function

تعريف(15.5.3)

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة Ω. الدالة $\mathrm{I}_A:\Omega\to\mathbb{R}$ المعرفة بالشكل

$$\mathrm{I}_A(x)=\begin{cases}1 & , \quad x\in A\\ 0 & , \quad x\notin A\end{cases}$$

تسمى الدالة المميزة (characteristic function) أو دالة المؤشر (indicator function) للمجموعة A .

يمكن إثبات الخواص الآتية

(1) $A\subseteq B$ إذا وفقط إذا كان $\mathrm{I}_A\le\mathrm{I}_B$. (2) $\mathrm{I}_{A\cap B}=\mathrm{I}_A\cdot\mathrm{I}_B$ (3) $\mathrm{I}_{A\cup B}=\mathrm{I}_A+\mathrm{I}_B-\mathrm{I}_{A\cap B}$

(4) $\mathrm{I}_{A^c}=1-\mathrm{I}_A$ (5) $\mathrm{I}_{A\Delta B}=|\mathrm{I}_A-\mathrm{I}_B|$.

مبرهنة(16.5.3)

لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة Ω. فان الدالة I_A تكون قابلة للقياس ً إذا وفقط إذا كانت المجموعة A قابلة للقياس في Ω.

البرهان :

نفرض الدالة I_A قابلة للقياس ً.

بما إن المجموعة $\{1\}$ قابلة للقياس فان $\mathrm{I}_A^{-1}(\{1\})$ مجموعة قابلة للقياس في Ω، ولكن $\mathrm{I}_A^{-1}(\{1\}) = A \;\Rightarrow\; A$ مجموعة قابلة للقياس في Ω

الاتجاه الآخر. نفرض المجموعة A قابلة للقياس في Ω ،

$$\{\mathrm{I}_A \le a\} = \begin{cases} \emptyset, & a < 0 \\ A^c, & 0 \le a < 1 \\ \mathbb{R}, & a \ge 1 \end{cases}$$

بما كل من المجموعات $\emptyset$ ، A^c ، $\mathbb{R}$ مجموعة قابلة للقياس في Ω ، فان المجموعة $\{\mathrm{I}_A \le a\}$ تكون قابلة للقياس وعليه الدالة I_A تكون قابلة للقياس.

ر 332

Mathematical Analysis II (2) تحليل رياضي

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

4. تكامل لبيك The Lebesgue Integral

1.4 التجزئة الليبيكية Lebesgue Partition

تعريف (1.1.4)

لتكن Ω مجموعة قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. التجزئة الليبيكية (Lebesgue Partition) P للمجموعة Ω هي العائلة المنتهية $P=\{A_i : i=1,2,\cdots,n\}$ من المجوعات القابلة للقياس والجزئية من Ω والتي تحقق الشروط الآتية :

(1) A_i مجموعة قابلة للقياس في Ω لكل $i=1,2,\cdots,n$ (2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ لكل $i \neq j$ (3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

بسهولة يمكن إثبات $\mu(\Omega)=\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{n=1}^{n}\mu(A_1)$

ملاحظة

يجب أن نميز بين مفهوم التجزئة الريمانية ومفهوم التجزئة الليبيكية

نلاحظ أن $P=\{[x_0,x_1],[x_1\ x_2],\cdots[x_{n-1},x_n]\}$ التجزئة الريمانية للفترة $[a,b]$ تمثل تجزئة ليبيكية للفترة $[a,b]$

مثال (2.1.4)

(1) لتكن A تمثل مجموعة الأعداد النسبية في الفترة $[a,b]$ و B تمثل مجموعة الأعداد غير النسبية في الفترة $[a,b]$ فان $P=\{A,B\}$ تمثل تجزئة ليبيكية للفترة $[a,b]$

(2) إذا كانت $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n$ حيث أن $\mathrm{I}_n=(n-\frac{1}{2^n},n+\frac{1}{2^n})$ ، لكل k فان $P=\left\{\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2,\cdots,\mathrm{I}_k,\bigcup_{n=k+1}^{\infty}\mathrm{I}_k\right\}$ تمثل تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω

تعريف (3.1.4)

لتكن كل من $P=\{A_i : i=1,2,\cdots,n\}$ ، $Q=\{B_j : j=1,2,\cdots,m\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω. يقال عن P بانها تنعيم أو منعمة (Refinement) للتجزئة Q اذا كانت لكل j يوجد i بحيث ان $B_j \subseteq A_i$.

مبرهنة(4.1.4)

لتكن كل من $P=\{A_i : i=1,2,\cdots,n\}$ ، $Q=\{B_j : j=1,2,\cdots,m\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω فان

$P\cap Q=\{A_i\cap B_j : i=1,2,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,m\}$

تكون تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω وهي تنعيم إلى كل من P و Q

تعريف (5.1.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن $P=\{A_i : i=1,2,\cdots,n\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω. نضـع

$M=\sup\{f(x) : x\in\Omega\} \qquad m=\inf\{f(x) : x\in\Omega\}$

$M_i=\sup\{f(x) : x\in A_i\} \qquad m_i=\inf\{f(x) : x\in A_i\},\quad i=1,2,\cdots,n$

الآن : نعرف

$$\overline{L}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\,\mu(A_i),\quad \underline{L}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\mu(A_i)$$

يطلق على العددين $\underline{L}(f,P),\overline{L}(f,P)$ على التوالي اسم مجموع ليبيك الأعلى ومجموع ليبيك الأسفل للدالة f بالنسبة للتجزئة P.

مبرهنة(6.1.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن $P=\{A_i : i=1,2,\cdots,n\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω. فان $m\mu(\Omega)\le\underline{L}(f,P)\le\overline{L}(f,P)\le M\mu(\Omega)$

البرهان :

بما أن الدالة f مقيدة $\Leftarrow$ $m\le m_i\le M_i\le M$ لكل قيم $i=1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow$ $m\mu(A_i)\le m_i\mu(A_i)\le M_i\mu(A_i)\le M\mu(A_i)$ لكل قيم $i=1,2,\cdots,n$

$$\Leftarrow\quad \sum_{i=1}^{n}m\mu(A_i)\le\sum_{i=1}^{n}m_i\mu(A_i)\le\sum_{i=1}^{n}M_i\mu(A_i)\le\sum_{i=1}^{n}M\mu(A_i)$$

$$\Leftarrow\quad m\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\le\sum_{i=1}^{n}m_i\mu(A_i)\le\sum_{i=1}^{n}M_i\mu(A_i)\le M\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\quad\Leftarrow\quad m\mu(\Omega)\le\underline{L}(f,P)\le\overline{L}(f,P)\le M\mu(\Omega)$$

مبرهنة (7.1.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن كل من P ، Q تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω. إذا كانت التجزئة Q تنعيم إلى التجزئة P فــــان

$$\overline{L}(f,Q)\le\overline{L}(f,P),\qquad \underline{L}(f,Q)\ge\underline{L}(f,P)$$

وعليه $\underline{L}(f,P)\le\underline{L}(f,Q)\le\overline{L}(f,Q)\le\overline{L}(f,P)$

نتيجة(8.1.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة ولتكن كل من P ، Q تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω. فــان $\underline{L}(f,P)\le\overline{L}(f,Q)$

البرهان :

لتكن $\mathrm{H}=P\cap Q$ $\Leftarrow$ H تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω وهي تنعيم إلى كل من P و Q وعليه

$$\underline{L}(f,P)\le\underline{L}(f,\mathrm{H})\le\overline{L}(f,\mathrm{H})\le\overline{L}(f,Q)$$

2.4 تعريف التكامل الليبيكي Definition of The Lebesgue Integral

تعريف(1.2.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، $f:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة . نعــــرف

$\overline{L}(f)=\{\overline{L}(f,P):\Omega$ تجزئة ليبيكية للمجموعة $P\}$ و $\underline{L}(f)=\{\underline{L}(f,P):\Omega$ تجزئة ليبيكية للمجموعة $P\}$

لاحظ أن كل من $\overline{L}(f)$ ، $\underline{L}(f)$ مقيدة

ولهذا نستطيع أن نعرف تكامل ليبيك الأعلى والأسفل للدالة $f:\Omega\to\mathbb{R}$ على النحو الآتي:

$$\overline{L}\int f=\inf\{\overline{L}(f)\}\quad,\quad \underline{L}\int f=\sup\{\underline{L}(f)\}$$

حـــــيـث

$\overline{L}\int f$ يقرا بتكامل ليبيك الأعلى للدالة f على الفترة Ω ،

$\underline{L}\int f$ يقرا بتكامل ليبيك الأسفل للدالة f على الفترة Ω .

وبسهولة نستطيع أن نبرهن $\underline{L}\int f \le \overline{L}\int f$

الآن نأتي إلى تعريف تكامل ليبيك

تعريف(2.2.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في R ، $f:\Omega \to R$ دالة مقيدة. يقال عن الدالة f بأنها قابلة للتكامل (Integrable) ليبيكيا على المجموعة Ω إذا كان $\underline{L}\int f = \overline{L}\int f$. وفي هذه الحالة تكتب القيمة المشتركة بين التكامليين الأعلى والأسفل بالرمز $L\int f$ وتسمى تكامل لبيك للدالة f على المجموعة Ω . كما سنكتب أحيانا $\int\limits_{\Omega} fd\mu$ ، يطلق على الدالة f بالدالة المكاملة (Integrand).

مثال(3.2.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ و لتكن الدالة $f:\Omega \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=b$ لكل $x\in\Omega$ (أي أن f دالة ثابتة) فان f قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω . وان

$$\int\limits_{\Omega} fd\mu = b\mu(\Omega)$$

البرهان:

لتكن P تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω

$$M_i = \sup\{f(x): x\in A_i\} = b \qquad m_i = \inf\{f(x): x\in A_i\} = b, \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\overline{L}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} b\mu(A_i) = b\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) = b\mu(\Omega),$$

$$\underline{L}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} b\mu(A_i) = b\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) = b\mu(\Omega)$$

$$\overline{L}(f) = \{b\mu(\Omega)\}, \qquad \underline{L}(f) = \{b\mu(\Omega)\}$$

$$\overline{L}\int f = \inf\{\overline{L}(f)\} = b\mu(\Omega) \quad , \quad \underline{L}\int f = \sup\{\underline{L}(f)\} = b\mu(\Omega)$$

وعليه ، فان f قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω وان

$$\int\limits_{\Omega} fd\mu = b\mu(\Omega)$$

مبرهنة(3.2.4)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للتكامل الريماني فأنها قابلة للتكامل الليبيكي وان $\int\limits_{[a,b]} fd\mu = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

البرهان:

بما أن الفترة $[a,b]$ مجموعة قابلة للقياس وان كل تجزئة ريمانية للفترة $[a,b]$ تكون ليبيكية للفترة $[a,b]$ وعلية من الواضح أن $\underline{R}(f)\subseteq\underline{L}(f), \quad \overline{R}(f)\subseteq\overline{L}(f)$

$\Leftarrow \ \sup\{\underline{R}(f)\} \le \sup\{\underline{L}(f)\} \ \Leftarrow \ \underline{R}\int f \le \underline{L}\int f$ وكذلك $\inf\{\overline{R}(f)\} \ge \inf\{\overline{L}(f)\} \ \Leftarrow \ \overline{R}\int f \ge \overline{L}\int f$

بما أن $\underline{L}\int f \le \overline{L}\int f$ نصل على

$$\underline{R}\int f \le \underline{L}\int f \le \overline{L}\int f \le \overline{R}\int f$$

بما أن $\underline{R}\int f \le \overline{R}\int f$ لان الدالة قابلة للتكامل ريمانيا وعليه $\underline{L}\int f = \overline{L}\int f$

ملاحظــة

أن المبرهنة أعلاه تبين أن التكامل الليبيكي هو امتداد للتكامل الريماني للدوال المقيدة المعرفة على فترات مغلقة .وان مجموعة الدوال المقيدة المعرفة على فترة مغلقة والقابلة للتكامل ريمانيا هي مجموعة جزئية من مجموعة جزئية من مجموعة الدوال المقيدة والمعرفة على نفس الفترة والتي تكون قابلة للتكامل ليبيكيا . أي أن $R\text{I}[a,b] \subseteq L\text{I}[a,b]$.
والمثال التالي يبين أن $R\text{I}[a,b] \ne L\text{I}[a,b]$ ، أي أن إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي فانه ليس من الضروري أن تكون قابلة للتكامل الريماني

مثال(5.2.4)

لتكن الدالة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} -3, & x \in [a,b] \cap Q \\ 2, & x \in [a,b] \cap Q^c \end{cases}$$

لاحظ أن الدالة f مقيدة وغير قابلة للتكامل الريماني (راجع المثال في محاضرة تكامل ريمان)

لتكن A_1 تمثل مجموعة الأعداد النسبية في الفترة $[a,b]$ و A_2 تمثل مجموعة الأعداد غير النسبية في الفترة $[a,b]$

فان $P = \{A_1, A_2\}$ تمثل تجزئة ليبيكية للفترة $[a,b]$ وان $\mu(A_1) = 0, \quad \mu(A_2) = b-a$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in A_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in A_i\}, \quad i = 1,2$$

$$M_1 = -3, \quad M_2 = 2, \quad m_1 = -3, \quad m_2 = 2$$

$$\overline{L}(f,P) = \sum_{i=}^{2} M_i \mu(A_i) = -3(0) + 2(b-a) = 2(b-a),$$

$$\underline{L}(f,P) = \sum_{i=1}^{2} m_i \mu(A_i) = -3(0) + 2(b-a) = 2(b-a)$$

$$\overline{L}\int f = \inf\{\overline{L}(f)\} \le 2(b-a) \quad , \quad \underline{L}\int f = \sup\{\underline{L}(f)\} \ge 2(b-a)$$

ولكن $\underline{L}\int f \le \overline{L}\int f$ وعليه $2(b-a) \le \underline{L}\int f \le \overline{L}\int f \le 2(b-a)$ وهكذا فان $\underline{L}\int f = \overline{L}\int f$.وعليه الدالة f قابلة للتكامل ليبيكيا على الفترة $[a,b]$.

المبرهنة التالية تبين الشرط الضروري والكافي لكي تكون الدالة المقيدة قابلة للتكامل الليبيكي :

مبرهنـــة (6.2.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، $f:\Omega \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة فان f تكون قابلة للتكامل ليبيكيا على المجموعة Ω إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ توجد تجزئة ليبيكية P للمجموعة Ω بحيث أن

$$\overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) < \varepsilon$$

البرهان :

نفرض الدالة f قابلة للتكامل ليبيكيا على المجموعة Ω ، أي أن $\underline{L}\int f = \overline{L}\int f$

ليكن $£ > 0$

بما أن $\underline{L}\int f = \sup\{\underline{L}(f)\}$, $\overline{L}\int f = \inf\{\overline{L}(f)\}$

باستخدام تعريف inf توجد تجزئة ليبيكية P_1 للمجموعة Ω بحيث أن $\overline{L}(f,P_1) - \overline{L}\int f < \frac{£}{2}$

وكذلك باستخدام تعريف sup توجد تجزئة ليبيكية P_2 للمجموعة Ω بحيث أن $\underline{L}\int f - \underline{L}(f,P_2) < \frac{£}{2}$

نضع $P = P_1 \cap P_2$ يجب أن نبرهن على أن : $\overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) < £$

بما أن P تنعيم إلى كل من P_1 ، P_2 فان $\underline{L}(f,P) \geq \underline{L}(f,P_2)$, $\overline{L}(f,P) \leq \overline{L}(f,P_1)$,

$$\overline{L}(f,P) - \overline{L}\int f \leq \overline{L}(f,P_1) - \overline{L}\int f < \frac{£}{2}, \qquad \underline{L}\int f - \underline{L}(f,P) \leq \underline{L}\int f - \underline{L}(f,P_2) < \frac{£}{2}$$

بما أن $\underline{L}\int f = \overline{L}\int f \Leftarrow L\int f - \underline{L}(f,P) < \frac{£}{2}$, $\overline{L}(f,P) - L\int f < \frac{£}{2}$, وعليه

$$\overline{L}(f,P) - L\int f + L\int f - \underline{L}(f,P) < \frac{£}{2} + \frac{£}{2} = £$$

$$\Leftarrow \quad \overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) < £$$

الاتجاه الأخر: نفرض لكل $£ > 0$ توجد تجزئة ليبيكية P للمجموعة Ω بحيث أن

$$\overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) < £$$

بما أن كل تجزئة ليبيكية P للمجموعة Ω نحصل على $\underline{L}\int f \geq \underline{L}(f,P)$, $\overline{L}\int f \leq \overline{L}(f,P)$ وعليه

$$\overline{L}\int f - \underline{L}\int f \leq \overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) < £$$

بحيث أن $\underline{L}\int f \leq \overline{L}\int f \Leftarrow 0 \leq \overline{L}\int f - \underline{L}\int f \Leftarrow 0 \leq \overline{L}\int f - \underline{L}\int f < £$ لكل $£ > 0$ وعليه $\underline{L}\int f = \overline{L}\int f$

3.4 الخواص الأولية لتكامل ليبيك Elementary Properties of Lebesgue Integral

مبرهنـــة (1.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، لتكن الدوال $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ مقيدة وقابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω. إذا كان $~,\quad \in \mathbb{R}$ بحيث إن $~ \leq f(x) \leq \quad$ لكل $x \in \Omega$ ، فان

$$~«(\Omega) \leq \int_{\Omega} fd« \leq \quad «(\Omega)$$

وبصورة خاصة : إذا كانت $f \geq 0$ فان $\int_{\Omega} fd« \geq 0$

البرهان:

لتكن $P = \{A_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω. فان $~«(\Omega) \leq \underline{L}(f,P) \leq \overline{L}(f,P) \leq \quad «(\Omega)$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل ليبيكيا على المجموعة Ω ، أي أن $\underline{L}\int f = \overline{L}\int f = \int_{\Omega} fd«$

$$\Leftarrow \int_{\Omega} fd« = \underline{L}\int f \geq ~«(\Omega) \quad \Leftarrow \quad ~«(\Omega) \leq \int_{\Omega} fd«$$ وكذلك $$\int_{\Omega} fd« = \overline{L}\int f \leq \quad «(\Omega) \quad \Leftarrow \quad \int_{\Omega} fd« \leq \quad «(\Omega)$$

وعليه $\text{~«}(\Omega) \le \int_{\Omega} fd\text{«} \le \text{«}(\Omega)$.

أما بالنسبة للجزء الأخر، نأخذ $\text{~} = 0$ أو برهن بدون استخدام الجزء الأول.

بما أن $f(x) \ge 0$ لكل $x \in \Omega$ $\Leftarrow$ $\underline{L}(f,P) \ge 0$ لكل تجزئة ليبيكية P للمجموعة Ω $\Leftarrow$ $\underline{L}\int f \ge 0$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω $\Leftarrow$ $\int_{\Omega} fd\text{«} = \overline{L}\int f = \underline{L}\int f$ $\Leftarrow$ $\int_{\Omega} fd\text{«} \ge 0$

مبرهنة (2.3.4)

لتكن Ω مجموعة مهملة في $\mathbb{R}$،فان الدالة المقيدة $f:\Omega \to \mathbb{R}$ تكون قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω وان
$$\int_{\Omega} fd\text{«} = 0$$

البرهان:

لتكن $P = \{A_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω. $\Leftarrow$ $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

بما أن Ω مجموعة مهملة $\Leftarrow$ A_i مجموعة مهملة لكل $i = 1,2,\cdots,n$ $\Leftarrow$ $\text{«}(A_i) = 0$ لكل $i = 1,2,\cdots,n$

وعليه
$$\overline{L}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \text{«}(A_i) = 0, \quad \underline{L}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{«}(A_i) = 0$$

فان $\overline{L}\int f = 0$ و $\underline{L}\int f = 0$ وعليه الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω وان $\int_{\Omega} fd\text{«} = 0$

مبرهنة (3.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$، لتكن A, B مجموعتين جزئيتين متنافيتين من Ω بحيث أن كلا منهما قابلة للقياس $\Omega = A \cup B$. إذا كانت الدالة $f:\Omega \to R$ مقيدة وقابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω ، فان الدالة f تكون قابلة للتكامل الليبيكي على كل من A و B وان
$$\int_{\Omega} fd\text{«} = \int_{A} fd\text{«} + \int_{B} fd\text{«}$$

البرهان:

ليكن $\text{£} > 0$، بما أن الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω

$\Leftarrow$ توجد تجزئة ليبيكية $P = \{C_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ للمجموعة Ω بحيث أن
$$\int_{\Omega} fd\text{«} - \text{£} < \underline{L}(f,P) \text{ ، } \overline{L}(f,P) < \int_{\Omega} fd\text{«} + \text{£}$$

نضع
$$A_i = C_i \cap A, \qquad B_i = C_i \cap B$$

وبسهولة يمكن أن نثبت أن $P_1 = \{A_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة A وكذلك $P_2 = \{B_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة B

نعرف $f_1 : A \to R$ بالصيغة $f_1(x) = f(x)$ لكل $x \in A$ وكذلك $f_2 : B \to R$ بالصيغة $f_2(x) = f(x)$ لكل $x \in B$

من الواضح أيضا $\underline{L}(f,P) = \underline{L}(f_1,P_1) + \underline{L}(f_2,P_2)$ وكذلك $\overline{L}(f,P) = \overline{L}(f_1,P_1) + \overline{L}(f_2,P_2)$

وعليه

$$\int_{\Omega} f d\mu - \varepsilon < \underline{L}(f,P) = \underline{L}(f_1,P_1) + \underline{L}(f_2,P_2) \le \underline{L}\int_A f + \underline{L}\int_B f$$

وكذلك $\overline{L}\int_A f + \overline{L}\int_B f \le \overline{L}(f_1,P_1) + \overline{L}(f_2,P_2) = \overline{L}(f,P) < \int_{\Omega} f d\mu + \varepsilon$

ولهذا $\int_{\Omega} f d\mu - \varepsilon < \underline{L}\int_A f + \underline{L}\int_B f \le \overline{L}\int_A f + \overline{L}\int_B f \le \int_{\Omega} f d\mu + \varepsilon$

وبما أن هذه العلاقة تتحقق لكل $\varepsilon > 0$ نستنتج أن

$$\int_{\Omega} f d\mu \le \underline{L}\int_A f + \underline{L}\int_B f \le \overline{L}\int_A f + \overline{L}\int_B f \le \int_{\Omega} f d\mu$$

وعليه $\underline{L}\int_A f + \underline{L}\int_B f = \overline{L}\int_A f + \overline{L}\int_B f$

ولكن $\underline{L}\int_A f \le \overline{L}\int_A f$ و $\underline{L}\int_B f \le \overline{L}\int_B f$ وعليه $\underline{L}\int_A f = \overline{L}\int_A f$ و $\underline{L}\int_B f = \overline{L}\int_B f$

وهكذا فان الدالة f قابلة للتكامل على كل من A و B وان $\int_{\Omega} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

نتيجة(4.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، لتكن A مجموعة جزئية من Ω وقابلة للقياس . إذا كانت الدالة $f:\Omega \to \mathbb{R}$ مقيدة وقابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω ، فان الدالة f تكون قابلة للتكامل الليبيكي على A

البرهان:

لتكن $B = A^c \Leftarrow$ كل من A و B قابلة للقياس وان $\Omega = A \cup B$ وعليه الدالة f قابلة للتكامل على كل من A و B .

نتيجة(5.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، لتكن $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعات جزئية متنافية مثنى مثنى من Ω بحيث أن كلا متهما قابلة للقياس $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. إذا كانت الدالة $f:\Omega \to \mathbb{R}$ مقيدة وقابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω ، فان الدالة f تكون قابلة للتكامل الليبيكي على كل من A_i وان $\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f d\mu$ (البرهان: باستخدام الاستقراء الرياضي)

مبرهنـــة (6.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، لتكن $\{A_n\}$ متتابعة من المجموعات الجزئية المتنافية مثنى مثنى من Ω بحيث أن كلا متهما قابلة للقياس وان $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. إذا كانت الدالة $f:\Omega \to \mathbb{R}$ مقيدة وقابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω ، فان الدالة f تكون قابلة للتكامل الليبيكي على كل من A_n وان

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

البرهان:

إذا كانت المتتابعة $\{A_n\}$ منتهية ، فنحصل على النتيجة السابقة. ولهذا سنفرض أن المتتابعة $\{A_n\}$ غير منتهية لكل قيم n . نضع $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ وكذلك $C_n = \Omega \mid B_n$. لاحظ أن كل من B_n ، C_n مجموعة قابلة للقياس وكذلك

$B_n \subseteq B_{n+1}, \quad C_n \subseteq C_{n+1}$ لكل قيم n. حسب المبرهنة السابقة نحصل على أن الدالة f تكون قابلة للتكامل الليبيكي على كل من B_n ، C_n وان $\int_{\Omega} fd\mu = \int_{B_n} fd\mu + \int_{C_n} fd\mu$ بحيث أن $\int_{B_n} fd\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} fd\mu$

الآن: يجب أن نبرهن أن المتتابعة $\{\int_{B_n} fd\mu\}$ تقترب الى $\mu(\Omega)$. أي علينا أن نبرهن على أن المتتابعة $\{\int_{C_n} fd\mu\}$ تقترب إلى 0.

بما أن الدالة f مقيدة ، فانه يوجد $M > 0$ بحيث أن $|f(x)| \le M$ لكل $x \in \Omega$. وعليه $-M \le f(x) \le M$ لكل $x \in \Omega$

وعليه باستخدام المبرهنة (1.3.4) نحصل على

$$-M\mu(C_n) \le \int_{C_n} fd\mu \le M\mu(C_n)$$

أي أن $\left|\int_{C_n} fd\mu\right| \le M\mu(C_n)$ ، من جهة أخرى $\mu(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(B_n) + \mu(C_n)$.

وهذا يعني أن المتتابعة $\{\mu(B_n)\}$ تقترب إلى $\mu(\Omega)$ ، أي أن المتتابعة $\{\mu(C_n)\}$ تقترب إلى الصفر.

وعليه لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $\mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{M}$ لكل $n > k$.

بما أن $\left|\int_{C_n} fd\mu\right| \le M\mu(C_n)$ وعليه $\left|\int_{C_n} fd\mu\right| < \varepsilon$ وهذا يبين أن $\int_{C_n} fd\mu \to 0$ وبالتالي فان المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} fd\mu$ متقاربة وان $\int_{\Omega} fd\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} fd\mu$.

مبرهنـــة (7.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في R ، لتكن A, B مجموعتين جزئيتين متنافيتين من Ω بحيث أن كلا منهما قابلة للقياس وان $\Omega = A \cup B$. إذا كانت الدالة المقيدة $f : \Omega \to R$ قابلة للتكامل الليبيكي على كل من A و B ، فان الدالة f تكون قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω وان

$$\int_{\Omega} fd\mu = \int_{A} fd\mu + \int_{B} fd\mu$$

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$. بما أن الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على كل من A و B

$\Leftarrow$ توجد تجزئة ليبيكية $P_1 = \{A_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ للمجموعة A بحيث أن

$$\int_{A} fd\mu - \varepsilon < \underline{L}(f_1, P_1) \text{ ، } \overline{L}(f_1, P_1) < \int_{A} fd\mu + \varepsilon$$

حيث $f_1 : A \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بالصيغة $f_1(x) = f(x)$ لكل $x \in A$

وكذلك توجد تجزئة ليبيكية $P_2 = \{B_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ للمجموعة B بحيث أن

$$\int_{B} fd\mu - \varepsilon < \underline{L}(f_2, P_2) \text{ ، } \overline{L}(f_2, P_2) < \int_{B} fd\mu + \varepsilon$$

حيث $f_2 : B \to \mathbb{R}$ دالة معرفة بالصيغة $f_2(x) = f(x)$ لكل $x \in B$. نضع $P = P_1 \cap P_2$

من الواضح أيضا $\underline{L}(f, P) = \underline{L}(f_1, P_1) + \underline{L}(f_2, P_2)$ وكذلك $\overline{L}(f, P) = \overline{L}(f_1, P_1) + \overline{L}(f_2, P_2)$

وعليه

$$\overline{L}\int_{\Omega} f \le \underline{L}(f,P) < \int_{A} fd\mu + \int_{B} fd\mu + 2\varepsilon \quad \text{و} \quad \int_{A} fd\mu + \int_{B} fd\mu - 2\varepsilon < \underline{L}(f,P) \le \underline{L}\int_{\Omega} f$$

وهكذا فان

$$\int_{A} fd\mu + \int_{B} fd\mu - 2\varepsilon \le \int_{\Omega} fd\mu \le \int_{A} fd\mu + \int_{B} fd\mu + 2\varepsilon$$

بما أن هذه العلاقة تتحقق لجميع قيم $\varepsilon > 0$ ينتج أن

$$\underline{L}\int_{\Omega} f = \overline{L}\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} fd\mu = \int_{A} fd\mu + \int_{B} fd\mu$$

وهكذا فان الدالة f قابلة للتكامل على المجموعة Ω وان $\int_{\Omega} fd\mu = \int_{A} fd\mu + \int_{B} fd\mu$

مبرهنـــة (8.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. إذا كانت الدالة المقيدة $f:\Omega\to\mathbb{R}$ قابلة للتكامل الليبيكي على Ω .
فان، لكل $\alpha\in\mathbb{R}$ ، تكون الدالة αf قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وان

$$\int_{\Omega} \alpha fd\mu = \alpha\int_{\Omega} fd\mu$$

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$ ، بما أن الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω، توجد تجزئة ليبيكية $P=\{A_i : i=1,2,\cdots,n\}$ للمجموعة Ω بحيث أن $\overline{L}(f,P) < \int_{\Omega} fd\mu + \varepsilon$ ، $\int_{\Omega} fd\mu - \varepsilon < \underline{L}(f,P)$

- إذا كانت $\alpha > 0$ ، فان لكل تجزئة P للمجموعة Ω نحصل على

$$\overline{L}(\alpha f,P) = \alpha\overline{L}(f,P) \qquad \underline{L}(\alpha f,P) = \alpha\underline{L}(f,P)$$

$$\alpha\int_{\Omega} fd\mu - \alpha\varepsilon = \alpha\left(\int_{\Omega} fd\mu - \varepsilon\right) \le \alpha\underline{L}(f,P) = \underline{L}(\alpha f,P) \le \underline{L}\int(\alpha f)$$

$$\overline{L}\int(\alpha f) \le \overline{L}(\alpha f,P) = \alpha\overline{L}(f,P) \le \alpha\left(\int_{\Omega} fd\mu + \varepsilon\right) = \alpha\int_{\Omega} fd\mu + \alpha\varepsilon$$

بما أن المتراجحات أعلاه تتحقق لكل $\varepsilon > 0$ ينتج أن :

$$\alpha\int_{\Omega} fd\mu < \underline{L}\int(\alpha f) < \overline{L}\int(\alpha f) < \alpha\int_{\Omega} fd\mu$$

ومن هذا نستنتج أن

$$\int_{\Omega}(\alpha f)d\mu = \alpha\int_{\Omega} fd\mu$$

- إذا كانت $\alpha < 0$ ، فان لكل تجزئة P للمجموعة Ω نحصل على

$$\overline{L}(\alpha f,P) = \alpha\underline{L}(f,P) \qquad \underline{L}(\alpha f,P) = \alpha\overline{L}(f,P)$$

$$\alpha\int_{\Omega} fd\mu + \alpha\varepsilon = \alpha\left(\int_{\Omega} fd\mu + \varepsilon\right) \le \alpha\overline{L}(f,P) = \underline{L}(\alpha f,P) \le \underline{L}\int(\alpha f)$$

$$\overline{L}\int(\alpha f) \le \overline{L}(\alpha f,P) = \alpha\underline{L}(f,P) < \alpha\left(\int_{\Omega} fd\mu - \varepsilon\right) = \alpha\int_{\Omega} fd\mu - \alpha\varepsilon$$

ومن هذا نستنتج أن

$$\int_{\Omega} (ª\ f)d« = ª\int_{\Omega} fd«$$

مبرهنـــة (9.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. إذا كانت كل من $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الليبيكي على Ω . فان الدالة $f+g$ تكون قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وان

$$\int_{\Omega} (f+g)d« = \int_{\Omega} fd« + \int_{\Omega} gd«$$

البرهان :

ليكن $£ > 0$ ، بما أن كل من f, g دالة قابلة للتكامل الليبيكي على $\Omega \Leftarrow$ توجد تجزئة P_1 للمجموعة Ω وتجزئة P_2 للمجموعة Ω بحيث أن

$$\overline{L}(f,P_1) < \int_{\Omega} fd« + £ \qquad \int_{\Omega} fd« - £ < \underline{L}(f,P_1)$$

$$\overline{L}(g,P_2) < \int_{\Omega} gd« + £ \qquad \int_{\Omega} gd« - £ < \underline{L}(g,P_2)$$

نضع $P = P_1 \cap P_2 \Leftarrow P$ تجزئة للمجموعة $\Omega \Leftarrow P = \{A_i : i = 1,2,\cdots,n\}$

$$m_i = \inf\{(f+g)(x) : x \in A_i\} \qquad m_i' = \inf\{f(x) : x \in A_i\} \qquad m_i'' = \inf\{g(x) : x \in A_i\}$$

$$M_i = \sup\{(f+g)(x) : x \in A_i\} \qquad M_i' = \sup\{f(x) : x \in A_i\} \qquad M_i'' = \sup\{g(x) : x \in A_i\}$$

$\Leftarrow m_i \ge m_i' + m_i'' \qquad M_i \le M_i' + M_i''$ و عليه نحصل على

$$\underline{L}(f,P) + \underline{L}(g,P) \le \underline{L}(f+g,P) \qquad \overline{L}(f+g,P) \le \overline{L}(f,P) + \overline{L}(g,P)$$

$\Leftarrow \underline{L}(f,P) + \underline{L}(g,P) \le \underline{L}(f+g,P) \le \overline{L}(f+g,P) \le \overline{L}(f,P) + \overline{L}(g,P)$ فان

$$\overline{L}(f+g,P) - \underline{L}(f+g,P) \le \overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) + \overline{L}(g,P) - \underline{L}(g,P)$$

ولكن $\overline{L}(g,P_2) - \underline{L}(g,P_2) < \dfrac{£}{2} \qquad \overline{L}(f,P_1) - \underline{L}(f,P_1) < \dfrac{£}{2}$ فان $\overline{L}(f+g,P) - \underline{L}(f+g,P) < £$

$\Leftarrow f+g$ قابلة للتكامل الليبيكي على Ω، وأكثر من ذلك

$$\underline{L}\int f + \underline{L}\int g - 2£ < \underline{L}(f,P_1) + \underline{L}(g,P_2) \le \underline{L}(f,P) + \underline{L}(g,P) \le \underline{L}(f+g,P) \le \underline{L}\int (f+g)$$

$\Leftarrow \underline{L}\int f + \underline{L}\int g - 2£ \le \underline{L}\int (f+g)$ وبالمثل نبرهن $\overline{L}\int (f+g) \le \overline{L}\int f + \overline{L}\int g + 2£$ وعليه

$$\underline{L}\int f + \underline{L}\int g - 2£ \le \underline{L}\int (f+g) \le \overline{L}\int (f+g) \le \overline{L}\int f + \overline{L}\int g + 2£$$

بما أن $£$ أي عدد موجب، فان

$$\underline{L}\int f + \underline{L}\int g \le \underline{L}\int (f+g) \le \overline{L}\int (f+g) \le \overline{L}\int f + \overline{L}\int g$$

بما أن كل من f, g دالة قابلة للتكامل الليبيكي على $\Omega \Leftarrow \int_{\Omega} fd« = \overline{L}\int f = \underline{L}\int f$ و $\Leftarrow \int_{\Omega} fd« = \overline{L}\int g = \underline{L}\int g$

وعليه $\int_{\Omega} fd« + \int_{\Omega} gd« \le \underline{L}\int (f+g) \le \overline{L}\int (f+g) \le \int_{\Omega} fd« + \int_{\Omega} gd« \Leftarrow \int_{\Omega} (f+g)d« = \int_{\Omega} fd« + \int_{\Omega} gd«$.

نتيجة (10.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. إذا كانت كل من $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الليبيكي على Ω ولتكن $ª, ~ \in \mathbb{R}$. فان الدالة $ªf + ~g$. تكون قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وان

$$\int_{\Omega}(\sim f+\sim g)d« = \sim\int_{\Omega} fd« + \sim\int_{\Omega} gd«$$

وبصورة عامة : إذا كانت كل من $f_1, f_2, \cdots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الليبيكي على Ω ولتكن $\sim_1, \sim_2, \cdots, \sim_n \in \mathbb{R}$. فان الدالة $\sim_1 f_2 + \sim_2 f_2 + \cdots \sim_n f_n$. تكون قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وان

$$\int_{\Omega}(\sum_{i=1}^{n}\sim_i f_i)d« = \sum_{i=1}^{n}\sim_i\int_{\Omega} f_i d«$$

نتيجة (11.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$ ، إذا كانت كل من $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وكانت $f \le g$ (أي أن $f(x) \le g(x)$ لكل $x \in \Omega$) فان $\int_{\Omega} fd« \le \int_{\Omega} gd«$

البرهان:

نضع $h = g - f$

بما أن $f(x) \le g(x)$ لكل $x \in \Omega$ $\Leftarrow$ $h(x) \ge 0$ لكل $x \in \Omega$ وعليه $\int_{\Omega} hd« \ge 0$

ولكن $\int_{\Omega} gd« - \int_{\Omega} fd« = \int_{\Omega}(g-f)d« = \int_{\Omega} hd« \ge 0$ $\Leftarrow$ $\int_{\Omega} gd« - \int_{\Omega} fd« \ge 0$ $\Leftarrow$ $\int_{\Omega} fd« \le \int_{\Omega} gd«$

مبرهنة (12.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. إذا كانت $f : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة قابلة للتكامل الليبيكي على Ω فان الدالة $|f|$ قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وان $\left|\int_{\Omega} fd«\right| \le \int_{\Omega}|f|d«$

البرهان:

ليكن $£ > 0$

بما أن الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω ، فانه توجد تجزئة ليبيكية $P = \{A_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ للمجموعة Ω بحيث أن $\overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) < £$

$m_i = \inf\{f(x) : x \in A_i\}$ $\qquad m'_i = \inf\{|f(x)| : x \in A_i\}$

$M_i = \sup\{f(x) : x \in A_i\}$ $\qquad M'_i = \sup\{|f(x)| : x \in A_i\}$

$\Leftarrow$ $M'_i - m'_i \le M_i - m_i$ و عليه نحصل على

$$\overline{L}(|f|,P) - \underline{L}(|f|,P) \le \overline{L}(f,P) - \underline{L}(f,P) < £$$

وعليه الدالة $|f|$ تكون قابلة للتكامل الليبيكي على Ω

بما أن $-|f| \le f \le |f|$ $\Leftarrow$ $-\int_{\Omega}|f|d« \le \int_{\Omega} fd« \le \int_{\Omega}|f|d«$ $\Leftarrow$ $\left|\int_{\Omega} fd«\right| \le \int_{\Omega}|f|d«$

ملاحظة

إذا كانت $f : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة وكانت الدالة $|f|$ قابلة للتكامل الليبيكي على Ω ، فانه ليس من الضروري أن تكون الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω .

مبرهنة (13.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة في $\mathbb{R}$. إذا كانت الدالة $f:\Omega\to\mathbb{R}$ مقيدة وقابلة للقياس فإنها قابلة للتكامل الليبيكي على Ω

البرهان :

بما أن الدالة f مقيدة ، فانه يوجد $M>0$ بحيث أن $|f(x)|\le M$ لكل $x\in\Omega$. وعليه $-M\le f(x)\le M$ لكل $x\in\Omega$.

لكل عدد صحيح موجب n ، لتكن P_n تجزئة للفترة $[-M,M]$ مكونة من n من الفترات الجزئية المتساوية الطول .

$$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}=\frac{M+M}{n}=\frac{2M}{n} \quad \text{لكل} \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$x_i=a+i\frac{b-a}{n}=-M+i\frac{2M}{n},\qquad i=1,2,\cdots,n$$

لكل i. نضع $A_i=f([x_{i-1},x_i))$ $\Leftarrow$ A_i مجموعة جزئية من Ω وان $A_i\cap A_j=\emptyset$ لكل $i\neq j$ وكذلك $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

بما أن الدالة f قابلة للقياس ، فان المجموعة A_i قابلة للقياس لكل $i=1,2,\cdots,n$ ، وعليه $Q_n=\{A_i:i=1,2,\cdots,n\}$ تجزئة ليبيكية للمجموعة Ω. الآن:

$$\overline{L}(f,Q_n)-\underline{L}(f,Q_n)=\sum_{i=1}^{n}M_i\mu(A_i)-\sum_{i=1}^{n}m_i\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\mu(A_i)$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\frac{2M}{n}\mu(A_i)=\frac{2M}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)=\frac{2M}{n}\mu(\Omega)$$

ليكن $\varepsilon>0$ ، يوجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $\frac{2M}{k}\mu(\Omega)<\varepsilon$ و عليه $\overline{L}(f,Q_n)-\underline{L}(f,Q_n)<\varepsilon$

ومنها ينتج أن الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω.

الآن : **نتطرق إلى بعض المبرهنات التي توضح إحدى الميزات المهمة لتكامل ليبيك**

مبرهنة (14.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. إذا كانت كل من $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة

(1) إذا كانت $f=0\quad a.e.$ فان الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وان $\int_{\Omega}fd\mu=0$

(2) إذا كانت $f=g\quad a.e.$ وكانت الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω ، فان الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وان $\int_{\Omega}fd\mu=\int_{\Omega}gd\mu$

(3) إذا كانت $f\ge 0\quad a.e.$ فان $\int_{\Omega}fd\mu\ge 0$

(4) إذا كانت $f\ge g\quad a.e.$ فان $\int_{\Omega}fd\mu\ge\int_{\Omega}gd\mu$

البرهان :

(1)

بما أن $f=0\quad a.e.$ ، فانه توجد $A\subseteq\Omega$ بحيث أن $\mu(A)=0$ وان $f(x)=0$ لكل $x\notin A$

بما أن المجموعة A قابلة للقياس $\Leftarrow$ A^c مجموعة قابلة للقياس وان $\int_{A^c}fd\mu=0\cdot\mu(A^c)=0$ (راجع المثال 11)

وباستخدام المبرهنة (2.3.4) نحصل على $\int_A fd\mu = 0$ وباستخدام المبرهنة (17.4) نحصل على

$$\int_\Omega fd\mu = \int_A fd\mu + \int_{A^c} fd\mu = 0 + 0 = 0$$

(2)

لكل $x \in \Omega$ ، نضع $h(x) = f(x) - g(x) \quad \Leftarrow \quad h$ دالة مقيدة على Ω .

بما أن $f = g \quad a.e.$ ، فانه $h(x) = 0 \quad a.e.$ وعليه $\int_\Omega hd\mu = 0$

بما أن $g = f - h \quad \Leftarrow$ الدالة g قابلة للتكامل الليبيكي على Ω وان $\int_\Omega gd\mu = \int_\Omega fd\mu - \int_\Omega hd\mu = \int_\Omega fd\mu$

مبرهنة (15.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. إذا كانت كل من $f , g : \Omega \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة وقابلة للقياس فان

(1) إذا كانت $f \geq 0$ وكانت $\int_\Omega fd\mu = 0$ فان $f = 0 \quad a.e.$

(2) إذا كانت $f \geq g$ و $\int_\Omega fd\mu = \int_\Omega fd\mu$ فان $f = g \quad a.e.$

البرهان :

(1)

باستخدام المبرهنة (13.3.4) تكون الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω .

لكل عدد صحيح موجب n ، نضع $A_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$

بما أن الدالة f قابلة للقياس ، فان المجموعة A_n قابلة للقياس لكل قيم n وعليه المجموعة $\Omega | A_n$ قابلة للقياس لكل قيم n . وكذلك بما أن الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على Ω . باستخدام المبرهنة (3.3.4) تكون الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على كل من A_n ، $\Omega | A_n$ وان

$$\int_\Omega fd\mu = \int_{A_n} fd\mu + \int_{\Omega|A_n} fd\mu$$

بما أن $\int_\Omega fd\mu = 0$ فان $\int_{A_n} fd\mu + \int_{\Omega|A_n} fd\mu = 0$

بما أن $f \geq 0$ فان $\int_\Omega fd\mu \geq 0$ (حسب مبرهنة 1.3.4)

وكذلك بما أن $f \geq \frac{1}{n}$ على A_n فان $\int_{A_n} fd\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n)$ (حسب مبرهنة 15) وعليه

$$0 = \int_{A_n} fd\mu + \int_{\Omega|A_n} fd\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n) \geq 0$$

فان $\mu(A_n) = 0$ لكل قيم n

لتكن $A = \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$ ، بما أن الدالة f قابلة للقياس ، فان المجموعة A قابلة للقياس. باستخدام خاصية ارخميدس نحصل على $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. بما أن $A_n \subseteq A_{n+1}$ لكل قيم n ، فان $\mu(A_n) \to \mu(A)$

وبما أن $\mu(A_n) = 0$ لكل قيم n فان $\mu(A) = 0$. من الواضح أن $f(x) = 0$ لكل $x \notin A$ وعليه $f = 0 \quad a.e.$

ملاحظــة

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. سنرمز لمجموعة الدوال المقيدة القابلة للتكامل الليبيكي على Ω بالرمز $SI(\Omega)$. ويمكن إثبات أن $SI(\Omega)$ فضاء متجهات بالنسبة إلى عمليات الجمع الاعتيادية والضرب بثابت على الدوال والضرب بعدد . (راجع المبرهنتين 8.3.4 ، 9.3.4) وبعبارة أخرى .

إذا كان $f, g \in SI(\Omega)$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فــان $\alpha f + \beta g \in SI(\Omega)$

(1) دالة خطية (راجع النتيجة 9.3.4)، أي أن الدالة $\int : SI(\Omega) \to \mathbb{R}$ خطية، بعبارة أخرى

إذا كانت $f, g \in SI(\Omega)$ ، $\alpha, \beta \in R$ فــان

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_\Omega f\, d\mu + \beta \int_\Omega g\, d\mu$$

(2) دالة رتيبة (راجع النتيجة 10.3.4) ، أي أن الدالة $\int : SI(\Omega) \to \mathbb{R}$ رتيبة ، بعبارة أخرى

إذا كانت $f, g \in SI(\Omega)$ بحيث أن $f \le g$ فان $\int_\Omega f\, d\mu \le \int_\Omega g\, d\mu$

(3) دالة غير متباينة ، أي أن الدالة $\int : SI(\Omega) \to \mathbb{R}$ غير متباينة ، بعبارة أخرى

إذا كانت $f, g \in SI(\Omega)$ بحيث أن $\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu$ فانه ليس من الضروري أن يكون $f = g$.

ملاحظة

إذا كانت $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال المقيدة القابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω وكانت $f_n \to f$ فانه ليس من الضروري أن تكون f قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω

مبرهنة(16.3.4)

لتكن Ω مجموعة مقيدة و قابلة للقياس في $\mathbb{R}$. إذا كانت $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال المقيدة القابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω وكانت $f_n \xrightarrow{u} f$ فان الدالة f قابلة للتكامل الليبيكي على المجموعة Ω وان

$$\int_\Omega f_n\, d\mu \to \int_\Omega f\, d\mu$$

أي أن

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$$

5. الدوال مقيدة التغاير Functions of Bonded Variation

1.5 مفاهيم أساسية Fundamental Concepts

قبل أن نتطرق إلى الدوال الحقيقية مقيدة التغاير، نستذكر الدوال المستمرة ، الدوال الرتيبة والدوال المقيدة.

تعريف(1.1.5)

لتكن D مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ولتكن $f : D \to \mathbb{R}$ دالة ، يقال عن العدد L بأنة

- غاية للدالة f عند النقطة $a \in D$ إذا كان لكل £ > 0 ، يوجد ¢ > 0 بحيث أن لكل $x \in D$ يتحقق الشرط الأتي :

$|x-a| <$ ¢ يؤدي إلى $|f(x)-L| <$ £

وتكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

- غاية من جهة اليمين(Right-Hand Limit) للدالة f عند النقطة $a \in D$ إذا كان لكل £ > 0 ، يوجد ¢ > 0 بحيث أن لكل $x \in D$ يتحقق الشرط الأتي :

$a < x < a +$ ¢ يؤدي إلى $|f(x)-L| <$ £

وتكتب $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$. بعبارة أخرى $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = L$ حيث $h > 0$ ويرمز له أحيانا بالرمز $f(a^+)$ ، أي أن

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = L, \quad h > 0$$

- غاية من جهة اليسار(Left-Hand Limit) للدالة f عند النقطة $a \in D$ إذا كان لكل £ > 0 ، يوجد ¢ > 0 بحيث أن لكل $x \in D$ يتحقق الشرط الأتي :

$a -$ ¢ $< x < a$ يؤدي إلى $|f(x)-L| <$ £

وتكتب $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$. بعبارة أخرى $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h),$ حيث $h < 0$ ويرمز له أحيانا بالرمز $f(a^-)$ ، أي أن

$$f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = L, \quad h < 0$$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ وكذلك $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

تعريف (1.2.5)

لتكن D مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. يقال عن الدالة $f : D \to \mathbb{R}$ بأنها

- مستمرة (Continuous) عند النقطة $a \in D$ إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. الدالة تكون مستمرة f إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل من نقط من نقاط D .
- مستمرة من اليمين (Right Continuous) عند النقطة $a \in D$ إذا كان $f(a^+) = f(a)$
- مستمرة من اليسار (Left Continuous)عند النقطة $a \in D$ إذا كان $f(a^-) = f(a)$

▌الدالة f تكون مستمرة عند النقطة $a \in D$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة من اليمين و مستمرة من اليسار.

ويقال عن الدالة f بأنها غير مستمرة ذات طفرة (Jump Discontinuous) عند النقطة $a \in D$ إذا كان

(1) كل من $f(a^+)$ ، $f(a^-)$ موجودة (2) $f(a) \neq f(a^+) \neq f(a^-)$

تعريف (3.1.5)

لتكن D مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. يقال عن الدالة $f : D \to \mathbb{R}$ بأنها

(1) متزايدة (Decreasing) (أو غير متناقصة Non- decreasing)

إذا كان $x \le y$ يؤدي إلى $f(x) \le f(y)$ لكل $x, y \in D$

(2) متزايدة حديا (Strictly Increasing)

إذا كان $x < y$ يؤدي إلى $f(x) < f(y)$ لكل $x, y \in D$

(3) متناقصة (Decreasing) (غير متزايدة Non- increasing)

إذا كان $x \le y$ يؤدي إلى $f(y) \le f(x)$ لكل $x, y \in D$

(4) متناقصة حديا (Strictly Decreasing)

إذا كان $x < y$ يؤدي إلى $f(y) < f(x)$ لكل $x, y \in D$

ويقال عن f بأنها رتيبة (Monotone) إذا كانت تحقق أيا من الشروط الأربعة أعلاه.

مبرهنة(4.1.5)

إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ متزايدة فان كل من $f(c^+)$ ، $f(c^-)$ موجودة لكل $c \in (a,b)$ وان

$$f(c^-) \le f(c) \le f(c^+)$$

وعليه $f(a) \le f(a^+)$ وكذلك $f(b^-) \le f(b)$.

البرهان:

ليكن $c \in (a,b)$ ولتكن $A = \{ f(x) : a < x < b\}$ بما أن الدالة f متزايدة ، فان المجموعة A مقيدة من الأعلى بواسطة $f(c)$. بما أن R تحقق خاصية الكمال $\Leftarrow$ يوجد $\sim \in R$ بحيث $\sim = \sup A \Leftarrow \sim \le f(c)$

أولا : نبرهن $f(c^-)$ موجودة وان $f(c^-) = \sim$: يجب أن نبرهن لكل $£ > 0$ يوجد $¢ > 0$ بحيث ان

$c - ¢ < x < c$ يؤدي إلى $|f(x) - \sim| < £$

ليكن $£ > 0$ ، باستخدام تعريف sup ، يوجد $f(y) \in A$ بحيث أن $f(y) > \sim - £$ ولكن $f(y) \le \sim$ (لان $f(y) \in A$ وكذلك $\sim = \sup A$) فان $\sim - £ < f(y) \le \sim < \sim + £$ وعليه

$$|f(y) - \sim| < £$$

وعله العدد $¢ = c - y$ يحقق الخاصية. وبالمثل نبرهن $f(c^+)$ موجود وان $f(c) \le f(c^+)$.

مبرهنة(5.1.5)

لتكن D مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. إذا كانت الدالة $f : D \to \mathbb{R}$ متزايدة حديا فان f^{-1} موجودة ومتزايدة حديا على $f(D)$.

البرهان :

بما أن الدالة $f : D \to \mathbb{R}$ متزايدة حديا فأنها متباينة

وبما أن الدالة $f : D \to f(D)$ شاملة وعليها الدالة $f : D \to f(D)$ تقابلية وهذا يؤدي الى أن f^{-1} موجودة على $f(D)$

بقي أن نبرهن : الدالة f^{-1} متزايدة حديا على $f(D)$: ليكن $y_1, y_2 \in f(D)$ بحيث أن $y_1 < y_2$ ،فانه يوجد $x_1, x_2 \in D$ بحيث أن $x_1 = f^{-1}(y_1)$ ، $x_2 = f^{-1}(y_2)$. سنبرهن بطريقة التناقض نفرض $f^{-1}(y_1) \ge f^{-1}(y_2)$

$\Leftarrow x_1 \ge x_2 \Leftarrow f(x_1) \ge f(x_2) \Leftarrow y_1 \ge y_2$ وهذا تناقض.

نتيجة (6.1.5)

إذا كانت الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ متزايدة حديا ومستمرة فان f^{-1} متزايدة حديا ومستمرة على الفترة $[f(a), f(b)]$.

تعريف (7.1.5)

لتكن D مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. يقال عن الدالة $f : D \to \mathbb{R}$ بأنها مقيدة (Bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|f(x)| \le M$ لكل $x \in D$.

من السهولة أن نبرهن على أنة : إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مقيدة ومتزايدة أو متناقصة فان كل من $f(a^+), f(a^-)$ تكون موجودة لكل $a\in\mathbb{R}$. وتحت نفس الشروط للدالة $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ فان كل من $f(\infty), f(-\infty)$ موجودة وان

$$f(\infty)=\lim_{x\to\infty} f(x),\quad f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

ملاحظة

لتكن $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ .. وسنرمز لطول الفترة الجزئية $J_i=[x_{i-1},x_i]$ بالرمز Δx_i وعليه $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ وبسهولة يمكن إثبات $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$ وكذلك نرمز لمعيار التجزئة P بالرمز $\|P\|$ ويعرف بالشكل $\|P\|=\max\{\Delta x_i : i=1,2\cdots,n\}$

مبرهنة (9.1.5)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة ولتكن $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ نضع $\Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$ لكل $k=1,2,\cdots,n$ فان

(1) $\sum_{k=1}^{n}\Delta f_k=f(b)-f(a)$ (2) إذا كانت الدالة f متزايدة فان $\Delta f_k\geq 0$ لكل $k=1,2,\cdots,n$

(3) إذا كانت الدالة f متناقصة فان $\Delta f_k\leq 0$ لكل $k=1,2,\cdots,n$ (4) إذا كانت الدالة f متزايدة

$$\sum_{k=1}^{n-1}(f(x_k^+)-f(x_k^-))\leq f(b)-f(a)$$

البرهان :

(1)

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta f_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=(f(x_1)-f(x_0))+(f(x_2)-f(x_1))+\cdots+(f(x_n)-f(x_{n-1}))$$
$$=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a)$$

(2) بما أن $x_{k-1}<x_k$ لكل $k=1,2,\cdots,n$ وكذلك بما أن f متزايدة فان

$f(x_{k-1})\leq f(x_k) \Leftarrow f(x_k)-f(x_{k-1})\geq 0$ وعليه $\Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1})\geq 0$ لكل $k=1,2,\cdots,n$

(3) بما أن $x_{k-1}<x_k$ لكل $k=1,2,\cdots,n$ وكذلك بما أن f متناقصة فان

$f(x_{k-1})\geq f(x_k) \Leftarrow f(x_k)-f(x_{k-1})\leq 0$ وعليه $\Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1})\leq 0$ لكل $k=1,2,\cdots,n$

(4) ليكن $y_k\in(x_k,x_{k+1}) \Leftarrow x_k<y_k<x_{k+1} \Leftarrow f(x_k)\leq f(y_k)\leq f(x_{k+1})$ لان الدالة f متزايدة.

وكذلك بما أن الدالة f متزايدة فان $f(x_k^+)\leq f(y_k)$ وكذلك $f(y_{k-1})\leq f(x_k^-)$ وعليه

$$f(x_k^+)-f(x_k^-)\leq f(y_k)-f(y_{k-1}) \Leftarrow \sum_{k=1}^{n}(f(x_k^+)-f(x_k^-))\leq\sum_{k=1}^{n}(f(y_k)-f(y_{k-1}))=f(b)-f(a)$$

مبرهنة (10.1.5)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة رتيبة ، ولتكن A مجموعة النقاط التي تكون فيها الدالة غير مستمرة ، فان A تكون قابلة للعد.

2.5

وفي هذه المحاضرة سوف نتطرق إلى نوع أخر من الدوال الحقيقية والذي هو الدوال مقيدة التغاير.

لتكن J فترة مغلقة مقيدة من الأعداد الحقيقية ، أي أن $J=[a,b]$ ، $P=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ تجزئة للفترة J ولتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة . نضع

$$V_J(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$$

يسمى العدد غير السالب $V_J(f,P)$ بتغاير الدالة f على الفترة J بالنسبة للتجزئة P . بسهولة يمكن إثبات إذا كانت P_1 تنعيم للتجزئة P_2 ، أي ان $P_2\subseteq P_1$ فان $V_J(f,P_2)\subseteq V_J(f,P_1)$.

تعريف (1.2.5)

لتكن $f:J\to\mathbb{R}$ دالة ولتكن $P=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ تجزئة للفترة J . يقال عن الدالة f بأنها مقيدة التغاير إذا كانت المجموعة $\Psi_J(f)=\{V_J(f,P):[a,b]$ تجزئة للفترة $P\}$ مقيدة من الأعلى. بعبارة أخرى إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $V_J(f,P)\le M$. إذا كانت الدالة $f:J\to\mathbb{R}$ مقيدة التغاير ، نعرف

$$V_J(f)=\sup\Psi_J(f)=\sup\{V_J(f,P):[a,b] \text{ تجزئة للفترة } P\}$$

يسمى العدد $V_J(f)$ بالتغاير الكلي (Total Variation) للدالة f على الفترة $J=[a,b]$.

- إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مقيدة التغاير فان $V_J(f)$ منتهي ولكن $V_J(f)\ge 0$ لان $V_J(f,P)\ge 0$ لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$. وأكثر من ذلك $V_J(f)=0$ إذا وفقط إذا كانت f دالة ثابتة على الفترة $[a,b]$.

مثال (2.2.5)

لتكن الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\text{®}}{2x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

فان الدالة f غير مقيدة التغاير.

الحل :

لكل $n\in N$ ، لتكن $P_n=\{0,\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1},\cdots,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\}$ تجزئة للفترة $[0,1]$

$$\sum_{k=1}^{2n}|\Delta f_k|=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

بما أن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة . نستنتج أن الدالة f غير مقيدة التغاير..

ملاحظة

في المثال (2.2.5) الدالة f مستمرة وغير مقيدة التغاير، فان هذا المثال يبين أن الاستمرارية غير كافية لجعل الدالة مقيدة التغاير.

مبرهنة (3.2.5)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة وكانت f' موجودة ومقيدة على الفترة المفتوحة (a,b)، فان الدالة f مقيدة التغاير.

البرهان: لتكن $P=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$

بما أن f' موجودة، باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى ، يوجد $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ بحيث أن $f'(t_k) = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

بما أن f' مقيدة على (a,b)، يوجد $M > 0$ بحيث أن $|f'(x)| \le M$ لكل $x \in (a,b)$

$$|\Delta f_k| = |f'(t_k)(x_k - x_{k-1})| = |f'(t_k)|(x_k - x_{k-1}) \le M\Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \le \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k = M\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a)$$

مثال(4.2.5)

لتكن الدالة $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

فان الدالة f مقيدة التغاير لان الدالة f مستمرة الفترة $[0,1]$ وكذلك f' موجودة ومقيدة على الفترة $(0,1)$. في الواقع $f'(0) = 0$ وكذلك $f'(x) = \sin\dfrac{1}{x} + 2x\cos\dfrac{1}{x}$ لكل $x \ne 0$ وعليه $|f'(x)| \le 3$ لكل $x \in [0,1]$.

ملاحظة

إذا كانت الدالة $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ مقيدة التغاير فليس بالضروري أن تكون الدالة f' مقيدة. والمثال التالي يوضح ذلك.
ليكن $f(x) = \sqrt[3]{x}$ فان الدالة f تكون مقيدة التغاير على أية فترة منتهية لأنها رتيبة ولكن f' غير مقيدة لان $f'(x) \to \infty$ عندما $x \to 0$

مبرهنة (5.2.5)

إذا كانت الدالة $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ رتيبة فإنها مقيدة التغاير

البرهان :

سنبرهن في حالة الدالة f متزايدة فان $\Delta f_k \ge 0$ لكل تجزئة P للفترة J وعليه

$$V_J(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k = f(b) - f(a)$$

وبالمثل نبرهن في حالة الدالة f متناقصة.

ملاحظة

إذا كانت الدالة $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ مقيدة التغاير فليس بالضروري أن تكون رتيبة. والمثال (13) يوضح ذلك.

مبرهنة (6.2.5)

إذا كانت الدالة $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ مقيدة التغاير، فأنها مقيدة.

البرهان :

لتكن $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 = b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$

بما أن الدالة f مقيدة التغاير، فأنه يوجد $M > 0$ بحيث أن $V_J(f,P) \le M$

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| \le M$$

$\Leftarrow \; |f(x_1)-f(a)|+|f(b)-f(x_1)| \le M \;\Leftarrow\; |f(x_1)| < f(a)+M = M^*$ وعليه $|f(x)| < M^*$ لكل $x \in [a,b]$

ملاحظة

إذا كانت الدالة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ مقيدة فأنها ليس بالضروري أن تكون مقيدة التغاير. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثل(7.2.5)

لتكن A تمثل مجموعة الأعداد النسبية في الفترة المغلقة $[0,1]$. فان الدالة $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \in A\\ 0, & x \notin A\end{cases}$$

مقيدة ولكنها غير مقيدة التغاير لان $|f(x)| \le 1$ لكل $x \in [0,1]$

لو فرضنا $P=\{0=x_0<x_1<...<x_n=1\}$ تجزئة للفترة $[0,1]$ بحيث أن $x_0 \in A, \quad x_1 \notin A, \quad x_2 \in A, \quad x_3 \notin A, \quad \cdots$
فان

$$V_J(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| = |f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)-f(x_{n-1})| = 1+1+\cdots+1=n$$

مبرهنة (8.2.5)

إذا كانت كل من $f, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ دالة مقيدة التغاير، $ª \in \mathbb{R}$ فأن.

(1) الدالة $f+g$ مقيدة التغاير على $[a,b]$ وان $V_J(f+g) \le V_J(f)+V_J(g)$

(2) الدالة $ª f$ مقيدة التغاير على $[a,b]$ وان $V_J(ª f)=|ª|V_J(f)$

(3) الدالة $f \cdot g$ مقيدة التغاير على $[a,b]$ وان $V_J(f \cdot g) \le \sim V_J(f) + \; V_J(g)$ بحيث

$\sim = \sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\}, \qquad = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$

البرهان :

(1) نضع $h=f+g$. لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$

$$\begin{aligned}|\Delta h_k| &= |h(x_k)-h(x_{k-1})| = |f(x_k)-f(x_{k-1})+g(x_k)-g(x_{k-1})|\\ &\le |f(x_k)-f(x_{k-1})|+|g(x_k)-g(x_{k-1})| = |\Delta f_k|+|\Delta g_k|\end{aligned}$$

$\Leftarrow \; |\Delta h_k| \le |\Delta f_k|+|\Delta g_k| \;\Leftarrow\; \sum_{k=1}^{n}|\Delta h_k| \le \sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|+\sum_{k=1}^{n}|\Delta g_k|$ وعليه $V_J(h,P) \le V_J(f,P)+V_J(g,P)$

بما آن كل من f,g دالة مقيدة التغاير على $[a,b]$، فانه توجد أعداد حقيقية موجبة M_1, M_2 بحيث أن $V_J(f,P) \le M_1$ ، $V_J(g,P) \le M_2$. وعليه $V_J(h,P) \le M_1+M_2=M \Leftarrow$ الدالة $f+g$ مقيدة التغاير على $[a,b]$.

بأخذ sup على $V_J(h,P) \le V_J(f,P)+V_J(g,P)$ نحصل على $V_J(f+g) \le V_J(f)+V_J(g)$

(3) نضع $h=f \cdot g$. لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$

$$\begin{aligned}|\Delta h_k| &= |h(x_k)-h(x_{k-1})| = |f(x_k)\cdot g(x_k)-f(x_{k-1})\cdot g(x_{k-1})|\\ &= |f(x_k)\cdot g(x_k)-f(x_{k-1})\cdot g(x_k)+f(x_{k-1})\cdot g(x_k)-f(x_{k-1})\cdot g(x_{k-1})|\\ &= |(f(x_k)-f(x_{k-1}))\cdot g(x_k)+f(x_{k-1})(\cdot g(x_k)-\cdot g(x_{k-1}))| = |\Delta f_k \cdot g(x_k)+f(x_{k-1})\Delta g_k|\\ &\le |\Delta f_k||g(x_k)|+|f(x_{k-1})||\Delta g_k| \le \sim|\Delta f_k| + \; |\Delta g_k|\end{aligned}$$

$\Leftarrow \quad |\Delta h_k| \le \sim |\Delta f_k| + \; |\Delta g_k| \quad \Leftarrow \quad \sum_{k=1}^{n}|\Delta h_k| \le \sim \sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| + \; \sum_{k=1}^{n}|\Delta g_k|$ وعليه $V_J(h,P) \le \sim V_J(f,P) + \; V_J(g,P)$

بما آن كل من f,g دالة مقيدة التغاير على $[a,b]$، فانه توجد أعداد حقيقية موجبة M_1, M_2 بحيث أن $V_J(f,P) \le M_1$ ، $V_J(g,P) \le M_2$. وعليه $V_J(h,P) \le M_1 + M_2 = M \Leftarrow$ الدالة $f+g$ مقيدة التغاير على $[a,b]$.

بأخذ sup على $V_J(h,P) \le \sim V_J(f,P) + \; V_J(g,P)$ نحصل على $V_J(f \cdot g) \le \sim V_J(f) + \; V_J(g)$

مبرهنة (9.2.5)

لتكن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مقيدة التغاير، وافرض انه يوجد عدد موجب m بحيث أن $|f(x)| \ge m > 0$ لكل $x \in [a,b]$. فأن الدالة $\frac{1}{f}$ تكون مقيدة التغاير على $[a,b]$ وان $V_J(\frac{1}{f}) = \frac{1}{m^2} V_J(f)$.

البرهان :

نفرض P تجزئة للفترة $[a,b]$

$$\left|\Delta \frac{1}{f_k}\right| = \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \left|\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k) f(x_{k-1})}\right| = \frac{|\Delta f_k|}{|f(x_k) f(x_{k-1})|} \le \frac{|\Delta f_k|}{m^2}$$

$\Leftarrow \quad \left|\Delta \frac{1}{f_k}\right| \le \frac{1}{m^2}|\Delta f_k| \quad \Leftarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\left|\Delta \frac{1}{f_k}\right| \le \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$ وعليه $V_J(\frac{1}{f}, P) \le \frac{1}{m^2} V_J(f,P)$

بما آن f دالة مقيدة التغاير على $[a,b]$، فانه يوجد عدد حقيقي موجب M_1 بحيث أن $V_J(f,P) \le M_1$ ، وعليه $V_J(\frac{1}{f}, P) \le \frac{1}{m^2} M_1 = M \Leftarrow$ الدالة $\frac{1}{f}$ مقيدة التغاير على $[a,b]$.

بأخذ sup على $V_J(\frac{1}{f}, P) \le \frac{1}{m^2} V_J(f,P)$ نحصل على $V_J(\frac{1}{f}) = \frac{1}{m^2} V_J(f)$

مبرهنة (10.2.5)

لتكن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مقيدة التغاير، وافرض انه $c \in (a,b)$. فان الدالة f تكون مقيدة التغاير على كل من $[a,c]$ ، $[c,b]$ وان $V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$

البرهان:

نفرض P تجزئة للفترة $[a,b]$ ، P_1 تجزئة للفترة $[a,c]$ ، P_2 تجزئة للفترة $[c,b]$

$V_{[a,b]}(f,P) = V_{[a,c]}(f,P_1) + V_{[c,b]}(f,P_2)$

بما أن $V_J(f) = \sup\{V_J(f,P) : [a,b]$ تجزئة للفترة $P\}$، فان $V_{[a,b]}(f,P) \le V_{[a,b]}(f)$ وعليه $V_{[a,c]}(f,P_1) + V_{[c,b]}(f,P_2) \le V_{[a,b]}(f)$ وهذا يبين كل من $V_{[a,c]}(f,P_1)$ ، $V_{[c,b]}(f,P_2)$ مقيد بالعدد $V_{[a,b]}(f)$

وعليه الدالة f تكون مقيدة التغاير على كل من $[a,c]$ ، $[c,b]$

بأخذ sup على $V_{[a,c]}(f,P_1) + V_{[c,b]}(f,P_2) \le V_{[a,b]}(f)$ نحصل على

$$V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) \le V_{[a,b]}(f) \qquad \cdots \quad (1)$$

للحصول على الاتجاه الأخر للتساوي : نفرض $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ ولتكن $Q = P \cup \{c\}$. إذا كان $c \in [x_{k-1}, x_k]$ ، فان

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| = |f(x_k) - f(c) + f(c) - f(x_{k-1})| \le |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|$$

وعليه $V_{[a,b]}(f,P) \le V_{[a,b]}(f,Q)$

الآن : نقاط Q في الفترة $[a,c]$ تكون تجزئة P_1 للفترة $[a,c]$ وكذلك نقاط Q في الفترة $[c,b]$ تكون تجزئة P_2 للفترة $[c,b]$ وعليه $V_{[a,b]}(f,Q) = V_{[a,c]}(f,P_1) + V_{[c,b]}(f,P_2) \Leftarrow V_{[a,b]}(f,P) = V_{[a,c]}(f,P_1) + V_{[c,b]}(f,P_2)$

بأخذ sup على $V_{[a,b]}(f,P) = V_{[a,c]}(f,P_1) + V_{[c,b]}(f,P_2)$ نحصل على

$$V_{[a,b]}(f) \le V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) \qquad \cdots \quad (2)$$

من (1)،(2) نحصل على $V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f)$

مثال (11.2.5)

إذا كانت الدالة $f : [0,2®] \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x) = \sin x$ لكل $x \in [0,2®]$

الحل:

$$[0,2®] = [0,\frac{1}{2}®] \cup [\frac{1}{2}®,\frac{3}{2}®] \cup [\frac{3}{2}®,2®]$$

لتكن $P = \left\{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \frac{1}{2}®\right\}$ تجزئة للفترة $[0,\frac{1}{2}®]$

$$V_{[0,\frac{1}{2}®]}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k = f(\frac{1}{2}®) - f(0) = \sin\frac{1}{2}® - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

ونفس الأسلوب نحسب $V_{[\frac{3}{2}®,2®]}(f,P) = 2$ ، $V_{[\frac{1}{2}®,\frac{3}{2}®]}(f,P) = 1$ وعليه

$$V_{[0,2®]}(f,P) = V_{[0,\frac{1}{2}®]}(f,P) + V_{[\frac{1}{2}®,\frac{3}{2}®]}(f,P) + V_{[\frac{3}{2}®,2®]}(f,P) = 1 + 1 + 2 = 4$$

مبرهنة (12.2.5)

لتكن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ مقيدة التغاير. نعرف الدالة $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ بالصيغة

$$V(x) = \begin{cases} V_{[a,x]}(f), & a < x \le b \\ 0, & x = a \end{cases}$$

فان كل من الدوال V ، $V - f$ متزايدة على الفترة $[a,b]$.

البرهان :

إذا كانت $a < x < y \le b$

$$V(x) = V_{[a,x]}(f), \quad V(y) = V_{[a,y]}(f) = V_{[a,x]}(f) + V_{[x,y]}(f)$$

وعليه $V(y) - V(x) = V_{[x,y]}(f) \ge 0 \Leftarrow V(x) \le V(y)$ فان V دالة متزايدة على الفترة $[a,b]$

الآن : نبرهن $V - f$ دالة متزايدة على الفترة $[a,b]$: لتكن $g = v - f$

$$g(y) - g(x) = (V(y) - f(y)) - (V(x) - f(x)) = (V(y) - V(x)) - (f(y) - f(x)) = V_{[x,y]}(f) - (f(y) - f(x))$$

ومن تعريف $V_{[x,y]}(f)$ نحصل على $f(y) - f(x) \le V_{[x,y]}(f)$ وعليه $g(y) - g(x) \ge 0 \Leftarrow g(x) \le g(y)$.

مبرهنة (13.2.5)

لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة ، فان الدالة f مقيدة التغاير على $[a,b]$ إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن الدالة f كفرق بين دالتين متزايدتين.

البرهان:

نفرض الدالة f مقيدة التغاير على $[a,b]$ ، فان $f=V-(V-f)$ وان كل من الدوال V ، $V-f$ متزايدة على الفترة $[a,b]$.

الاتجاه الأخر : نفرض $f=g-h$ بحيث كل من g,h دالة متزايدة

بما أن كل من g,h دالة متزايدة فان كل من g,h دالة مقيدة التغاير على $[a,b]$ (حسب مبرهنة 5.2.5) وعليه $g-h$ دالة مقيدة التغاير على $[a,b]$ (حسب مبرهنة 8.2.5). وهذا يعني أن الدالة f مقيدة التغاير على $[a,b]$.

مبرهنة (14.2.5)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة التغاير على $[a,b]$ ولتكن $x\in[a,b]$ ، فان الدالة f تكون مستمرة عند النقطة x إذا وفقط إذا كانت الدالة V (المعرفة في المبرهنة 12.2.5) مستمرة عند النقطة x. وعليه لدالة f تكون مستمرة على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت الدالة V مستمرة على $[a,b]$

البرهان :

بما أن الدالة V رتيبة فان كل من $V(x^+),V(x^-)$ موجودة لكل $x\in(a,b$ وعليه باستخدام المبرهنة (13.2.5) يكون كل من $f(x^+),f(x^-)$ موجودة لكل $x\in(a,b$.

بما أن الدالة V دالة مستمرة عند النقطة x ، فان $V(x)=V(x^+)=V(x^-)$

إذا كانت $a<x<y\le b$ فان

$$V(x)=V_{[a,x]}(f),\quad V(y)=V_{[a,y]}(f)=V_{[a,x]}(f)+V_{[x,y]}(f)$$

وعليه $V(y)-V(x)=V_{[x,y]}(f)$

بما أن $V_{[x,y]}(f)=\sup\{V_{[x,y]}(f,P):[x,y]$ تجزئة للفترة $P\}$ فان $V_{[x,y]}(f)\ge|f(y)-f(x)|$

$$0\le|f(y)-f(x)|\le V_{[x,y]}(f)=V(y)-V(x)$$

عندما $y\to x$ ، نحصل على $0\le|f(x^+)-f(x)|\le V(x^+)-V(x)=0$ وعليه $f(x)=f(x^+)$ وبالمثل نبرهن $f(x)=f(x^-)$ وعليه $f(x)=f(x^+)=f(x^-)$.

الاتجاه الأخر: نفرض الدالة f تكون مستمرة على (a,b) يجب ان نبرهن على ان الدالة V مستمرة على الفترة (a,b) : ليكن $c\in(a,b)$

نفرض $£>0$ ، بما أن الدالة f مستمرة عند النقطة (c) ، يوجد $¢>0$ بحيث أن $0<|x-c|<¢$ يؤدي الى $|f(x)-f(x_0)|<\frac{£}{2}$ ، وكذلك توجد تجزئة $P=\{c=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ للفترة $[c,b]$ بحيث أن

$$V_{[c,b]}(f)-\frac{£}{2}<V_{[c,b]}(f,p)=\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$$

نفرض $0<|x_1-c|<¢ \;\Leftarrow\; 0<x_1-x_0<¢$

$$V_{[c,b]}(f)-\frac{£}{2}<|\Delta f_1|+\sum_{k=2}^{n}|\Delta f_k|=\frac{£}{2}+\sum_{k=2}^{n}|\Delta f_k|\le\frac{£}{2}+V_{[x_1,b]} \;\Leftarrow\; |\Delta f_1|=|f(x_1)-f(x_0)|<\frac{£}{2}$$

بما أن $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$تجزئة للفترة $[x_1,b]$، نحصل على $V_{[c,b]}(f)-V_{[x_1,b]}<£$.

ولكن $0\le V(x_1)-V(c)=V_{[a,x_1]}(f)-V_{[a,c]}=V_{[c,x_1]}(f)=V_{[c,b]}-V_{[x_1,b]}<£$ وعليه برهنا $0<x_1-c<¢$ يؤدي إلى $0\le V(x_1)-V(c)<£$

وهذا يعني برهنا $V(x^+)=V(x)$ وبالمثل نبرهن $V(x^-)=V(x)$ وعليه $V(x)=V(x^+)=V(x^-)$.

مبرهنة (15.2.5)
لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة ، فان الدالة f مقيدة التغاير على $[a,b]$ إذا وفقط إذا أمكن التعبير عن الدالة f كفرق بين دالتين مستمرتين متزايدتين.

ملاحظة
المبرهنة التالية تبين العلاقة بين مفهوم التغاير المقيد ومفهوم التكامل

مبرهنة (16.2.5)
لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة وقابلة للتكامل لبيكيا أو ريمانيا على الفترة $[a,b]$. نعرف الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ بالصيغة

$$F(x)=\begin{cases}\int_a^x f(t)dt & x>a\\ 0, & x=a\end{cases}$$

فان الدالة F مقيدة التغاير على الفترة $[a,b]$

البرهان :
بما أن الدالة f مقيدة ، يوجد $M>0$ بحيث أن $|f(x)|\le M$ لكل $x\in[a,b]$
لتكن $P=\{a=x_0<x_1<x_2=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$

$$V_J(F,P)=\sum_{k=1}^{n}|\Delta F_k|=\sum_{k=1}^{n}|F(x_k)-F(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_a^{x_k}f(t)dt-\int_a^{x_{k-1}}f(t)dt\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(t)dt\right|$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}Mdt\right|=M\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}dt\right|=M\sum_{k=}^{n}|x_k-x_{k-1}|\le M\sum_{k=}^{n}(x_k-x_{k-1})=M(b-a)$$

وعليه الدالة F مقيدة التغاير على الفترة $[a,b]$

مبرهنة (17.2.5)
إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وكانت الدالة $|f'|$ مقيدة وقابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$.فان الدالة f مقيدة التغاير على الفترة $[a,b]$ وان $V_J(f)=\int_a^b|f(x)|dx$

البرهان:
باستخدام المبرهنة (6.2.5)، نحصل الدالة $|f|$ مقيدة التغاير على الفترة $[a,b]$. ومن تعريف التغاير الكلي ، إذا كان $£>0$، توجد تجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ بحيث أن $|V_J(f)-V_J(f,P_1)|<\frac{£}{4}$
وكذلك بما أن $|f'|$ قابلة للتكامل ريمانيا على الفترة $[a,b]$، توجد تجزئة P_2 للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\left|\overline{R}(|f'|,P_2)-\int_a^b|f(x)|dx\right|<\frac{£}{4}\quad \text{وكذلك}\quad \left|\underline{R}(|f'|,P_2)-\int_a^b|f(x)|dx\right|<\frac{£}{4}$$

نضع $P=P_1\cup P_2 \Leftarrow P$ تجزئة للفترة $[a,b]$. إذا كانت $P=\{a=x_0<x_1<x_2=b\}$ فان

$$\left|V_J(f)-V_J(f,P)\right|<\frac{\varepsilon}{4}\ \text{،}\quad \left|\overline{R}(|f'|,P)-\int_a^b|f(x)|dx\right|<\frac{\varepsilon}{4}\quad \text{وكذلك}\quad \left|\underline{R}(|f'|,P)-\int_a^b|f(x)|dx\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

بما أن f' موجودة، باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى ، يوجد $t_k\in(x_{k-1},x_k)$ بحيث أن $f'(t_k)=\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$

$$\Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(t_k)(x_k-x_{k-1})\ \Rightarrow\ V_J(f,P)=\sum_{k=1}^n|\Delta f_k|=\sum_{k=1}^n|f'(t_k)|\Delta x_k$$

ولكن $\underline{R}(f,P)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\,,\ \ \overline{R}(f,P)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$ فان $\underline{R}(|f'|,P)\le V_J(f,P)\le \overline{R}(|f'|,P)$ وعليه

$$\left|V_J(f,P)-\overline{R}(|f'|,P)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

والآن :

$$\left|V_J(f)-\int_a^b|f(x)|dx\right|\le\left|V_J(f)-V_J(f,P)\right|+\left|V_J(f,P)-\overline{R}(|f'|,P)\right|+\left|\overline{R}(|f'|,P)-\int_a^b|f(x)|dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

وبما أن هذه العلاقة تتحقق لكل عدد موجب ε، نستنتج أن $V_J(f)=\int_a^b|f(x)|dx$

3.5 المنحنيات Curves

تعريف (1.3.5)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة . منحني (curve) أو بيان(graph) الدالة f هو المجموعة
$C=\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$

لتكن $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ ولتكن $\ell(f,P)=\sum_{k=1}^n\sqrt{(\Delta f_k)^2+(\Delta x_k)^2}$.

من الواضح أن $\ell(f,P)$ يمثل طول منحني مضلع الشكل مرسوم داخل المنحني C ورؤوسه تقع على المنحني C.

لتكن $\Lambda(f)=\{\ell(f,P):[a,b]$ تجزئة للفترة $P\}$. من الواضح أن المجموعة $\Lambda(f)$ غير خالية. يقال عن المنحي C بأنه **مقيد الطول** إذا كانت المجموعة $\Lambda(f)$ مقيدة من الأعلى. وفي هذه الحالة نضع
$\ell(f)=\sup\Lambda(f)=\sup\{\ell(f,P):[a,b]$ تجزئة للفترة $P\}$

يسمى العدد $\ell(f)$ **طول المنحي** C أو طول محني للدالة f .

مبرهنة (2.3.5)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة ورتيبة فان منحني الدالة مقيد الطول وان $\ell(f)\le|f(b)-f(a)|+b-a$.

البرهان :

لتكن $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$

بما أن مجموع أطوال أي ضلعين في مثلث اكبر من طول الضلع الثالث ، فان $\sqrt{(\Delta f_k)^2+(\Delta x_k)^2}\le|\Delta f_k|+|\Delta x_k|$

ولهذا لكل تجزئة P للفترة $[a,b]$، فان

$$\ell(f,P)=\sum_{k=1}^n\sqrt{(\Delta f_k)^2+(\Delta x_k)^2}\le\sum_{k=1}^n(|\Delta f_k|+|\Delta x_k|)$$

بما أن الدالة f رتيبة ، فان $\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| = |f(b)-f(a)|$ وكذلك بما أن $\sum_{k=1}^{n}|\Delta x_k| = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a$ فان

$$\ell(f,P) \le |f(b)-f(a)| + (b-a)$$

وعليه $\ell(f) \le |f(b)-f(a)| + (b-a)$.

مبرهنة (3.3.5)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ قابلة للاشتقاق وكانت f' مستمرة على الفترة $[a,b]$ فان منحني الدالة f مقيد الطول وان

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

البرهان :

لتكن $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ فان $\ell(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta f_k)^2+(\Delta x_k)^2}$

بما أن الدالة f' مستمرة على الفترة $[a,b]$، باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى ، يوجد $t_k\in(x_{k-1},x_k)$ بحيث أن

$$f'(t_k)=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

فان $\Delta f_k = f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k-x_{k-1}) = f'(t_k)\Delta x_k$ وعليه

$$\ell(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(f'(t_k)^2(\Delta x_k)^2+(\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+(f'(t_k))^2})(\Delta x_k)$$

نضع $F(x)=\sqrt{1+(f'(t_k))^2}$ ، فان الدالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ وعليه تلك الدالة مقيدة ، يوجد $M>0$ بحيث أن لكل x ، $|F(x)|\le M$ وعليه $\ell(f,P)=\sum_{k=1}^{n}F(x)(\Delta x_k)\le M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = M(b-a)$ فان منحني الدالة f مقيد الطول.

إذا كانت $m_k=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\},\quad k=1,2,\cdots,n$ $\quad M_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$ فان $m_k\le F(t_k)\le M_k$

وعليه $\underline{R}(F,P)\le\sum_{k=1}^{n}F(t_k)\Delta x_k\le\overline{R}(F,P)$ ولهذا فان $\underline{R}(F,P)\le\ell(f,P)\le\overline{R}(F,P)$

بما أن الدالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ فأنها قابلة للتكامل ريمانيا على تلك الفترة ، ولهذا لكل $\varepsilon>0$ توجد تجزئة P_1 للفترة $[a,b]$ بحيث أن

$$\left|\overline{R}(F,P_1)-\int_a^b F(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{وكذلك} \quad \left|\underline{R}(F,P_1)-\int_a^b F(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

الآن :

$$\int_a^b F(x)dx-\frac{\varepsilon}{4}\le\ell(f,P_1)\le\int_a^b F(x)dx+\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{وبالتالي فان} \quad \int_a^b F(x)dx-\frac{\varepsilon}{4}\le\ell(f)\le\int_a^b F(x)dx+\frac{\varepsilon}{4}$$

وبما أن هذه العلاقة تتحقق لكل عدد موجب ε، نستنتج أن

$$\ell(f)=\int_a^b F(x)dx=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

المبرهنة التالية توضح العلاقة بين مفهومي التغاير المقيد والمنحني مقيد الطول .

مبرهنة (4.3.5)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة فأنها تكون مقيدة التغاير إذا وفقط إذا كان منحني الدالة f مقيد الطول.

البرهان :

إذا كانت $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$. فان $V_J(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|$ وكذلك

$\ell(f,P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta f_k)^2+(\Delta x_k)^2}$ وعليه $V_J(f,P)<\ell(f,P)\le V_J(f,P)+(b-a)$ وبالتالي فان

$$\Psi_J(f)\subset\Lambda(f)\subseteq\Psi_J(f)+(b-a)$$

والآن من الواضح انه المجموعة $\Lambda(f)$ تكون مقيدة إذا وفقط إذا كانت المجموعة $\Psi(f)$ مقيدة. وهكذا تكون الدالة f مقيدة التغاير إذا وفقط إذا كان منحني الدالة f مقيد الطول بالإضافة إلى ذلك فان $V_J(f)<\ell(f)\le V_J(f)+(b-a)$

مبرهنة (4.3.5)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة وقابلة للتكامل لبيكيا أو ريمانيا على الفترة $[a,b]$. نعرف الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ بالصيغة

$$F(x)=\begin{cases}\int_a^x f(t)dt & x\ne a\\ 0, & x=a\end{cases}$$

فان الدالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$

مبرهنة (5.3.5)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة وقابلة للتكامل ليبيكيا على الفترة $[a,b]$. إذا كانت

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx=0$$

لكل $x\in[a,b]$ ، فان $f=0$ $a.e.$ على الفترة $[a,b]$

مبرهنة (6.3.5) مبرهنة لبيك

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ رتيبة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة f قابلة للاشتقاق $a.e.$ والدالة f' قابلة للقياس على الفترة $[a,b]$. فضلا عن هذا إذا كانت الدالة f متزايدة فان

$$\int_a^b f'(x)dx\ge f(b)<f(a)$$

نتيجة (7.3.5)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مقيدة التغاير على الفترة $[a,b]$ فان الدالة f قابلة للاشتقاق $a.e.$ على الفترة $[a,b]$.

مبرهنة (8.3.5)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مقيدة وقابلة للقياس على الفترة $[a,b]$ (وبالتالي تكون قابلة للتكامل). وكانت

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)dt$$

فان الدالة F قابلة للاشتقاق $a.e.$ وان $f=F'$ $a.e.$ على الفترة $[a,b]$.

مبرهنة (9.3.5)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للتكامل الليبيكي على الفترة $[a,b]$ (ليس بالضرورة أن تكون الدالة f مقيدة). إذا كانت

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)dt$$

فان الدالة F قابلة للاشتقاق $a.e.$ وان $f=F'$ $a.e.$ على الفترة $[a,b]$.

4.5 الاستمرارية المطلقة Absolutely Continuity

تعريف(1.4.5)

يقال عن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بأنها مستمرة بصورة مطلقةً (Absolutely Continuous) إذا كان لكل £ >0، يوجد ¢ >0 بحيث أن لكل عدد صحيح موجب n ولكل عائلة من الفترات المتنافية $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$ الجزئية من الفترة $[a,b]$ والتي تحقق الشرط الأتي :

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<¢ \text{ يؤدي إلى } \sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|\le £$$

ملاحظة

كل دالة مستمرة بصورة مطلقة تكون مستمرة بصورة منتظمة (خذ $n=1$) ولكن العكس غير صحيح دائما.(راجع المثال41.5)

مبرهنة (2.4.5)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة وكانت f' موجودة ومقيدة على الفترة المفتوحة (a,b)، فان الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة بصورة مطلقة.

البرهان:

لتكن $\{(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)\}$ عائلة من الفترات المتنافية الجزئية من الفترة $[a,b]$

بما أن f' موجودة، باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى ، يوجد $t_i\in(a_i,b_i)$ بحيث أن $f'(t_i)=\dfrac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}$

$$f(b_i)-f(a_i)=f'(t_i)(b_i-a_i)$$

بما أن f' مقيدة على (a,b)، يوجد $M>0$ بحيث أن $|f'(x)|\le M$ لكل $x\in(a,b)$

$$|f(b_i)-f(a_i)|=|f'(t_i)(b_i-a_i)|=|f'(t_i)|(b_i-a_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|=\sum_{i=1}^{n}|f'(t_i)|(b_i-a_i)\le M\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

الآن : £ >0 ، نأخذ ¢ $=\dfrac{£}{2M}$: إذا كان $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<$ ¢ فان $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\le$ £ وعليه الدالة f مستمرة بصورة مطلقة.

مبرهنة (3.4.5)

إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مستمرة بصورة مطلقة فإنها مقيدة التغاير.

البرهان:

ليكن $£=1$، بما أن الدالة f مستمرة بصورة مطلقة ، يوجد $¢>0$ بحيث أن لكل عدد صحيح موجب n ولكل عائلة من الفترات المتنافية $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$ الجزئية من الفترة $[a,b]$ والتي تحقق الشرط الأتي :

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<¢ \quad \text{يؤدي الى} \quad \sum_{i=1}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<1$$

لتكن $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$ بحث أن $x_i-x_{i-1}<¢$ لكل $i=1,2,\cdots,n$، وعليه

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})<n¢<¢$$

إذا كانت $P_i=\{x_{i-1}=y_0<y_1<\ldots<y_n=x_i\}$ تجزئة للفترة $[x_{i-1},x_i]$

بما أن الدالة f مستمرة بصورة مطلقة وان $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})<¢$ فان $\sum_{i=1}^{n}\left|f(y_i)-f(y_{i-1})\right|<1$

وهذا يعني أن تغاير الدالة f على كل من الفترات $[x_{i-1},x_i]$ اقل من واحد ، وعليه تغاير الدالة f على الفترة $[a,b]$ اقل من n ولهذا فان الدالة f مقيدة التغاير على الفترة $[a,b]$.

نتيجة(4.4.5)

كل دالة مستمرة بصورة مطلقة على الفترة $[a,b]$ تكون قابلة للاشتقاق $a.e.$

ملاحظات

(1) كل دالة ليست مقيدة التغاير فإنها ليست مستمرة بصورة مطلقة

(2) كل دالة مقيدة التغاير فإنها ليست بالضرورة أن تكون مستمرة بصورة مطلقة

المثال التالي لدالة مستمرة بصورة منتظمة ولكنها ليست مستمرة بصورة مطلقة .

مثال(5.4.5)

لتكن الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

فان الدالة f مستمرة بصورة منتظمة ولكنها ليست مستمرة بصورة مطلقة لأنها غير مقيدة التغاير.

مبرهنة(6.4.5)

إذا كانت كل من $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة بصورة مطلقة ، وليكن $ª\in R$ فان كل من $f+g$ ، $ªf$ تكون مستمرة بصورة مطلقة .

مبرهنة (7.4.5)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مقيدة وقابلة للتكامل لبيكيا على الفترة $[a,b]$. نعرف الدالة $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ بالصيغة

$$F(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt & x>a\\ 0, & x=a\end{cases}$$

فان الدالة F مستمرة بصورة مطلقة على الفترة $[a,b]$

البرهان:

بما أن الدالة f مقيدة ، يوجد $M>0$ بحيث أن $|f(x)|\le M$ لكل $x\in[a,b]$

ليكن $\epsilon>0$،ولتكن $\{(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)\}$ عائلة من الفترات المتنافية الجزئية من الفترة $[a,b]$

إذن

$$\sum_{i=1}^{n}|Fb_i)-F(a_i)|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_a^{b_i}f(t)dt-\int_a^{a_i}f(t)dt\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{a_i}^{b_i}f(t)dt\right|\le\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}|f(t)|dt\le\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}Mdt=M\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

نختار $\delta=\frac{2\epsilon}{M}$ وكان $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ فان $\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|\le\epsilon$

ومنها ينتج أن F مستمرة بصورة مطلقة على الفترة $[a,b]$.

مبرهنة(8.4.5)

إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة بصورة مطلقة على الفترة $[a,b]$ وكانت $f'=0$ $a.e.$ ، فان الدالة f تكون دالة ثابتة على الفترة $[a,b]$.

مبرهنة (9.4.5) المبرهنة الأساسية في حساب التفاضل والتكامل

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة ما . العلاقة

$$\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)$$

تتحقق لكل $x\in[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت الدالة f مستمرة بصورة مطلقة على الفترة $[a,b]$.

تمارين

بين أي من الدوال التالية (في التمارين 1-5) مقيدة التغاير ؟ مع البرهان

(1) لتكن الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(2) لتكن الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

(3) لتكن الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

ر 332
تحليل رياضي (2) Mathematical Analysis II

نظري : 3 مناقشة : 1 عدد الوحدات : 3

(4) لتكن الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(5) لتكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ دالة بحيث أن

(أ) $f(0)>0$ (ب) $f(x)\neq x$ لكل $x\in[0,1]$ (ج) الدالة f رتيبة (د) $A=\{x: f(x)>0\}$

برهن أن : $\sup A\in A$ وكذلك $f(1)>1$

(6) إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متعددة حدود ، فأنها مقيدة التغاير . برهن ذلك

(7) يقال عن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز(Lipschitz) من الرتبة $~>0$ في $[a,b]$ إذا وجد ثابت $M>0$ بحيث أن $|f(x)-f(y)|<M|x-y|^{~}$ لكل $x,y\in[a,b]$

(ا) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز بحيث أن $~>1$. برهن على أن الدالة f ثابتة .

(ب) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز بحيث أن $~=1$. برهن على أن الدالة f مقيدة التغاير .

(ج) أعط مثال لدالة مقيدة التغاير على الفترة $[a,b]$ ولكنها لاتحقق شرط ليبشتز .

(د) إذا كانت الدالة f تحقق شرط ليبشتز بحث أن $~=1$. برهن على أن الدالة f مستمرة بصورة مطلقة .

(8) لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مقيدة التغاير على الفترة $[a,b]$، ولتكن $P=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ تجزئة للفترة $[a,b]$.نعرف $A(P)=\{k:\Delta f_k>0\},\quad B(P)=\{k:\Delta f_k<0\}$ ،

$p_J(f)=\sup\{\sum_{k\in A(P)}\Delta f_k : P$ تجزئة للفترة $[a,b]\}$ وكذلك $n_J(f)=\sup\{\sum_{k\in B(P)}|\Delta f_k| : P$ تجزئة للفترة $[a,b]\}$

يسمى ، على التوالي بالتغاير الموجب والسالب للدالة f على الفترة $[a,b]$. ليكن

$$V(x)=V_{[a,x]}(f),\quad p(x)=p_{[a,x]}(f),\quad n(x)=n_{[a,x]}(f),\quad V(a)=p(a)=n(a)=0$$

برهن على أن :

(ا) $V(x)=p(x)+n(x)$ ، $0\le p(x)\le V(x)$ وكذلك $0\le n(x)\le V(x)$

(ب) كل من p,n دالة متزايدة على الفترة $[a,b]$

(ج) $f(x)=f(a)+p(x)-n(x)$ ، $2p(x)=V(x)+f(x)-f(a)$ وكذلك $2n(x)=V(x)-f(x)+f(a)$

(د) كلّ نقطة استمرارية للدالة f تكون أيضا نقطة استمرارية لكل من الدوال p,n .

(10) يقال عن الدالة $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ مقيدة التغاير على الفترة $(-\infty,\infty)$ ، إذا كانت الدالة f مقيدة التغاير على كل فترة مقيدة $[a,b]$ في $\mathbb{R}$ وكذلك إذا وجد عدد موجب $M>0$ بحيث أن $V_{[a,b]}(f)<M$ لكل فترة $[a,b]$. التغاير الكلي للدالة f على الفترة $(-\infty,\infty)$ يرمز له بالرمز $V_{(-\infty,\infty)}(f)$ ويعرف كالأتي :

$$V_{(-\infty,\infty)}(f)=\sup\{V_{[a,b]}(f):-\infty<a<b<\infty\}$$

وبالمثل نعرف التغاير المقيد على كل من الفترات $[a,\infty)$، $(-\infty,b]$. بين أي من المبرهنات تتحقق أم لا وفق هذه التعاريف ؟ مع ذكر السبب.

ر 332

Mathematical Analysis II (2) تحليل رياضي

نظري : 3   مناقشة: 1   عدد الوحدات: 3