نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

محاضرات الأستاذ الدكتور نوري فرحان المياحي
في
Topology I التبولوجيا 1

يهتم التبولوجيا بدراسة الصفات التبولوجية للأشكال الهندسية ، حيث المقصود بالصفات التبولوجية هي الصفات التي يحافظ عليها الشكل إذا ما تعرض لشد دون تمزيق أو توصيل .وبالرغم من أن التبولوجيا من مواضيع الرياضيات الصرفة إلا انه يدخل في بنية اغلب مواضيع الرياضيات التطبيقية مثل التفاضل والتكامل ، المعادلات التفاضلية ، نظرية الاحتمالية وغيرها ، فضلا عن المفاهيم التبولوجية لها تطبيقات مباشرة في حياتنا مثل التبولوجية الرقمية (Digital Topology)

المفردات

1. الفضاءات التبولوجية Topological Spaces
2. الاستمرارية Continuity
3. بديهيات الفصل والعد Separation and Countability Axioms
4. التراص Compactness
5. الترابط Connectedness

References المصادر

العربية

1. احمد عبد القادر رمضان وطه مرسي العدوي " التبولوجي العام " جامعة الملك سعود .
2. سمير بشير حديد " مقدمة في التبولوجيا العامة" جامعة الموصل، الطبعة الأولى ، 1988.
3. عبد ربه محمد سليم " فقه التبولوجيا ، قراءة بنوية " فلسطين ، الطبعة الأولى، 1999.
4. غفار حسين موسى " مقدمة في التبولوجيا " دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة.
5. محمد جواد سعد الدين وآخرون " التبولوجيا العامة " جامعة بغداد، الطبعة الأولى ، 1987.
6. وليم بيرفن " أساسيات التبولوجيا العامة " ترجمة عطا الله ثامر العاني ، الطبعة الأولى ، جامعة بغداد 1986 .

الأجنبية

1. Allen Hacher., Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002.
2. Dugundgi J., Topology, Allyn and Bacom Inc., Mass, 1978.
3. Engelking R., General Topology, Berlin, Heldermann, 1989.
4. Hu S. T., Element of General Topology, San Francisco, Holeden-Day, Inc.,1969.
5. Kelly J. L., General Topology, Springer-Verlag, New York, 1955.
6. Kosinowski C., A First Course in Algebraic Topology, Cambridge University Press,

1980.
7. Maunder C. R. F., Algebraic Topology, McGraw Hill, 1966.
8. Munkres J. R., Topology, Prentic hall , upper saddle River, 2000.
9. Sharma J. N., Vishnu Kant., Topology, Krishna Prakashan Media P Ltd, 2003.
10. Stephen Willard., General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
11. Winter., Introduction to topology , 2007.

1.الفضاءات التبولوجية Topological Spaces

الفضاءات التبولوجية هي مجموعات مجردة مع مجموعات جزئية معينة (والتي تسمى مجموعات مفتوحة) تحقق بديهيات معينة .

1.1 تعاريف وأمثلة Definitions and Examples

تعريف(1.1.1)

لتكن X مجموعة غير خالية و لتكن τ عائلة من المجموعات الجزئية من X. يقال عن τ بأنه تبولوجي (Topology) على X إذا تحققت البديهيات الآتية :

1. $\phi, X \in \tau$
2. إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau$ فان $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$
3. إذا كانت $A_\lambda \in \tau$ لكل $\lambda \in \Lambda$ فإن $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$

و يسمى الثنائي (X,τ) فضاء تبولوجيا (Topological space). سوف نكتب X بدلاً من (X,τ) في حالة عدم وجود التباس. عناصر المجموعة τ تسمى بالمجموعات المفتوحة (Open Sets) ومكملاتها تسمى بالمجموعات المغلقة (Closed Sets)، بعبارة أخرى إذا كانت $A \subseteq X$ فيقال عن A بأنها مجموعة مفتوحة في X إذا كانت $A \in \tau$ ويقال عن A بأنها مجموعة مغلقة في X إذا كانت A^c مجموعة مفتوحة في X.

من التعريف مباشرةً نستنتج الآتي :

1. كل من ϕ, X مجموعة مفتوحة في X
2. إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجوعات مفتوحة في X فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مفتوحة X.
3. إذا كانت A_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda \in \Lambda$ فان $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ تكون مجموعة مفتوحة في X.

وباستخدام قانوني دي موركان نستنتج الآتي

1. كل من ϕ, X مجموعة مغلقة في X

2. إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعات مغلقة في X فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مغلقة في X.

3. إذا كانت A_λ ،لكل $\lambda \in \Lambda$ مجموعة مغلقة في X فان $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ تكون مجموعة مغلقة في X.

مثال(2.1.1)

ليكن $X = \{a,b,c\}$.

1. $\tau_1 = \{\phi, X\}$ تمثل تبولوجي على X وإن المجموعات المفتوحة في X هي فقط ϕ, X وكذلك المجموعات المغلقة في X هي أيضاً فقط X, ϕ.
2. $\tau_2 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ تمثل تبولوجي على X وان المجموعات المفتوحة في X هي $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X$ والمجموعات المغلقة في X هي $\phi, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X$.
3. $\tau_3 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$ تمثل تبولوجي على X وان المجموعات المفتوحة في X هي $X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \phi$ وكذلك المجموعات المغلقة في X هي $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X$
4. $\tau_4 = \{\{a\}, \{c\}, \{a,c\}, X\}$ لا تمثل تبولوجي على X لأن $\phi \notin \tau_4$
5. $\tau_5 = \{\phi, \{a\}\}$ لا تمثل تبولوجي على X لأن $X \notin \tau_5$
6. $\tau_6 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$ لا تمثل تبولوجي على X لأن $\{a\}, \{b\} \in \tau_6$ ولكن $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \tau_6$
7. $\tau_7 = \{\varphi, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$ لا تمثل تبولوجي على X لأن $\{a,b\}, \{a,c\} \in \tau_7$ ولكن $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \notin \tau_7$

مما تتقدم نستنتج على أنه يوجد أكثر من تبولوجي على مجموعة واحدة ، وكذلك المجموعات ممكن أن تكون مفتوحة ومغلقة في آن واحد وكذلك تكون غير مفتوحة وغير مغلقة .

مثال(3.1.1)

أوجد جميع التبولوجيات الممكنة على المجموعة $X = \{1,2\}$

الحل :

$$\tau_1 = \{\phi, X\}, \quad \tau_2 = \{\phi, \{1\}, X\}, \quad \tau_3 = \{\phi, \{2\}, X\}, \quad \tau_4 = \{\phi, \{1\}, \{2\}, X\}$$

من هذا المثال نستنتج على أن هذه التبولوجيات ليس من الضروري أن تربط بعلاقة ألاحتواء كما في τ_3, τ_2 حيث $\tau_3 \not\subseteq \tau_2, \quad \tau_2 \not\subseteq \tau_3$.

مثال(4.1.1)

ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ بحيث أن لكل $x \in A$ يوجد مجموعة مفتوحة G_x في X تحقق $x \in G_x \subseteq A$. نبرهن على أن A مجموعة مفتوحة في X

الحل :

لتكن $a \in A$ $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G_a في X بحيث أن $a \in G_a \subseteq A$

$\Leftarrow$ $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in A} G_a \subseteq A$ $\Leftarrow$ $A = \bigcup_{a \in A} G_a$

بما أن $\bigcup_{a \in A} G_a$ مجموعة مفتوحة في X لأنها اتحاد مجموعات مفتوحة في X $\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة .

تعريف(5.1.1)

ليكن من τ_1, τ_2 تبولوجي على المجموعة X . يقال عن τ_1 بأنه أضعف (Weaker) أو أخشن (Coarser) أو أقل (Smaller) من τ_2 . أو يقال عن τ_2 بأنه أقوى (Stronger) أو أنعم (Finer) أو أكبر(Larger) من τ_1 إذا كان $\tau_1 \subseteq \tau_2$. ويقال عن τ_1, τ_2 بأنهما قابلان للمقارنة(Comparable) إذا كان $\tau_1 \subset \tau_2$ أو $\tau_2 \subset \tau_1$.

مثال(6.1.1)

لتكن $X = \{1,3,5\}$ وليكن $\tau_1 = \{\phi, \{3\}, X\}$ و $\tau_2 = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, X\}$ نلاحظ أن كل من τ_1, τ_2 تبولوجي على X وأن $\tau_1 \subseteq \tau_2$ وعليه τ_1 أخشن من τ_2، أي أن τ_2 أنعم من τ_1.

مثال(7.1.1)

أوجد ثلاث تبولوجيات غير قابلة للمقارنة مثنى مثنى على المجموعة $X = \{a,b,c\}$

الحل :

$\tau_1 = \{\phi, \{a\}, X\}, \quad \tau_2 = \{\phi, \{b\}, X\}, \quad \tau_3 = \{\phi, \{c\}, X\}$

المثال الآتي يوضح أن تقاطع التبولوجيات على مجموعة واحدة يكون أيضاً تبولوجياً على تلك المجموعة ولكن الاتحاد ليس بالضرورة .

مثال (8.1.1)

ليكن كل من τ_1, τ_2 تبولوجي على مجموعة X فان $\tau_1 \cap \tau_2$ يكون أيضاً تبولوجي على X ولكن $\tau_1 \cup \tau_2$ ليس بالضرورة أن يكون تبولوجي على X

الحل :

1. بما أن $\phi, X \in \tau_1$, $\phi, X \in \tau_2$ $\Leftarrow$ $\phi, X \in \tau_1 \cap \tau_2$

2. لتكن $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau_1 \cap \tau_2$ $\Leftarrow$ $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau_1$ و $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau_2$

بما أن كل من τ_1, τ_2 تبولوجي على X $\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_1$ و $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_2$ $\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_1 \cap \tau_2$

3. ليكن $A_\lambda \in \tau_1 \cap \tau_2$ لكل $\lambda \in \Lambda$ $\Leftarrow$ $A_\lambda \in \tau_1$ و $A_\lambda \in \tau_2$ لكل $\lambda \in \Lambda$

بما أن كل من τ_1, τ_2 تبولوجي على X $\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_1$ و $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_2$

$\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_1 \cap \tau_2$ وعليه $\tau_1 \cap \tau_2$ تبولوجي على X .

الآن نبين $\tau_1 \cup \tau_2$ ليس بالضرورة أن يكون تبولوجي على X .

لتكن $X = \{a,b,c\}$, $\tau_1 = \{\phi, \{a\}, X\}$, $\tau_2 = \{\phi, \{b\}, X\}$

لاحظ أن كل من τ_1 , τ_2 تبولوجي على X ولكن $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, X\}$ ليس تبولوجي على X لأن $\{a\}, \{b\} \in \tau_1 \cup \tau_2$ ولكن $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

الآن نتطرق إلى أنواع خاصة من التبولوجي وكما في الأمثلة الآتية .

مثال(9.1.1)

لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $\tau = \{\phi, X\}$ فان τ يكون تبولوجي على X ويسمى بالتبولوجي المتماسك (Indiscrete Topology) وان الثنائي (X,τ) يسمى فضاء تبولوجي متماسك (Indiscrete Topology Space) . المجموعات المفتوحة في X هي فقط ϕ, X وكذلك المجموعات المغلقة فيه فقط ϕ, X أيضاً . وإن هذا التبولوجي يكون أخشن من كل تبولوجي معرف على X .

مثال(10.1.1)

لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $\tau_D = P(X)$ ، أي أن $\tau_D = \{A : A \subseteq X\}$ ، ($A \in \tau$ إذا وفقط إذا كانت $A \subseteq X$) فان τ_D يكون تبولوجي على X ويسمى بالتبولوجي المبعثر (Discrete Topology) وإن الثنائي (X,τ_D) يسمى فضاء تبولوجي مبعثر (Discrete Topology Space) وإن هذا التبولوجي انعم من كل تبولوجي معرف على X .

الحل :

1. بما أن $\phi, X \subseteq X \Leftarrow \phi, X \in \tau_D$.
2. بما أن تقاطع أي عدد منتهي من مجموعات جزئية من X هو أيضاً مجموعة جزئية من X البديهية الثانية(من تعريف التبولوجي) متحققة .
3. بما أن إتحاد أي عائلة من المجموعات الجزئية من X هو أيضاً مجموعة جزئية من X فان البديهية الثالثة كذلك متحققة .

في هذا التبولوجي كل مجموعة جزئية من X تكون مفتوحة ومغلقة في آن واحد .
مثلاً لو أخذنا $X = \{a,b,c\}$ فأن التبولوجي المبعثر على X هو

$$\tau_D = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$$

مثال(11.1.1)

لتكن X مجموعة غير خالية وليكن τ عائلة جميع المجموعات الجزئية من X والتي مكملاتها مجموعات منتهية وبالإضافة إلى المجموعة الخالية , أي أن $\tau = \{A \subseteq X : \text{مجموعة منتهية } A^c\} \cup \{\phi\}$ فأن τ يكون تبولوجي على X ويسمى تبولوجي المكمل المنتهي (Co-finite Topology) أو (Finite Complement Topology). بالإضافة إلى ذلك إذا كانت X قابلة للعد فأن τ يكون مبعثر .

الحل :

1. $\phi \in \tau$ (حسب التعريف)

بما أن $X^c = \phi$ وان ϕ مجموعة منتهية $\Leftarrow X \in \tau$

2. ليكن $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau$ $\Leftarrow$ $A_1^c, A_2^c, \cdots, A_n^c$ مجموعات منتهية وعليه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$ مجموعة منتهية .

ولكن $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$ $\Leftarrow$ $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c$ مجموعة منتهية $\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

3. ليكن $A_\lambda \in \tau$ لكل $\lambda \in \Lambda$ $\Leftarrow$ A_λ^c مجموعة منتهية لكل $\lambda \in \Lambda$

$\Leftarrow$ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ مجموعة منتهية

ولكن $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ $\Leftarrow$ $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$ مجموعة منتهية $\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$

وعليه τ تبولوجي على X.

وبصورة خاصة إذا كانت X مجموعة منتهية فأن τ يكون مبعثر

لأن إذا كانت $A \subseteq X$ فإن $A^c \subseteq X$

بما أن X منتهية $\Leftarrow$ A^c منتهية وعليه $A \in \tau$

مثال(12.1.1)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن τ عائلة جميع المجموعات الجزئية من X والتي مكملاتها مجموعة قابلة للعد بالإضافة للمجموعة الخالية، أي أن

$$\tau = \{A \subseteq X : \text{مجموعة قابلة للعد } A^c\} \cup \{\phi\}$$

فان τ تبولوجي على X ويسمى التبولوجي المكمل القابل للعد(Co-countable Topology)

الحل :

بنفس ألأسلوب المستخدم في المثال (11.1.1).

مثال (13.1.1)

لتكن $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية نعرف $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \{m, m+1, m+2, \cdots\}$, وليكن $\tau = \{A_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{\phi\}$

برهن على أن τ تبولوجي على $\mathbb{N}$

الحل :

1. $\phi \in \tau$

بما أن $A_1 = \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $\mathbb{N} \in \tau$

2. لتكن $A_{m_1}, \cdots, A_{m_n} \in \tau$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_{m_i} = A_{m_j} \in \tau$ حيث $m_i \le m_J$ لكل $i = 1, 2, 3, \cdots, n$

3. لتكن $A_\lambda \in \tau$ لكل $\lambda \in \Lambda$

بما أن $\mathbb{N}$ مجموعة مرتبة ترتيب حسن $\Leftarrow$ $\mathbb{N}$ تحتوي على عنصرا صغر وليكن m_0

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{m_0, m_0+1, m_0+2, \cdots\} = A_{m_0} \in \tau$$

$\Leftarrow$ τ تبولوجي على $\mathbb{N}$.

مثال(14.1.1)

لتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن τ_u عائلة جميع المجموعات الجزئية G من $\mathbb{R}$ والتي تحقق الخاصية الآتية

لكل $x \in G$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq G$

بالإضافة إلى **المجموعة الخالية** ϕ أي أن

$$\tau_u = \{G \subseteq \mathbb{R} : \forall x \in G \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; with \;\; (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset G\} \cup \{\phi\}$$

فأن τ_u تبولوجي على $\mathbb{R}$ ويسمى التبولوجي الاعتيادي (Usual Topology) والثنائي $(\mathbb{R}, \tau_u)$ يسمى فضاء تبولوجي اعتيادي (Usual Topological Space)

الحل :

1. $\phi \in \tau_u$ (حسب التعريف)

ليكن $x \in \mathbb{R}$

بما أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ لكل $\varepsilon > 0$ $\Leftarrow$ $\mathbb{R} \in \tau_u$

2. ليكن $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau_u$

إذا كان $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \phi$ فان $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_u$

أما إذا كان $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \phi$ ، ليكن $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ $\Leftarrow$ $x \in A_i$ لكل $i = 1, 2, 3, \cdots, n$

اذن يوجد $\varepsilon_i > 0$ بحيث أن $(x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i) \subseteq A_i$ لكل $i = 1, 2, \cdots, n$

ليكن $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ $\Leftarrow$ $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (x-\varepsilon_i, x+\varepsilon_i)$ لكل $i = 1, 2, \cdots, n$

وعليه $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ $\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_u$

3. ليكن $A_\lambda \in \tau_u$ لكل $\lambda \in \Lambda$ وليكن $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ $\Leftarrow$ $x \in A_\lambda$ لبعض $\lambda \in \Lambda$

بما أن $A_\lambda \in \tau_u$ $\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A_\lambda$

$\Leftarrow$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_u$ $\Leftarrow$ τ_u تبولوجي على $\mathbb{R}$.

مثال (15.1.1)

في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R}, \tau_n)$ برهن على أن

1. كل فتره مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة .
2. كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ تكون مفتوحة إذا فقط إذا كان تساوي اتحاد فترات مفتوحة
3. كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ وتحتوي على عنصر واحد فقط تكون مغلقة وعليه كل المجموعات الجزئية المنتهية من $\mathbb{R}$ تكون مغلقة .
4. كل فترة مغلقة تكون مجموعة مغلقة .

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

الحل :

1. لتكن $G=(a,b)$ فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$. يجب أن نبرهن G مجموعة مفتوحة
ليكن $x\in G$. نضع $\varepsilon=\min\{x-a,b-x\}$ بسهولة يمكن إثبات $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq G$
وعليه $G=(a,b)$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.
2. لتكن $A\subseteq\mathbb{R}$ إذا كانت $A=\phi$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $A\neq\phi$
نفرض A مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$
لكل $x\in A$ يوجد $\varepsilon_x>0$ بحيث أن $(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)\subseteq A$
بما أن $x\in(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x) \Leftarrow A\subseteq\bigcup_{x\in A}(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)\subseteq A$ وعليه $A=\bigcup_{x\in A}(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$
أي أن A تساوي اتحاد فترات مفتوحة .
آما الاتجاه الأخر فتحصل عليه من (1) في نفس المثال.
3. لتكن $A=\{a\} \Leftarrow A^c=(-\infty,a)\cup(a,\infty)$
بما أن كل من $(-\infty,a)$, (a,∞) مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R} \Leftarrow A^c$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.
وعليه A مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$.
4. لتكن $A=[a,b] \Leftarrow A^c=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$
$\Leftarrow A^c$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$، وعليه أي A مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$.

مثال(16.1.1)

لتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية، τ_u تبولوجي اعتيادي على $\mathbb{R}$ وليكن τ تبولوجي مكمل المنتهي على $\mathbb{R}$. برهن على أن τ اخشن من τ_u. ثم بين هل أن العكس صحيح ؟.

الحل :-

لتكن $A\in\tau \Leftarrow A^c$ مجموعة منتهية $\Leftarrow A^c$ مغلقة بالنسبة إلى τ_u (انظر المثال(15.1.2))
$\Leftarrow A$ مفتوحة بالنسبة إلى $\tau_u \Leftarrow A\in\tau_u \Leftarrow \tau\subset\tau_u$.
أما بالنسبة للعكس
لتكن $A=(2,5) \Leftarrow A\in\tau_u$ ولكن $A\notin\tau$ لان $A^c=(-\infty,2]\cup[5,\infty)$ مجموعة غير منتهية.

تمارين (1.1)

1. اذكر جميع التبولوجيات الممكن تعريفها على المجموعة $X=\{a,b,c\}$
2. هل أن التقاطع غير منتهي للمجموعات المفتوحة في فضاء تبولوجي X تكون أيضا مجموعة مفتوحة في X؟
بين ذلك مع ذكر البرهان.
3. هل أن الاتحاد غير المنتهي للمجموعات المغلقة في قضاء تبولوجي X تكون أيضا مجموعة مغلقة في X ؟
بين ذلك مع ذكر البرهان.

نظرية :3 مناقشة :1 عدد وحدات :3

4. لتكن $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن $A_m=\{1,2,...,m\}$ ، $m\in\mathbb{N}$. برهن على أن $\tau=\{A_m : m\in\mathbb{N}\}\cup\{\phi,\mathbb{N}\}$ يكون تبولوجي على $\mathbb{N}$.

5. لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $x\in X$ برهن على إن $\tau_x=\{A\subseteq X : x\notin A\}\cup\{X\}$ يكون تبولوجي على X.

6. لتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية.برهن على أن $\tau_1=\{(r,\infty): r\in\mathbb{R}\}\cup\{\phi,\mathbb{R}\}$ يكون تبولوجي على $\mathbb{R}$ (هذا التبولوجي يسمى تبولوجيا شعاع أيمن(Right Ray Topology) وبينما $\tau_2=\{(r,\infty): r\in\mathbb{Q}\cup\{\phi,\mathbb{R}\}$ ليس تبولوجي على $\mathbb{R}$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية .

7. لتكن $\Re$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية برهن على أن $\tau=\{(-\infty,a): a\in\mathbb{R}\}\cup\{\phi,\mathbb{R}\}$ يكون تبولوجي على $\mathbb{R}$ (هذا التبولوجي يسمى تبولوجيا شعاع أيسر (Left Ray Topology).

8. لتكن $\mathcal{F}=\{\tau_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ عائلة من التبولوجيات على المجموعة X. برهن على أن $\mathcal{F}$ لها اصغر قيد أعلى (sup) وكذلك لها اكبر قيد أدنى (inf).

9. لتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية .ولتكن τ_2 عائلة جميع المجموعات غير الخالية G من $\mathbb{R}$ والتي تحقق الخاصية الآتية : لكل $x\in G$ توجد فترة نصف مفتوحة من اليمين $[a,b)$ بحيث أن $x\in[a,b)\subseteq G$.
برهن على τ_2 تبولوجي على $\mathbb{R}$ (يسمى تبولوجي النهاية الدنيا (Lower Limit Topology) وكذلك يسمى تبولوجي فترة نصف مفتوحة من اليمين (Right Half Open Interval Topology) وبالمثل نستطيع أن نعرف تبولوجيا النهاية العليا (Lower Limit Topology) وذلك باستبدال الخاصية أعلاه بالشكل : لكل $x\in G$ توجد فترة نصف مفتوحة من اليسار $[a,b)$ بحيث أن $x\in(a,b]\subseteq G$ وإذا كان τ يمثل التبولوجي الاعتيادي على $\Re$. هل توجد علاقة بين التبولوجيات العلاقة τ_u,τ_1,τ ؟ لماذا.

10. لتكن $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة ولتكن $G_p=\{p+2i : i\in\mathbb{Z}\}$ ، $p\in\mathbb{Z}$. برهن على أن $\tau=\{G_p : p\in\mathbb{Z}\}\cup\{\phi\}$ يكون تبولوجي على $\mathbb{Z}$.

11. لتكن $\{\tau_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ عائلة من التبولوجيات على المجموعة X. برهن على أن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\tau_\lambda$ يكون أيضا تبولوجيا على X.

12. لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $\mathcal{F}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X بحيث أن
1. $\phi,X\in\mathcal{F}$
2. إذا كانت $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$ فان $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{F}$
3. إذا كانت $A_\lambda\in\mathcal{F}$ لكل $\lambda\in\Lambda$ فان $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\mathcal{F}$

برهن على انه يوجد تبولوجي وحيد على X بحيث المجموعات المغلقة في X هي عناصر $\mathcal{F}$.

2.1 الجوارات Neighborhoods

هناك مفهوم أولي أخر يمكن أن يستخدم لتعريف التبولوجيا وهو مفهوم جوار النقطة والذي غالبا ما يكون أكثر ملائمة من مفهوم المجموعة المفتوحة.

تعريف(1.2.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ، ولتكن $V\subseteq X$. يقال عن V بأنه جوار (Neighborhood) للنقطة $x\in X$ إذا وجد مجموعة مفتوحة G في X $(G\in\tau)$، بحيث أن $x\in G\subseteq V$. ويرمز لجوار النقطة x بالرمز V_x. يطلق على عائلة جوارات النقطة $x\in X$ بنظام الجوارات (Neighborhoods System) . ويرمز له بالرمز $N(x)$. وبالمثل يقال أن $V\subseteq X$ بأنه جوار للمجموعة $A\subseteq X$ إذا وجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $A\subseteq G\subseteq V$

مثال (2.2.1)

ليكن $X=\{1,2,3,4,5\}$ وليكن $\tau=\{\phi,\{1\},\{1,2\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\},X\}$

نلاحظ أن τ تبولوجي على X وان

$$N(1)=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,4,5\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},X\}$$

نلاحظ أن الجوار ليس بالضرورة أن يكون مجموعة مفتوحة . مثلا المجموعة $\{1,3\}$ جوار إلى 1 ولكنها ليست مفتوحة.

$N(3)=\{\{1,3,4\},\{1,2,3,4\},\{1,3,4,5\},X\},\quad N(5)=\{\{1,2,5\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},X\}$

مثال(3.2.1)

1. ليكن (X,τ_D) فضاء تبولوجي مبعثر، فان $N(x)=\{A\subseteq X: x\in A\}$ لكل $x\in X$ لان كل مجموعة جزئية من X وتحتوي على x تكون جوار إلى النقطة x.
2. ليكن (X,τ_I) فضاء تبولوجي متماسك فان $N(x)=\{X\}$ لكل $x\in X$ لان الجوار إلى آية نقطة $x\in X$ هو فقط المجموعة X

مثال (4.2.1)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $V\subseteq\mathbb{R}$.فان V تكون جوار إلى النقطة $x\in\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b) في $\mathbb{R}$ بحيث أن $x\in(a,b)\subseteq V$

الحـــل :

نفرض V جوار إلى النقطة x ⇐ توجد مجموعة مفتوحة G في $\mathbb{R}$ بحيث أن $x\in G\subset V$. بما أن كل مجموعة مفتوحة هي اتحاد لفترات مفتوحة في $\Re$ ⇐ G تساوي اتحاد فترات مفتوحة وعليه توجد فترة مفتوحة (a,b) بحيث أن $x\in(a,b)\subseteq G$. أما الاتجاه المعاكس فانه واضح لان كل فترة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

وأيضا يكون V جوار إلى النقطة $x\in\mathbb{R}$ إذا وجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq V$.

مبرهنة(5.2.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A\subseteq X$. فان A تكون مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا كانت جورا لكل نقطة من نقاطها.

البرهان :

نفرض A مجموعة مفتوحة في X، ولتكن $x \in A$

بما أن $A \subseteq A \ni x \Leftarrow$ جوار إلى النقطة x وعليه A جوار لكل نقطة من نقاطها .

الاتجاه الأخر . نفرض A جوار لكل إلى نقطة من نقاطها. $\Leftarrow \quad A \neq \phi$ (حسب تعريف الجوار)

ليكن $x \in A$ توجد مجموعة مفتوحة G_x في X بحيث أن $x \in G_x \subseteq A$

ولكن $\Leftarrow \quad A = \bigcup_{x \in A} G_x \quad \Leftarrow \quad A$ مجموعة مفتوحة في X.

نتيجة (6.2.1)

إذا كان كل من τ_1, τ_2 تبولوجي على المجموعة X وكان لهم نفس نظام الجوارات لنقاط X فإن $\tau_1 = \tau_2$.

البرهان :

لتكن $A \in \tau_1 \quad \Leftarrow \quad A$ مجموعة مفتوحة في X بالنسبة إلى τ_1

$\Leftarrow \quad A$ جوار لكل نقطة من نقاطها بالنسبة إلى τ_1

$\Leftarrow \quad A$ جوار لكل نقطة من نقاطها بالنسبة إلى τ_2

$\Leftarrow \quad A$ مجموعة مفتوحة في X بالنسبة إلى τ_2 أي أن $A \in \tau_2$

$\Leftarrow \quad \tau_1 \subseteq \tau_2$. بالمثل نبرهن $\tau_2 \subseteq \tau_1$ وعليه $\tau_1 = \tau_2$

مبرهنة (7.2.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $x \in X$

1. $N(x) \neq \phi$
2. إذا كان $V \in N(x)$ فان $x \in V$
3. إذا كان $V \in N(x)$ وكان $V \subset U$ فان $U \in N(x)$
4. إذا كان $U, V \in N(x)$ فان $U \cap V \in N(x)$
5. إذا كان $V \in N(x)$ فانه يوجد $U \in N(x)$ بحيث أن $U \subseteq V$ وان $U \in N(y)$ لكل $y \in U$

البرهان :

1. بما إن X مجموعة مفتوحة في X، $\Leftarrow \quad X$ جوار لجميع نقاطها

$\Leftarrow \quad X \in N(x) \quad \Leftarrow \quad N(x) \neq \phi$

2. بما إن $V \in N(x) \quad \Leftarrow \quad V$ جوار إلى النقطة $x \quad \Leftarrow \quad x \in V$ (حسب تعريف الجوار)

3. بما إن $V \in N(x) \quad \Leftarrow \quad V$ جوار إلى النقطة $x \quad \Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subseteq V$

بما إن $V \subseteq U \quad \Leftarrow \quad x \in G \subseteq U \quad \Leftarrow \quad U$ جوار إلى النقطة $x \quad \Leftarrow \quad U \in N(x)$

4. بما إن $U, V \in N(x) \quad \Leftarrow$ كل من U, V جوار إلى النقطة x.

$\Leftarrow$ توجد مجموعات مفتوحة G_1, G_2 في X بحيث أن $x \in G_1 \subset U , \quad x \in G_2 \subset V$

$\Leftarrow \quad x \in G_1 \cap G_2 \subseteq U \cap V$

بما أن $G_1 \cap G_2$ مجموعة مفتوحة في X. $\Leftarrow$ $U \cap V$ جوار إلى النقطة x $\Leftarrow$ $U \cap V \in N(x)$

5. بما أن $V \in N(x)$ $\Leftarrow V$ جوار إلى النقطة $x \Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة U في X بحيث إن $x \in U \subset V$

بما إن U مجموعة مفتوحة في X وان $x \in U$ $\Leftarrow$ U جوار إلى النقطة x $\Leftarrow$ $U \in N(x)$ وعلية U جوار إلى كل نقطة من نقاطها، أي أن $U \in N(y)$ لكل $y \in U$.

من المبرهنة السابقة وباستخدام الخاصية (4) إذا كانت $V_i \in N(x)$ ، $i = 1, 2, \cdots, n$ فان $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in N(x)$

المبرهنة التالية تبين كيفية استخدام الترميزات الأولية (Primitive Notion) للجوار لتعريف تبولوجي على مجموعة.

مبرهنة (8.2.1)

لتكن X مجموعة غير خالية ، ولتكن $N(x)$ عائلة من المجموعات الجزئية من X تحقق الشروط الآتية

1. $N(x) \neq \phi$
2. إذا كان $V \in N(x)$ فان $x \in V$
3. إذا كان $V \in N(x)$ وكان $V \subset U$ فان $U \in N(x)$
4. إذا كان $U, V \in N(x)$ فان $U \cap V \in N(x)$
5. إذا كان $V \in N(x)$ فانه يوجد $U \in N(x)$ بحيث أن $U \subset V$ وان $U \in N(y)$ لكل $y \in U$.

فانه توجد تبولوجيا وحيد τ على X وإذا كانت $N^*(x)$ تمثل نظام الجوارات للنقطة x فان $N(x) = N^*(x)$ لكل $x \in X$.

البرهان :

تعرف التبولوجيا τ كالأتي : $A \in \tau$ إذا وفقط إذا كانت $A \in N(x)$ لكل $x \in A$

يجب أن نبرهن τ تبولوجي على X.

1. بما أن ϕ لا تحتوي على أي عنصر $\phi \in N(x)$ لكل $x \in \phi$ عبارة صحيحة $\Leftarrow$ $\phi \in \tau$.

بما أن $N(x) = \phi$ لكل $x \in X \Leftarrow$ يوجد على الأقل $V_x \in N(x)$

بما أن $V_x \subset X \Leftarrow$ حسب الشرط (3) نحصل على $X \in N(x)$ لكل $x \in X$. $\Leftarrow X \in \tau$.

2. ليكن $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau$ $\Leftarrow$ $A_i \in N(x)$ لكل $x \in A_i$ ، $i = 1, 2, \cdots, n$

$\Leftarrow \quad x \in A_i$ (حسب شرط 2) لكل $i = 1, 2, \cdots, n$ $\Leftarrow$ $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

حسب الشرط (4) نحصل على $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in N(x)$ لكل $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ $\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

3. لتكن $A_\lambda \in \tau$ لكل $\lambda \in \wedge$

$\Leftarrow \quad A_\lambda \in N(x)$ لكل $x \in A_\lambda$ ولكل $\lambda \in \Lambda$

$\Leftarrow \quad A_\lambda \in N(x)$ لكل $x \in \bigcup_{\lambda \in \wedge} A_\lambda$

بما أن $A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ $\Leftarrow$ حسب الشرط (3) نحصل على $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in N(x)$ لكل $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$

$\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$ $\Leftarrow$ τ تبولوجي على X.

ألان نبرهن $N(x) = N^*(x)$

ليكن $V \in N(x)$ $\Leftarrow$ حسب الشرط (5)، يوجد $U \in N(x)$ بحيث أن $U \in N(y), U \subseteq V$ لكل $y \in U$

$U \in N(x)$ لكل $x \in U$ $\Leftarrow$ $U \in \tau$

$\Leftarrow$ U مجموعة مفتوحة في X بحيث $x \in U \subseteq V$ $\Leftarrow$ V جوار إلى x $\Leftarrow V \in N^*(x)$

$\Leftarrow$ $N(x) \subseteq N^*(x)$

نفرض $V \in N^*(x) \Leftarrow V$ جوار إلى النقطة $x \Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subset V$

بما إن $G \in \tau$ $\Leftarrow$ $G \in N(x)$ لكل $x \in G$

بما أن $G \in N(x)$, $G \subset V \Leftarrow$ حسب الشرط (3) نحصل على $V \in N(x)$

$\Leftarrow$ $N^*(x) \subset N(x) \Leftarrow N(x) = N^*(x)$.

ويمكن إثبات وحدانية τ باستخدام النتيجة (6.2.2)

مبرهنة (9.2.1)

لتكن X مجموعة غير خالية ولكل $x \in X$ نفرض $N(x)$ تمثل عائلة من المجموعات الجزئية من X والتي تحتوي على x. فان $N(x)$ تحقق الشروط في المبرهنة (8.2.2) وتحدد تبولوجي مستحث على X.

البرهان

1. بما أن $X \neq \phi$ $\Leftarrow$ يوجد على الأقل $x \in X$

بما أن $x \in X$ $\Leftarrow$ $X \in N(x)$ $\Leftarrow$ $N(x) \neq \phi$

2. لتكن $V \in N(x)$ $\Leftarrow$ حسب الفرض أن V مجموعة جزئية من X وتحتوي على x

$\Leftarrow$ $x \in V$

3. ليكن $V \in N(x)$ وليكن $V \subseteq U \subseteq X$

بما أن $V \in N(x)$ $\Leftarrow$ $x \in V$

بما أن $V \subset U$ $\Leftarrow$ $x \in U$ $\Leftarrow$ U مجموعة جزئية من X وتحتوي على $x \Leftarrow$ $U \in N(x)$

4. ليكن $U, V \in N(x)$ $\Leftarrow$ $x \in V,\ \ x \in U$ $\Leftarrow$ $x \in U \cap V$ $\Leftarrow$ $U \cap V \in N(x)$

5. ليكن $V \in N(x)$ $\Leftarrow$ حسب الفرض V يحقق الخاصية : $N \in N(x)$ لكل $x \in N$

الشروط الموجود في المبرهنة (8.2.2) متحققة.

ألان نعرف التبولوجي τ كالأتي : $A \in \tau$ إذا وفقط إذا كانت $A \in N(x)$ لكل $x \in A$

$\Leftarrow$ τ تبولوجي على X (حسب المبرهنة 8.2.1).

تمارين(2.1)

1. لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ وليكن $\tau=\{\phi,\{b\},\{b,c\},a,b,c,\{b,d,e\},\{b,c,d,e\},X\}$
جد جميع الجوارات للنقطة a وكذلك للنقطة d.
2. لتكن $X=\{a,b,c\}$ وليكن $\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ بين أي من المجموعات التالية الجزئية من X تكون جوار للنقطة c.
ا. $\{a,b\}$ ب. $\{b,c\}$ ج. X
3. ليكن $X=\{a,b,c\}$ ولتكن $N(a)=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\},N(b)=\{\{a,b\},X\},N(c)=\{\{a,c\},X\}$
أ. برهن على أن كل من $N(a),N(b),N(c)$ تحقق الشروط في المبرهنة (9.2.1)
ب. ليكن يمثل التبولوجي على X المتولد بواسطة $N(a),N(b),N(c)$. اوجد جميع المجوعات المفتوحة في بالنسبة إلى τ.
ج. اوجد جميع الجوارات للنقاط a,b,c ثم بين مطابقتها مع $N(a),N(b),N(c)$ على الترتيب.
4. ليكن $X=\{a,b,c\}$ ولتكن $N(a)=\{X\},N(b)=\{\{b\},\{b,c\},X\},N(c)=\{\{a,c\},X\}$
بين في ما إذا كان كل من $N(a),N(b),N(c)$ تحقق الشروط في المبرهنة (9.2.1)
5. لتكن X مجموعة غير خالية وليكن لكل $x\in X$، نفرض $N(x)$ تمثل عائلة غير خالية من المجموعات الجزئية من X التي تحقق الشروط الآتية
ا. إذا كان $V\in N(x)$ فان $x\in V$
ب. أذا كان $U,V\in N(x)$ فان $U\cap V\in N(x)$، وليكن τ تحتوي على المجموعة الخالية الجزئية غير الخالية G من X والتي تمتلك الخاصية الآتية : لكل $x\in G$ فانه يوجد $V\in N(x)$ بحيث أن $x\in V\subset G$
برهن على أن τ تبولوجي على X.
6. ليكن $X=\{a,b,c\}$ وليكن $N(a)=\{\{a\},\{a,c\}\},N(b)=\{\{b\},\{b,c\}\},N(c)=\{X\}$
ا. برهن على أن كل من $N(a),N(b),N(c)$ تحقق الشرطين في التمرين (5.2.2) أعلاه
ب. أذا كان τ يمثل التبولوجي على X المتولد بواسطة $N(a),N(b),N(c)$ جد جميع المجموعات المغلقة في X بالنسبة إلى τ.
7. ليكن $X=\{a,b,c\}$ وليكن $N(a)=\{X\},N(b)=\{\{b,c\},X\}\},N(c)=\{\{c\},\{a,c\}\}$
برهن على أن كل من $N(a),N(b),N(c)$ تحقق لشرطين في التمرين (5.2.1) أعلاه.

3.1 القواعد التبولوجية Bases of Topology

تعريف (1.3.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $\beta \subseteq \tau$. يقال عن β بأنها قاعدة (Basis) للتبولوجي τ إذا كان كل من عناصر τ مساوياً لاتحاد عدد من عناصر β. أي أن لكل $A \in \tau \Leftarrow A = \cup V_i$ لبعض $V_i \in \beta$. ويقال أن τ متولد (generated) بواسطة β.

مثال(2.3.1)

ليكن $X = \{a,b,c,d\}$، $\tau = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},X\}$ ولتكن $\beta = \{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ فان β تكون قاعدة إلى τ لان $\beta \subseteq \tau$ وان $V_\lambda \in \beta$ ، $\phi = \bigcup_{\lambda\in\phi} V_\lambda$

$\{a\},\{b\} \in \beta, \quad \{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}, \quad \{c,d\} \in \beta$

$\{a,c,d\} = \{a\} \cup \{c,d\}, \quad \{b,c,d\} = \{b\} \cup \{c,d\}$

$X = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c,d\}$

ملاحظة

القاعدة إلى التبولوجي ليس بالضرورة أن تكون تبولوجي (انظر المثال السابق).

مثال(3.3.1)

ليكن $X = \{a,b,c\}$ وليكن $\tau = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$

1. $\beta_1 = \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ ليست قاعدة إلى τ لان $\beta_1 \not\subset \tau$.
2. $\beta_2 = \{\{a\},\{a,b\}\}$ ليست قاعدة إلى τ لان $\{b\} \in \tau$ ولكنه لا يساوي اتحاد عناصر من β_2.
3. $\beta_3 = \{\{a\},\{b\},X\}$ ليست قاعدة إلى τ لان $\beta_3 \subseteq \tau$.

$\phi = \bigcup_{\lambda\in\phi} V_\lambda \quad , \quad V_\lambda \in \beta_3$

$\{a\},\{b\}, \quad X \in \beta, \quad \{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}$

$\Leftarrow$ β_3 قاعدة إلى τ

مثال(4.3.1)

لتكن $X = \{a,b,c\}$ ولتكن $\beta = \{\{a,c\},\{b,c\}\}$ برهن على أن β ليست قاعدة لأي تبولوجي τ على X.

الحل:

سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض β قاعدة إلى التبولوجي τ

$\beta \subset \tau \Leftarrow \{a,c\},\{b,c\} \in \tau \Leftarrow \{a,c\} \cap \{b,c\} = \{c\} \in \tau$

ولكن $\{c\}$ لا يمكن أن تساوي اتحاد عدد من عناصر β. وهذا تناقض $\Leftarrow$ β ليست قاعدة.

مبرهنة (5.3.1)
ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $\beta\subset\tau$. فان β تكون قاعدة إلى التبولوجي τ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الأتي
لكل $x\in X$ ولكل جوار V_x إلى x توجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V\subseteq V_x$
البرهان :
نفرض β قاعدة إلى τ . ليكن $x\in X$ ولتكن V_x جوار إلى النقطة x.
$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة U في X بحيث إن $x\in U\subset V_x$
بما أن $U\in\tau$ $\Leftarrow$ U تساوي اتحاد عدد من عناصر β وعليه يوجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V\subset V_x$
وبصورة معاكسة. نفرض لكل نقطة $x\in X$ ولكل جوار لها V_x يوجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V\subseteq V_x$. يجب أن نبرهن على أن β قاعدة إلى τ.
لتكن $A\in\tau$. إذا كانت $A=\phi$ $\Leftarrow$ $\phi=\bigcup_{\lambda\in\phi}V_\lambda$ لكل $V_\lambda\in\beta$
أما إذا كانت $A\neq\phi$
بما أن A مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ A جوار لكل نقطة من نقاطها.
$\Leftarrow$ لكل $x\in X$ يوجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V\subset A$
لكل $x\in A$ يوجد $W_x\in\beta$ بحيث أن $x\in W_x\subseteq A$ وعليه $\Leftarrow$ $A=\bigcup_{x\in A}W_x$
$\Leftarrow$ A تساوي اتحاد عدد من عناصر β $\Leftarrow$ β قاعدة إلى τ.

مثال(6.3.1)
ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن β عائلة من جميع الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$ فان β تكون قاعدة للتبولوجي τ_u.
الحل:
بما أن كل فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ تكون مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\beta\subseteq\tau_u$
ليكن $x\in\mathbb{R}$ وليكن V جوار إلى x $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في $\mathbb{R}$ بحيث أن $x\in G\subset V$
بما أن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq G$
بما أن $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\beta$ $\Leftarrow$ β قاعدة للتبولوجي τ_u .

مثال(7.3.1)
ليكن (X,τ_D) فضاء تبولوجي مبعثر فان $\beta=\{\{x\}:x\in X\}$ تكون قاعدة للتبولوجي τ_D.
الحل:
بما أن $\{x\}$ مجموعة مفتوحة في X لكل $x\in X$ $\Leftarrow$ $\beta\subset\tau_D$
لتكن $x\in X$ وليكن V جوار للنقطة x $\Leftarrow$ $x\in\{x\}\subset V$.
بما أن $\{x\}\in\beta$ $\Leftarrow$ β قاعدة للتبولوجي τ_D.

مبرهنة (8.3.1)

ليكن كل من τ_1,τ_2 تبولوجي على مجموعة X ولتكن β قاعدة إلى كل من τ_1,τ_2 فان $\tau_1=\tau_2$.

البرهان

لتكن $A\in\tau_1$

ولتكن $x\in A$ $\Leftarrow$ A جوار لكل نقطة من نقاطها.

بما أن β قاعدة إلى τ_1 $\Leftarrow$ يوجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V\subseteq A$

بما أن β قاعدة إلى τ_2 $\Leftarrow$ $\beta\subseteq\tau_2$

بما أن $V\in\beta$ $\Leftarrow$ $V\in\tau_2$ $\Leftarrow$ A جوار إلى النقطة x بالنسبة للتبولوجي τ_2.

بما أن x نقطة لا على التعين $\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة بالنسبة τ_1 (حسب المبرهنة 5.2.2)

$\Leftarrow$ $A\in\tau_2$ $\Leftarrow$ $\tau_1\subseteq\tau_2$ وبالمثل نبرهن $\tau_2\subseteq\tau_1$ $\Leftarrow$ $\tau_1=\tau_2$.

ملاحظة

المبرهنة التالية تبين الشرط الضروري والكافي لكي تكون عائلة β من المجموعات الجزئية من مجموعة X تمثل لتبولوجي ما على هذه المجموعة . ويسمى هذا التبولوجي بالتبولوجي المتولد بواسطة القاعدة β.

مبرهنة(9.3.1)

لتكن β عائلة من المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية X فان β تكون قاعدة لتبولوجي على X إذا وفقد إذا تحققت الشروط الآتية

1. لكل $x\in X$ توجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V$. بعبارة أخرى $X=\bigcup_{V_x\in\beta}V_x$

2. لكل $V_1,V_2\in\beta$ ولكل $x\in V_1\cap V_2$ يوجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V\subset V_1\cap V_2$. بعبارة أخرى تقاطع أي عنصرين من عناصر β يساوي اتحاد لعدد من عناصر β أي أن $V_1\cap V_2=\bigcup_{V_i\in\beta}V_i$.

البرهان :

نفرض β قاعدة إلى لتبولوجي τ على X

1. بما أن $X\in\tau$ $\Leftarrow$ X جوار إلى لكل نقطة من نقاطها

$\Leftarrow$ لكل $x\in X$ يوجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V\subseteq X$، أي أن $X=\bigcup_{V_x\in\beta}V_x$

2. لتكن $V_1,V_2\in\beta$ وليكن $x\in V_1\cap V_2$

بما أن $\beta\subseteq\tau$ $\Leftarrow$ $V_1,V_2\in\tau$ $\Leftarrow$ $V_1\cap V_2\in\tau$

$\Leftarrow$ $V_1\cap V_2$ جوار لكل نقطة من تقاطعها $\Leftarrow$ يوجد $V\in\beta$ بحيث $x\in V\subseteq V_1\cap V_2$.

الاتجاه الأخر : نفرض أن β عائلة من المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية X التي تحقق الشرطين (1) ، (2) .

ليكن τ عائلة جميع المجموعات الجزئية من X. والتي تساوي اتحاد عدد من عناصر β أي أن

$\tau=\{A\subseteq X : A$ تساوي اتحاد لعدد من عناصر $\beta\}$ $\Leftarrow$ $\tau=\{A\subseteq X : A=\bigcup_{A_i\in\beta}A_i\}$

سوف نبرهن أن τ تشكل تبولوجي على X وبالتالي β قاعدة لهذا التبولوجي

1. من التعريف والشرط (1) نحصل على $\phi=\bigcup_{\phi\in\beta}\phi$ ، $X\in\tau$، أي أن ϕ هي اتحاد المجموعات الخالية من β وعليه يكون $\phi, X\in\tau$.

2. ليكن $A,B\in\tau$ $\Leftarrow$ $A=\bigcup_{A_i\in\beta}A_i,\quad B=\bigcup_{B_j\in\beta}B_j$ وعليه $A\cap B=(\bigcup_{A_i\in\beta}A_i)\cap(\bigcup_{B_j\in\beta}B_j)=\cup(A_i\cap B_j)$

من الشرط(2) $A_i\cap B_j$ عبارة عن اتحاد عناصر من β . وعليه $A\cap B=\bigcup_{C_k\in\beta}C_k$ $\Leftarrow$ $A\cap B\in\tau$

3. لتكن $A_\lambda\in\tau$ لكل $\lambda\in\Lambda$ $\Leftarrow$ $A_\lambda=\bigcup_{A_{\lambda_i}\in\beta}A_{\lambda_i}$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\bigcup_{A_{\lambda_i}\in\beta}A_{\lambda_i})=\bigcup_{B_{\lambda_i}\in\beta}B_{\lambda_i}$

$\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\tau$ $\Leftarrow$ τ تبولوجي على X..وكذلك β قاعدة للتبولوجي τ (حسب مبرهنة (5.3.2)) والتبولوجي يكون وحيد (حسب المبرهنة (8.3.2)).

مثال(10.3.1)

ليكن $X=\{a,b,c,d\}$ ولتكن $\beta=\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$ جد تبولوجي τ على X بحيث أن تكون β قاعدة إلى τ .

$\phi=\bigcup_{\lambda\in\phi}V_\lambda,\quad V_\lambda\in\beta$

$\{a\}\cup\{a\}=\{a\},\quad \{b\}\cup\{b\}=\{b\},\quad \{a\}\cup\{b\}=\{a,b\},\quad \{b\}\cup\{c,d\}=\{b,c,d\}$

$\{c,d\}\cup\{c,d\}=\{c,d\},\quad \{a\}\cup\{c,d\}=\{a,c,d\},\quad \{a\}\cup\{b\}\cup\{c,d\}=X$

$\tau=\{\varphi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},X\}$

تعريف(11.3.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $\sigma\subseteq\tau$. يقال عن σ بأنها قاعدة جزئية (Subbasis) للتبولوجي τ إذا كانت عائلة التقاطعات المنتهية لعناصر σ تكون قاعدة للتبولوجي τ . أي أن

$\beta=\{V\subseteq X : V=\bigcap_{i=1}^{n}A_i\ , A_i\in\sigma\ , i=1,2,\cdots,n\}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ .

ومن التعريف نستنتج مباشرة على أن σ تكون قاعدة جزئية للتبولوجيا τ إذا وفقط إذا كان كل من عناصر τ مساوياً لاتحاد تقاطعات منتهية من عناصر σ .

مثال (12.3.1)

لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ ، $\tau=\{\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,c,d\},X\}$ برهن على أن $\sigma=\{\{a,c\},\{a,d\}\}$ تكون قاعدة جزئية للتبولوجيا τ .

البرهان :

$\{a,c\}\cap\{a,c\}=\{a,c\},\quad \{a,c\}\cap\{a,d\}=\{a\},\quad \{a,d\}\cap\{a,d\}=\{a,d\}$

$\Leftarrow$ $\beta=\{\{a\},\{a,c\},\{a,d\}\}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ وعليه σ تشكل قاعدة جزئية للتبولوجيا τ .

مثال (13.3.1)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن σ عائلة جميع الفترات المفتوحة وغير المقيدة (أي $(a,\infty),(-\infty,b)$ في $\mathbb{R}$ فان σ تكون قاعدة جزئية للتبولوجيا $\mathbb{R}$.

الحل

بما أن عائلة جميع التقاطعات المنتهية لعناصر σ تكون عائلة جميع الفترات المفتوحة في $\Re$ وإنها تشكل قاعدة للتبولوجيا τ_u وعليه σ تشكل قاعدة جزئية للتبولوجيا τ_u.

مبرهنة (14.3.1)

لتكن σ عائلة غير خالية من مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة X فان σ تكون قاعدة جزئية لتبولوجيا وحيد τ. (يسمى بالتبولوجي المتولد بواسطة σ).

البرهان :

لتكن β عائلة جميع التقاطعات المنتهية لعناصر σ. يجب أن نبرهن β قاعدة لتبولوجيا وحيد على X. أي نبرهن على أن β تحقق الشرطين في المبرهنة (9.3.1)

1. بما أن $X=\bigcap_{\lambda\in\phi}V_\lambda$, $V_\lambda\in\sigma \Leftarrow X=\bigcup_{V\in\beta}V$.(ليس بالضرورة ان يكون X احد عناصر σ)

2. ليكن $V_1,V_2\in\beta$ فان كلا من V_1 ، V_2 عبارة عن تقاطع عدد منتهي من عناصر σ
وبالتالي فان $V_1\cap V_2\in\beta$

وألان : ليكن $x\in V_1\cap V_2$ فان يوجد $A,B\in\beta$ بحيث أن $x\in A\cap B\subseteq V_1\cap V_2$ ،
وعليه فان β تحقق الشرط (2). $\Leftarrow$ β قاعدة لتبولوجيا على X.

وبفرض أن $\sigma=\{S_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ قاعدة جزئية لكل من التبولوجين τ ، τ^*
يجب أن نبرهن $\tau=\tau^*$ أي أن التبولوجي المتولد بالقاعدة الجزئية يكون وحيد.

ليكن $G\in\tau \Leftarrow G=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{i=1}^{n}S_{\lambda_i}$ حيث $S_{\lambda_i}\in\sigma$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

بما أن σ قاعدة جزئية للتبولوجي τ^* فان $\sigma\subseteq\tau^*$ وعليه فان $S_{\lambda_i}\in\tau^*$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow \bigcap_{i=1}^{n}S_{\lambda_i}\in\tau^* \Leftarrow G=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{i=1}^{n}S_{\lambda_i}\in\tau^* \Leftarrow \tau\subseteq\tau^*$ وبالمثل نبرهن $\tau^*\subseteq\tau \Leftarrow \tau^*=\tau$.

ملاحظة

من المبرهنة أعلاه نستطيع القول بأنه إذا كانت $\sigma\subseteq P(X)$ حيث $X=\{S_\lambda:S_\lambda\in\sigma\}$ فان σ تكون قاعدة جزئية لتبولوجي جزئي وحيد على X . كذلك $\sigma\cup\{X\}$ قاعدة جزئية لتبولوجي جزئي وحيد فيه عناصر σ مجموعات مفتوحة

مثال (15.3.1)

ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ $\sigma=\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,d,e\}\}$ جد التبولوجيا τ على X المتولد بواسطة σ.

$$X=\bigcap_{\lambda\in\phi}V_\lambda,\quad V_\lambda\in\sigma$$

$\{a,b\}\cap\{a,b\}=\{a,b\},\quad \{b,c\}\cap\{b,c\}=\{b,c\},\quad \{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}$
$\{b,c\}\cap\{a,d,e\}=\phi,\quad \{a,b\}\cap\{a,d,e\}=\{a\},\quad \{a,d,e\}\cap\{a,d,e\}=\{a,d,e\}$

لتكن β تمثل عائلة جميع التقاطعات المنتهية لعناصر σ

$\beta=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,d,e\},X\}$

$$\phi=\bigcup_{\lambda\in\phi}V_\lambda,\quad V_\lambda\in\beta$$

$\{a\}\cup\{a\}=\{a\},\quad \{b\}\cup\{b\}=\{b\},\quad \{a,b\}\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}$
$\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\},\quad \{b\}\cup\{a,b\}=\{a,b\},\quad \{a,b\}\cup\{a,d,e\}=\{a,b,d,e\}$
$\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\},\quad \{b\}\cup\{b,c\}=\{b,c\},\quad \{a,b\}\cup X=X$
$\{a\}\cup\{b,c\}=\{a,b,c\},\quad \{b\}\cup\{a,d,e\}=X,\quad \{b,c\}\cup\{a,d,e\}=X$
$\{a\}\cup\{a,d,e\}=\{a,d,e\},\quad \{b\}\cup X=X,\quad \{b,c\}\cup X=X$
$\{a\}\cup X=X,\quad \{a,b\}\cup\{a,b\}=\{a,b\},\quad \{a,d,e\}\cup X=X$

$\Leftarrow$ التبولوجي τ المتولد بواسطة σ هو $\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,b,d,e\},X\}$

مثال (16.3.1)

لتكن σ عائلة جميع الفترات المغلقة في $\mathbb{R}$ والتي بالصيغة $[a,a+1]$ أحادية الطول. جد التبولوجيا τ على $\mathbb{R}$ المتولد بواسطة σ.

الحل :

ليكن $x\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ كل من $[x-1,x],\ [x,x+1]$ فترة مغلقة أحادية الطول.

$[x-1,x],\ [x,x+1]\in\sigma$ $\Leftarrow$ $[x-1,x]\cap[x,x+1]=\{x\}\in\tau$.

$\Leftarrow$ $\{x\}$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وعليه τ تبولوجي مبعثر على $\mathbb{R}$.

مثال (17.3.1)

ليكن $X=\{1,2,3,4,5\}$ اوجد قاعدة جزئية للتبولوجيا المبعثر τ_D على X بحيث لا تحتوي على مجموعات جزئية أحادية من X.

الحل :

$\sigma=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}$

ملاحظة

لتكن σ عائلة غير خالية من مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة X. اصغر تبولوجي يحتوي على σ هو تقاطع كل التبولوجيات على X والتي تحتوي على σ.

مبرهنة (18.3.1)

لتكن σ عائلة غير خالية من مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة X فان التبولوجي τ_σ المتولد بواسطة القاعدة الجزئية هو اصغر تبولوجي يحتوي على σ

البرهان :

لتكن τ^* هو تقاطع كل التبولوجيات على X والتي تحتوي على σ ، أي أن $\tau^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ حيث τ_λ تبولوجيا على X يحتوي على σ . يجب أن نبرهن $\tau_\sigma = \tau^*$

بما أن τ_σ تبولوجي يحتوي على σ وان τ^* اصغر تبولوجي يحتوي على σ $\Leftarrow$ $\tau^* \subseteq \tau_\sigma$

ليكن $G \in \tau_\sigma$ $\Leftarrow$ $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{i=1}^{n} S_{\lambda_i}$ حيث $S_{\lambda_i} \in \sigma$ لكل $i = 1, 2, \cdots, n$

بما أن $\sigma \subseteq \tau^*$ قاعدة جزئية للتبولوجي τ^* فان $S_{\lambda_i} \in \tau^*$ لكل $i = 1, 2, \cdots, n$

$\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} S_{\lambda_i} \in \tau^*$ $\Leftarrow$ $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{i=1}^{n} S_{\lambda_i} \in \tau^*$ $\Leftarrow$ $\tau_\sigma \subseteq \tau^*$ $\Leftarrow$ $\tau^* = \tau$.

ملاحظة

التبولوجي τ_σ على X المتولد بواسطة σ هو تقاطع كل التبولوجيات على X التي تحتوي σ ومن ثم τ_σ هو اصغر تبولوجي يحتوي على σ.

القاعدة المحلية عند نقطة Local base at a Point

تعريف(19.3.1)

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجيا ، $x \in X$ ولتكن $\beta(x)$ تمثل عائلة من الجوارات للنقطة x. يقال عن $\beta(x)$ بأنها قاعدة محلية (Local Base) عند النقطة x (أو تسمى قاعدة لنظام الجوارات إلى النقطة x) إذا كان لكل جوار U إلى x، توجد $V \in \beta(x)$ بحيث أن $V \subseteq U$. كل عنصر من عناصر $\beta(x)$ يسمى جوار أساسي (Basic Neighborhood) إلى النقطة x.

مثال(20.3.1)

ليكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ وليكن $\tau = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, X\}$

فان القاعدة المحلية عند كل نقطة من النقاط a, b, c, d, e هي

$$\beta(a) = \{\{a\}\},\ \beta(b) = \{\{a, b\}\},\ \beta(c) = \{\{a, c, d\}\},\ \beta(d) = \{\{a, c, d\}\},\ \beta(e) = \{\{a, b, e\}\}$$

نلاحظ هنا القاعدة المحلية عند كل نقطة تحتوي على جوار أحادي للنقطة. $\{\{a, b\}\}$ لا تمثل قاعدة محلية عند النقطة a.

مثال (21.3.1)

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجيا ، $x \in X$ ولتكن $\beta(x)$ تمثل عائلة جميع المجموعات المفتوحة X والتي تحتوي على x . برهن على أن $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x.

الحل:

ليكن U جوار للنقطة x $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subseteq U$

بما أن G مجموعة مفتوحة في X وتحتوي على x $\Leftarrow$ $G \in \beta(x)$

$\Leftarrow$ $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x.

مثال (22.3.1)

1. إذا كان (X,τ_D) فضاء تبولوجي مبعثر فان $\beta(x)=\{\{x\}\}$ تكون قاعدة محلية عند النقطة x لكل $x\in X$.
2. إذا كان (X,τ_1) فضاء تبولوجيا متماسكاً فان $\beta(x)=\{X\}$ تكون قاعدة محلية عند النقطة x لكل $x\in X$.

مثال(23.3.1)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي وليكن $x\in\mathbb{R}$ فان كل من

$$\beta(x)=\{(x-\varepsilon,x+\varepsilon):\varepsilon>0\},\ \beta'(x)=\{(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}):n\in N\}$$

تكون قاعدة محلية عند النقطة x.

الحل:

ليكن U جوار للنقطة x $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في $\mathbb{R}$ بحيث أن $x\in G\subseteq U$

بما أن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$, $x\in G$ $\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in G\subseteq U$

وهذا يعني يوجد $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\in\beta(x)$ بحيث أن $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq U$

$\Leftarrow$ $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x.

وبالمثل نبرهن $\beta'(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x.(نختار n بحيث $\frac{1}{n}<\varepsilon$)

مبرهنة (24.3.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ، ولتكن $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة $x\in X$ فان $\beta(x)$ تمتلك الخواص التالية.

1. $\beta(x)\neq\phi$ لكل $x\in X$
2. إذا كان $V\in\beta(x)$ فان $x\in V$
3. إذا كان $V_1,V_2\in\beta(x)$ فانه يوجد $V\in\beta(x)$ بحيث $V\subset V_1\cap V_2$.
4. إذا كان $V\in\beta(x)$ فانه يوجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x\in G\subseteq V$ ولكل $y\in G$ يوجد $U\in\beta(y)$ يحقق $U\subseteq G$.

البرهان :

1. بما أن X مجموعة مفتوحة في X، $x\in X$ $\Leftarrow$ X جوار إلى النقطة x

بما أن $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x $\Leftarrow$ يوجد $V\in\beta(x)$ بحيث $V\subseteq U$

وعليه $\beta(x)\neq\phi$ لكل $x\in X$.

2. بما أن $V\in\beta(x)$ $\Leftarrow$ V جوار للنقطة x $\Leftarrow$ $x\in V$. (حسب تعريف الجوار)

3. بما أن $V_1\in\beta(x)$ $\Leftarrow$ V_1 جوار للنقطة x. وبالمثل V_2 جوار للنقطة x

$\Leftarrow$ $V_1\cap V_2$ جوار للنقطة x.

بما أن $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x $\Leftarrow$ يوجد $V\in\beta(x)$ بحيث $V\subseteq V_1\cap V_2$.

4. بما أن $V\in\beta(x)$ $\Leftarrow$ V جوار للنقطة x

$\Leftarrow$ يوجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subseteq V$.

بما أن G مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ G جوار للنقطة $y \in G$

اذن لكل $y \in G$ توجد $U \in \beta(y)$ بحيث $U \subseteq G$.

مبرهنة (25.3.1)

لتكن X مجموعة غير خالية ولكل $x \in X$ نفرض $\beta(x)$ عائلة من المجموعات الجزئية من X بحيث أن $\beta(x)$ تحقق الشروط في المبرهنة (24.3.2) فانه يوجد تبولوجي على X بحيث أن $\beta(x)$ تكون قاعدة محلية عند النقطة x.

البرهان

نعرف $N(x) = \{U \subseteq X : \exists V \in \beta(x) \ni V \subseteq U\}$

من السهولة أن نبرهن $N(x)$ يحقق الشرط الموجد في المبرهنة (8.2.2) وعليه يوجد تبولوجي τ على X بحيث $N(x)$ تكون عائلة جميع الجوارات للنقطة x وعليه $\beta(x)$ تكون قاعدة محلية عند النقطة x.

مبرهنة (26.3.1)

لتكن β قاعدة للتبولوجيا τ على المجموعة X ولتكن $\beta(x)$ عائلة جميع عناصر β والتي تحتوي على $x \in X$.

فان $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x.

البرهان :

$$\beta(x) = \{V \in \beta : x \in V\}$$

ليكن U جوار للنقطة x.

بما أن β قاعدة إلى τ $\Leftarrow$ يوجد $V \in \beta$ بحيث أن $x \in V \subset U$

بما أن $x \in V \in \beta$ $\Leftarrow$ $V \in \beta(x)$ $\Leftarrow$ يوجد $V \in \beta(x)$ بحيث أن $V \subseteq U$

$\Leftarrow$ $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x.

تمارين(3.1)

1. ليكن $X = \{a,b,c\}$ وليكن $N(a) = \{X\}, N(b) = \{\{b,c\}, X\}, N(c) = \{\{c\},\{a,c\}\}$
   جد التبولوجي على X المتولد بواسطة $N(a), N(b), N(c)$
2. لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن β عائلة من المجموعات الجزئية من X فان β تكون قاعدة إلى تبولوجي τ على X أذا وفقط أذا تحققت الشروط آلاتية
   ا. لكل $x \in X$ يوجد $V \in \beta$ بحيث $x \in X$ (أي أن $X = \bigcup_{V \in \beta} V$)
   ب. لكل $V_1, V_2 \in \beta$ ولكل $x \in V_1 \cap V_2$،يوجد $V \in \beta$ بحيث $x \in V \subset V_1 \cap V_2$
3. ليكن (X, τ_D) فضاء تبولوجي مبعثر ولتكن $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ ، β' عائلة من المجموعات الجزئية من المجموعات فان β' تكون قاعدة إلى τ أذا وفقط أذا كانت $\beta \subset \beta'$.
4. ليكن كل من $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ فضاء تبولوجي ولتكن β_1 قاعدة للتبولوجي τ_1 ، β_2 قاعدة للتبولوجي τ_2.
   إذا كان لكل $G \in \tau_1$ يكون اتحاد لعدد من عناصر β_2. برهن على أن $\tau_1 \subset \tau_2$.

5. اثبت أن القاعدتين β,β^* تولدان نفس التبولوجيا على مجموعة X أذا وفقط أذا تحقق الشرطان الآتيان
ا. لكل $x\in V\in\beta$ توجد مجموعة $V^*\in\beta^*$ بحيث أن $x\in\beta^*\subseteq\beta$
ب. لكل $x\in V^*\in\beta$ توجد مجموعة $V\in\beta$ بحيث أن $x\in\beta\subseteq\beta^*$
6. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا برهن على أن يكون منتهيا إذا وفقط إذا كان τ له قاعدة منتهية.
7. ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن β_1 عائلة جميع الفترات المغلقة في $\mathbb{R}$
ولتكن $\beta_2=\{\{x\}:x\in\mathbb{R}\}$. هل أن $\beta_1\cup\beta_2$ تكون قاعدة إلى τ_u؟ ولماذا
8. لتكن كل من β_1,β_2 قاعدة لتبولوجيا τ على مجموعة X. بين أي من العبارات الآتية صحيحة أم لا؟ مع البرهان.
ا. قاعدة $\beta_1\cup\beta_2$ إلى τ.
ب. قاعدة $\beta_1\cap\beta_2$ إلى τ.
9. اوجد اصغر قاعدة اصغر قاعدة جزئية لتبولوجيا مبعثرة على مجموعة X.
10. ليكن كل τ_1,τ_2 من تبولوجي على مجموعة X، ولتكن σ_1 قاعدة جزئية إلى τ_1 و σ_2 قاعدة جزئية إلى τ_2 بحيث أن $\sigma_1\subseteq\sigma_2\subseteq\tau_1$. بر هن على أن $\tau_1=\tau_2$.
11. ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ ولتكن $\sigma=\{\{a\},\{c,d\},\{a,b,c\}\}$. جد التبولوجي على X المتولد بواسطة σ.
12. ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ وليكن $\tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},X\}$. بين أي من العبارات الآتية صح آم لا ؟ مع البرهان
ا. $\beta(a)=\{\{a,b\},X\}$ قاعدة محلية عند النقطة a.
ب. $\beta(b)=\{\{b,c\},X\}$ قاعدة محلية عند النقطة b.
ج. $\beta(c)=\{\{a,b,c\}\}$ قاعدة محلية عند النقطة c.

4.1 نقاط الفضاء التبولوجي Points of Topological Space

تعريف (1.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن النقطة $x\in A$ بأنها نقطة داخلية (Interior point) في A إذا وجدت مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x\in G\subseteq A$ بعبارة أخرى إذا كانت A جوار للنقطة x. مجموعة كل النقاط الداخلية في A تسمى داخل(Interior) المجموعة A (ويرمز لها بالرمز $\operatorname{int}(A)$ أو A° أي أن
$\operatorname{int}(A)=A^\circ=\{x\in A:\exists G\in\tau \ni x\in G\subseteq A\}$ وعليه $\operatorname{int}(A)\subseteq A$.

مبرهنة(2.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A\subseteq X$.
1. $\operatorname{int}(A)$ مجموعة مفتوحة في X.
2. A مجموعة مفتوحة في X إذا وفقط إذا كان $\operatorname{int}(A)=A$.
3. $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A))=\operatorname{int}(A)$.
4. $\operatorname{int}(A)$ تساوي اتحاد جميع المجموعات المفتوحة في X والمحتواة في A، أي أن
$\operatorname{int}(A)=\bigcup\{G\subseteq X:G\in\tau \ni G\subseteq A\}$ وعليه $\operatorname{int}(A)$ تكون اكبر مجموعة مفتوحة في X ومحتواة في A.

البرهان

1. لتكن $x \in \operatorname{int}(A)$ $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subseteq A$
بما أن G مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow G$ جوار لكل نقطة من نقاطها
$\Leftarrow$ A جوار لكل نقطة من نقاط $G \Leftarrow$ كل نقطة من نقاط G تكون نقطة داخلية في A $\Leftarrow$ $G \subseteq \operatorname{int}(A)$ وعليه لكل $x \in \operatorname{int}(A)$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subseteq \operatorname{int}(A)$ $\Leftarrow$ $\operatorname{int}(A)$ جوار لكل نقطة من نقاطها $\Leftarrow$ $\operatorname{int}(A)$ مجموعة مفتوحة في X.
2. لتكن $\operatorname{int}(A) = A$
بما أن $\operatorname{int}(A)$ مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة في X
الاتجاه الأخر : نفرض A مجموعة مفتوحة في X
ليكن $x \in A$
بما أن A مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ A جوار للنقطة x $\Leftarrow$ $x \in \operatorname{int}(A)$ $\Leftarrow$ $A \subseteq \operatorname{int}(A)$
ولكن $\operatorname{int}(A) \subseteq A$ $\Leftarrow$ $\operatorname{int}(A) = A$.
3. بما أن $\operatorname{int}(A)$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$
4. نضع $B = \bigcup\{G \subseteq X : G \in \tau \ni G \subseteq A\}$
لتكن $x \in \operatorname{int}(A)$ $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subseteq A$
$\Leftarrow$ $x \in B$ $\Leftarrow$ $\operatorname{int}(A) \subseteq B$
ولتكن $y \in B$ $\Leftarrow$ $y \in \bigcup\{G \subseteq X : G \subseteq \tau \ni G \subseteq A\}$ $\Leftarrow$ توجد مجموعة G في X بحيث أن $y \in G \subseteq A$ $\Leftarrow$ $y \in \operatorname{int}(A)$ $\Leftarrow$ $B \subseteq \operatorname{int}(A)$ وعليه $\operatorname{int}(A) = B$.

مثال(3.4.1)

ليكن $X = \{a,b,c\}$ ولتكن $\tau = \{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ ولتكن $A = \{a,c\}$, $B = \{a,b\}$ جد كل من $\operatorname{int}(A)$, $\operatorname{int}(B)$.

الحل:

1. a نقطة داخلية في A لان $\{a\} \in \tau$ وان $a \in \{a\} \subseteq A$
b ليست نقطة داخلية في A $\Leftarrow$ $\operatorname{int}(A) = \{a\}$.
2. بما أن $B = \{a,b\} \in \tau$ $\Leftarrow$ B مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ $\operatorname{int}(B) = B$.

مثال(4.4.1)

1. لتكن (X,τ) فضاء تبولوجي متماسك ولتكن $A \subseteq X$. فان $\operatorname{int}(A) = \begin{cases} \phi, & A \neq X \\ X, & A = X \end{cases}$.
2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر ولتكن $A \subseteq X$. فان A مجموعة مفتوحة في X وعليه $\operatorname{int}(A) = A$

مثال(5.4.1)

لتكن $((\mathbb{R},\tau_u))$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. إذا كانت $A=(a,b)$ فان $\operatorname{int}(A)=(a,b)$
2. إذا كانت $A=(a,b]$ فان $\operatorname{int}(A)=(a,b)$
3. إذا كانت $A=[a,b)$ فان $\operatorname{int}(A)=(a,b)$
4. إذا كانت $A=[a,b]$ فان $\operatorname{int}(A)=(a,b)$
5. إذا كانت $A=[a,b]\cup\{c,d\}$ فان $\operatorname{int}(A)=(a,b)$
6. إذا كانت A منتهية فان $\operatorname{int}(A)=\phi$
7. إذا كانت $A=\mathbb{N}$ فان $\operatorname{int}(A)=\phi$ حيث $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية.
8. إذا كانت $A=\mathbb{Z}$ فان $\operatorname{int}(A)=\phi$ حيث $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.
9. إذا كانت $A=\mathbb{Q}$ فان $\operatorname{int}(A)=\phi$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية
10. إذا كانت $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\}$ فان $\operatorname{int}(A)=\phi$

مبرهنة (6.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي وليكن $A,B\subseteq X$

1. إذا كانت $A\subseteq B$ فان $\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}(B)$
2. $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$
3. $\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$

البرهان :

1. ليكن $x\in A^\circ$ ⇐ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x\in G\subseteq A$
بما أن $A\subseteq B$ ⇐ $x\in G\subset B$ ⇐ $x\in\operatorname{int}(B)$ ⇐ $\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}(B)$
2. بما أن $A\cap B\subset A$, $A\cap B\subset B$
⇐ $\operatorname{int}(A\cap B)\subseteq\operatorname{int}(A)$, $\operatorname{int}(A\cap B)\subseteq\operatorname{int}(B)$ ⇐ $\operatorname{int}(A\cap B)\subseteq\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$
الاتجاه الأخر : بما أن $\operatorname{int}(B)\subseteq B$, $\operatorname{int}(A)\subseteq A$ فان $\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)\subseteq A\cap B$
⇐ $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B))\subseteq\operatorname{int}(A\cap B)$ ولكن $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B))=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$
⇐ $\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cap B)$ وعليه $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}(A)\cap\operatorname{int}(B)$.
3. بما أن $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$
⇐ $\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$, $\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$
⇐ $\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)$

ملاحظة

ليس بالضروري أن يكون $\operatorname{int}(A\cup B)=\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)$ والمثال الأتي يوضح ذلك .
ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $B=[1,2]$, $A=[0,1]$, نلاحظ أن
$\operatorname{int}(A)=(0,1)$, $\operatorname{int}(B)=(1,2)$ ⇐ $1\notin\operatorname{int}(A)$, $1\notin\operatorname{int}(B)^\circ$ ⇐ $1\notin\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)$
ولكن $A\cup B=[0,2]$ ⇐ $\operatorname{int}(A\cup B)=(0,2)$ وان $1\in\operatorname{int}(A\cup B)$ وعليه $\operatorname{int}(A\cup B)\neq\operatorname{int}(A)\cup\operatorname{int}(B)$

انغلاق المجموعة Closure of set

تعريف (7.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$. يقال عن النقطة $x \in X$ بأنها نقطة ملاصقة (Adherent Point) أو نقطة انغلاق (Closure Point) أو نقطة اتصال (Contact point) إلى المجموعة A إذا كان لكل جوار V إلى x تحتوي على نقطة من نقاط A أي أن $V \cap A \neq \phi$.

المجموعة التي عناصرها جميع نقاط الانغلاق للمجموعة A تسمى انغلاق (**Closure**) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$ ، أي أن $\overline{A} = \{x \in X : V \cap A \neq \phi$ فان x إلى V لكل جوار $\}$ وعليه $A \subseteq \overline{A}$.

مبرهنة (8.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$.

1. $\overline{A}$ مجموعة مغلقة في X.
2. A مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كان $\overline{A} = A$.
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4. $\overline{A}$ تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة في X والتي تحتوي على A، أي أن

$\overline{A} = \cap\{F \subseteq X : A \subseteq F$ بحيث X مجموعة مغلقة في $F\}$

وعليه $\overline{A}$ تكون اصغر مجموعة مغلقة في X وتحتوي على A.

البرهان :

1. يجب أن نبرهن $(\overline{A})^c$ مجموعة مفتوحة في X

ليكن $x \in (\overline{A})^c \Leftarrow x \notin \overline{A} \Leftarrow$ يوجد جوار V إلى x بحيث أن $V \cap A = \phi$

وبسهولة يمكن إثبات $V \cap \overline{A} = \phi \Leftarrow V \subseteq (\overline{A})^c \Leftarrow (\overline{A})^c$ مجموعة مفتوحة في X. $\Leftarrow \overline{A}$ مجموعة مغلقة في X.

2. نفرض $\overline{A} = A$

بما أن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow A$ مجموعة مغلقة

الاتجاه الأخر : نفرض A مجموعة مغلقة

ليكن $x \in \overline{A}$ يجب أن نبرهن $x \in A$.

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $x \notin A \Leftarrow x \in A^c$

بما أن A مغلقة $\Leftarrow A^c$ مفتوحة وعليه A^c جوار إلى النقطة x

بما أن $x \in \overline{A} \Leftarrow A \cap A^c \neq \phi$ وهذا تناقض $\Leftarrow x \in A \Leftarrow \overline{A} \subset A$

ولكن $A \subseteq \overline{A} \Leftarrow \overline{A} = A$.

3. بما أن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow \overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

4. نضع $B = \cap\{F \subseteq X : A \subseteq F$ بحيث X مجموعة مغلقة في $F\}$

بما أن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة في X وان $A \subseteq F \Leftarrow B \subseteq \overline{A}$

ويترك للقارئ برهان $A \subseteq B$ وعليه $\overline{A} = B$

مثال(9.4.1)

1. ليكن $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},X\}$ ولتكن $A = \{b\}$ ، $B = \{a,d\}$.
فان $\overline{B} = B$, $\overline{A} = \{b,c\}$.
2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي متماسك ولتكن $A \subseteq X$. فان $\overline{A} = \begin{cases} \phi, & A = \phi \\ X, & A \neq \phi \end{cases}$.
3. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا مبعثرا ولتكن $A \subseteq X$. فان $\overline{A} = A$ لان A مجموعة مغلقة في X.
4. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مكمل المنتهي ولتكن $A \subseteq X$. فان $\overline{A} = A$ عندما A مجموعة منتهية
وان $\overline{A} = X$ عندما A مجموعة غير منتهية..

مثال(10.4.1)

لتكن $((\mathbb{R},\tau_u))$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. إذا كانت $A = (a,b)$ فان $\overline{A} = [a,b]$
2. إذا كانت $A = (a,b]$ فان $\overline{A} = [a,b]$
3. إذا كانت $A = [a,b)$ فان $\overline{A} = [a,b]$
4. إذا كانت $A = [a,b]$ فان $\overline{A} = [a,b]$
5. إذا كانت $A = \mathbb{N}$ فان $\overline{A} = \mathbb{N}$ حيث $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية.
6. إذا كانت $A = \mathbb{Z}$ فان $\overline{A} = \mathbb{Z}$ حيث $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.
7. إذا كانت $A = \mathbb{Q}$ فان $\overline{A} = \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية
8. إذا كانت $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ فان $\overline{A} = \{0\} \cup A$
9. إذا كانت $A = \{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ldots\}$ فان $\overline{A} = \{1\} \cup A$

مبرهنة (11.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A,B \subseteq X$.

1. إذا كانت $A \subseteq B$ فان $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
2. $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

البرهان :

1. ليكن $x \in \overline{A}$ $\Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap V \neq \phi$
بما أن $A \subseteq B$ $\Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $B \cap V \neq \phi$
$\Leftarrow$ $x \in \overline{B}$ وعليه $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

برهان آخر

بما أن $A\subset B$, $B\subset \overline{B}$ $\Leftarrow$ $A\subset \overline{B}$

$\overline{B}$ مجموعة مغلقة وتحتوي على ***A*** .

ولكن $\overline{A}$ أصغر مجموعة مغلقة تحتوي على A $\Leftarrow$ $\overline{A}\subset \overline{B}$.

2. بما أن $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$ $\Leftarrow$ $\overline{A\cap B}\subseteq \overline{A}$, $\overline{A\cap B}\subseteq \overline{B}$ $\Leftarrow$ $\overline{A\cap B}\subseteq \overline{A}\cap \overline{B}$

3. بما أن $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\subseteq \overline{A\cup B}$, $\overline{B}\subseteq \overline{A\cup B}$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\cup \overline{B}\subseteq \overline{(A\cup B)}$

بما أن كل من $\overline{B}$, $\overline{A}$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ $\overline{A}\cup \overline{B}$ مجموعة مغلقة

وكذلك بما أن $A\subseteq \overline{A}$, $B\subseteq \overline{B}$ $\Leftarrow$ $A\cup B\subseteq \overline{A}\cup \overline{B}$

$\Leftarrow$ $\overline{A}\cup \overline{B}$ مجموعة مغلقة وتحتوي على $A\cup B$

ولكن $\overline{(A\cup B)}\subseteq \overline{A}\cup \overline{B}$ أصغر مجموعة مغلقة وتحتوي على $A\cup B$

$\overline{(A\cup B)}\subseteq \overline{A}\cup \overline{B}$ وعليه $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup \overline{B}$

ملاحظــــة

ليس من الضروري أن يكون $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap \overline{B}$ والمثال الأتي يوضح ذلك

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $A=(0,1),\quad B=(1,2)$

$\Leftarrow$ $\overline{A}=[0,1],\quad \overline{B}=[1,2]$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\cap \overline{B}=\{1\}$

ولكن $A\cap B=\phi \Leftarrow$ $\overline{A\cap B}=\phi$ وعليه $\overline{A\cap B}\neq \overline{A}\cap \overline{B}$

تعريف (12.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا وليكن $A,B\subseteq X$. يقال عن المجموعة **A** بأنها كثيفة (Dense) في B إذا كان $B\subseteq \overline{A}$.
وبصورة خاصة يقال عن المجموعة A بأنها كثيفة (Dense) في X أو تسمى أحيانا (Every Where Dense) إذا كانت $\overline{A}=X$.

مثال (13.4.1)

ليكن $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ ولتكن $B=\{a,b\}$, $A=\{a,c\}$

من الواضح أن المجموعة A مغلقة لان $A^c=\{a\}\in\tau$ وعليه $\overline{A}=A$ $\Leftarrow$ $\overline{A}\neq X$

وعليه A ليست كثيفة في X بينما $\overline{B}=X$ وعليه B مجموعة كثيفة في X

وأخيرا بما أن $A\subset \overline{B}$ $\Leftarrow$ المجموعة B تكون كثيفة في المجموعة A.

تعريف(14.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن المجموعة A بأنها

1. متناثرة (Nowhere Dense) أو تسمى مجموعة مخلخلة(Rare set) في X إذا كان $\operatorname{int}(\overline{A})=\phi$.
2. نحيلة (Meager) أو مجموعة واهنة (First Category set) إذا كانت A تساوي اتحاد عائلة قابلة للعد من المجموعات المتناثرة في X، بعبارة أخرى

إذا كانت $A=\bigcup_n A_n$ حيث $\{A_n\}$ عائلة قابلة للعد من المجموعات المتناثرة في X.

3. غير نحيلة (Non meager) أو مجموعة متينة (Second Category set) إذا لم تكن A واهنـــة.

مثال(15.4.1)

1. ليكن $X=\{a,b,c\}$ ، $\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ ولتكن $A=\{a\}$ فان

$\overline{A}=\{a,c\} \Leftarrow \operatorname{int}(\overline{A})=\{a\}\neq\phi \Leftarrow A$ ليست متناثرة

2. ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\}$ فان

$\overline{A}=\{0\}\cup A \Leftarrow \operatorname{int}(\overline{A})^\circ=\phi \Leftarrow A$ متناثرة .

تعريف(16.4.1)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه قابلا للانفصال **(Separable)** إذا كان X يحتوي على مجموعة كثيفة قابلة للعد.

مثال (17.4.1)

الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ يكون قابلا للانفصال لان مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ كثيفة وقابلة للعد في $\mathbb{R}$.

المجموعة المشتقة Derived set

تعريف(18.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة غاية (Limit point) أو نقطة تراكم (Accumulation point) أو نقطة ملاصقة(Cluster point) إلى المجموعة A إذا كان لكل جوار V إلى x يحتوي على نقطة أخرى من نقاط A غير x،أي أن $A\cap(V\setminus\{x\})\neq\phi$.

مجموعة كل نقاط الغاية إلى المجموعة A تسمى بمشتقة (Derived) المجموعة A ويرمز لها بالرمز A'.

$A'=\{x\in X:\ A\cap(V\setminus\{x\})\neq\phi$ فان x إلى V لكل جوار $\}$

يقال عن النقطة $x\in X$ بأنها نقطة منعزلة (Isolated Point) إلى المجموعة A إذا كانت $x\in A$, $x\notin A'$. ويقال عن المجموعة A بأنها

1. مجموعة منعزلة (Isolated Set) إذا كان $A\cap A'=\phi$.
2. مجموعة تامة (Perfect Set) إذا كانت $A=A'$.
3. مجموعة كثيفة بنفسها (Dense in Itself) إذا كانت $A\subseteq A'$.

مبرهنة (19.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A\subseteq X$

1. إذا كانت $A=\phi$ فان $A'=\phi$
2. إذا كانت $x\in A'$ فان $x\in(A\setminus\{x\})'$
3. $A'\subseteq\overline{A}$
4. $\overline{A}=A\cup A'$
5. إذا كانت $A'=\phi$ فان المجموعة A تكون مغلقة في X.

6. المجموعة A تكون مغلقة في X إذا وفقط إذا كانت $A' \subseteq A$

البرهان :

1. بما أن $\phi \cap (V \mid \{x\}) = \phi$ لكل $x \in X$ ولكل جوار V إلى x $\Leftarrow$ $\phi' = \phi$
2. بما أن $x \in A'$ $\Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap (V \mid \{x\}) \neq \phi$

$(A \mid \{x\}) \cap (V \mid \{x\}) = (A \cap \{x\}^c) \cap (V \cap \{x\}^c) = A \cap (V \cap \{x\}^c) = A \cap (V \mid \{x\}) \neq \phi$

$\Leftarrow x \in (A \mid \{x\})'$.

3. لتكن $x \in A'$ $\Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap (V \mid \{x\}) \neq \phi$

$\Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap V \neq \phi \Leftarrow x \in \bar{A} \Leftarrow A' \subseteq \bar{A}$

4. بما أن $A' \subseteq \bar{A} \Leftarrow A \cup A' \subseteq A \cup \bar{A}$

ولكن $A \cup \bar{A} = \bar{A}$ لأن $A \subseteq \bar{A} \Leftarrow A \cup A' \subseteq \bar{A}$

الاتجاه الآخر: نفرض $x \in \bar{A}$ هناك احتمالات

(ا) إذا كان $x \in A \Leftarrow x \in A \cup A' \Leftarrow \bar{A} \subseteq A \cup \bar{A}$

(ب) إذا كانت $x \notin A$

بما أن $x \in \bar{A} \Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap V \neq \phi$

بما أن $x \notin A \Leftarrow$ لكل جوار V إلى x فان $A \cap (V \mid \{x\}) \neq \phi$

$\Leftarrow x \in A' \Leftarrow x \in A \cup A' \Leftarrow \bar{A} \subseteq A \cup A$ وعليه $\bar{A} = A \cup A'$

5. بما أن $\bar{A} = A \cup A' \Leftarrow \bar{A} = A \cup \phi = A \Leftarrow A$ مغلقة
6. لتكن A مجموعة مغلقة $\Leftarrow \bar{A} = A$

بما أن $A' \subset \bar{A} \Leftarrow A' \subset A$

الاتجاه الأخر: نفرض $A' \subseteq A \Leftarrow A \cup A' = A$

بما أن $\bar{A} = A \cup A' \Leftarrow \bar{A} = A \Leftarrow A$ مجموعة مغلقة.

مثال(20.4.1)

1. ليكن $X = \{a,b,c\}$ ، $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ ولتكن $B = \{c\}$, $A = \{a\}$ فان

$a \notin A'$ لأن $A \cap (\{a\} \mid a) = \phi$ ، $b \notin A'$ لأن $A \cap \{b\} = \phi$

$c \in A'$ لأن كل جوار V إلى c فان $A \cap (V \mid \{c\}) \neq \phi \Leftarrow A' = \{c\}$.

وبالمثل نحصل على $B' = \phi$

2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا متماسكا ولتكن $A \subseteq X$ فهنالك عدة حالات
   - إذا كانت $A = \phi$ فان $A' = \phi$
   - إذا كانت $A = X$

     (ا) إذا كانت X تحتوي على عنصر واحد فقط فان $A' = \phi$

     (ب)إذا كانت X تحتوي على أكثر من عنصر فان $A' = X$
   - إذا كانت $A \neq \phi$, $A \neq X$

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

(ا) إذا كانت A تحتوي على عنصر واحد فقط ولتكن $A=\{a\}$ فان $A'=X\setminus\{a\}$

(ب) إذا كانت A تحتوي على أكثر من عنصر فان $A'=X$.

3. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا مبعثرا ولتكن $A\subseteq X$

ليكن $x\in X$

بما أن $\{x\}$ مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow V=\{x\}$ جوار إلى النقطة x

وان $x\notin A' \Leftarrow A\cap(V\setminus\{x\})=\phi$

بما أن x نقطة لا على التعيين $\Leftarrow$ لكل $x\in X$ فان $A'=\phi \Leftarrow x\notin A'$

مثال(21.4.1)

لتكن $((\mathbb{R},\tau_u))$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $A\subseteq\mathbb{R}$.

1. إذا كانت $A=(a,b)$ فان $A'=[a,b]$
2. إذا كانت $A=(a,b]$ فان $A'=[a,b]$
3. إذا كانت $A=[a,b)$ فان $A'=[a,b]$
4. إذا كانت $A=[a,b]$ فان $A'=[a,b]$
5. إذا كانت $A=\mathbb{N}$ فان $A'=\phi$ حيث $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية.
6. إذا كانت $A=\mathbb{Z}$ فان $A'=\phi$ حيث $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.
7. إذا كانت $A=\mathbb{Q}$ فان $A'=\mathbb{R}$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية
8. إذا كانت $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\}$ فان $A'=\{0\}$
9. إذا كانت $A=\{-\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\}$ فان $A'=\{0\}$
10. إذا كانت إذا كانت $A=\{\frac{2n+1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\}$ فان $A'=\{2\}$
11. إذا كانت $A=\{x\in X:x=0 \quad \forall x\in\mathbb{Q},x^2<2\}$ فان $A'=[0,\sqrt{2}]$

مبرهنة(22.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A,B\subseteq X$

1. إذا كانت $A\subseteq B$ فان $A'\subseteq B'$
2. $(A\cap B)'\subseteq A'\cap B'$
3. $(A\cup B)'=A'\cup B'$

البرهان

1. ليكن $x\in A' \Leftarrow$ لكل جوار V إلى النقطة x فان $A\cap(V\setminus\{x\})\neq\phi$

بما أن $A\subseteq B \Leftarrow$ لكل جوار V إلى النقطة x فان $B\cap(V\setminus\{x\})\neq\phi$

$\Leftarrow x \in B'$ وعليه $A' \subseteq B'$

2. بما أن $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ $\Leftarrow$ $(A \cap B)' \subseteq A'$, $(A \cap B)' \subseteq B'$

$\Leftarrow (A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$

3. بما أن $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ $\Leftarrow$ $A' \subseteq (A \cup B)'$, $B' \subseteq (A \cup B)'$

$\Leftarrow A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$

الاتجاه الأخر: نفرض $x \notin A' \cup B' \Leftarrow x \notin A',\ x \notin B'$

$\Leftarrow$ يوجد جواران V_1, V_2 إلى x بحيث أن $A \cap (V_1 | \{x\}) = \phi$, $B \cap (V_2 | \{x\}) = \phi$

نضع $V = V_1 \cap V_2$ $\Leftarrow$ V جوار إلى النقطة x وان

$$(A \cup B) \cap (V | \{x\}) = (A \cap (V | \{x\})) \cup (B \cap (V | \{x\})) = \phi \cup \phi = \phi$$

لأن $V \subseteq V_1 , V \subseteq V_2 \Leftarrow x \notin (A \cup B)'$ وعليه $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B' \Leftarrow (A \cup B)' = A' \cup B'$

ملاحظة

ليس من الضروري أن يكون $(A \cap B)' = A' \cap B'$ والمثال الآتي يوضح ذلك

ليكن $X = \{a,b,c,d\}$ وليكن (X,τ) فضاء تبولوجي متماسك

إذا كانت $A = \{a\},\ B = \{c,d\}$ فان $A' = \{b,c,d\}$ ، $B' = X \Leftarrow A' \cap B' = \{b,c,d\}$

$A \cap B = \phi \Leftarrow (A \cap B)' = \phi \Leftarrow (A \cap B)' \neq A' \cap B'$

النقاط الحدودية لمجموعة Boundary point of set

تعريف(23.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$. يقال عن النقطة $x \in X$ بأنها نقطة حدودية (Boundary point) أو نقطة جبهوية(Frontier Point) إلى المجموعة A إذا كان لكل مجموعة مفتوحة G في X وتحتوي على x فان $G \cap A \neq \phi$, $G \cap A^c \neq \phi$

مجموعة كل النقاط الحدودية إلى المجموعة A تسمى جبهة (Frontier) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\partial(A)$، أي أن $\partial(A) = \{x \in X : \forall G \in \tau, x \in G \Rightarrow G \cap A \neq \phi,\ G \cap A^c \neq \phi\}$

مبرهنة (24.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$

1. $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ وعليه $\partial(A) \subseteq \bar{A}$
2. $\partial(A) = \partial(A^c)$
3. $\partial(A)$ مجموعة مغلقة في X
4. $\operatorname{int}(A) = A | \partial(A)$
5. $\bar{A} = A \cup \partial(A)$

البرهان

1. نفرض أن $x \in \partial(A)$ $\Leftarrow$ لكل مجموعة مفتوحة G في X وتحتوي على x فان

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

$$G \cap A^c \neq \phi, \quad G \cap A \neq \phi$$

$$\partial(A) \subseteq \bar{A} \cap \overline{(A^c)} \Leftarrow x \in \bar{A} \cap \overline{A^c} \Leftarrow x \in \overline{A^c},\ x \in \bar{A} \Leftarrow$$

وبالمثل نبرهن $\bar{A} \cap \overline{A^c} \subseteq \partial(A) \Leftarrow \partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

2. $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A^c} \cap \bar{A} = \partial(A^c)$

3. بما أن كل من $\bar{A}$ ، $\overline{A^c}$ مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow \partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ مجموعة مغلقة في X

4. ليكن $x \in \text{int}(A)$. بما أن $\text{int}(A) \subseteq A \Leftarrow x \in A$

بما أن $\text{int}(A)$ مجموعة مفتوحة في X وتحتوي على x وان $\text{int}(A) \cap A^c = \phi$

$\Leftarrow x \notin \partial(A)$ وعليه $x \in A | \partial(A) \Leftarrow \text{int}(A) \subseteq A | \partial(A)$

الاتجاه الأخر : نفرض $y \in A | \partial(A) \Leftarrow y \in A, \quad y \notin \partial(A),$

بما أن $y \notin \partial(A) \Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي على x فانه

أما $G \cap A = \phi$ أو $G \cap A^c = \phi$

بما أن $y \in G, \quad y \in A \Leftarrow y \in G \cap A \Leftarrow G \cap A \neq \phi$

$\Leftarrow G \cap A^c = \phi \Leftarrow G \subseteq A \Leftarrow y \in G \subseteq A \Leftarrow y \in \text{int}(A)$

$\Leftarrow A | \partial(A) \subseteq \text{int}(A)$ وعليه $A^\circ = A | \partial(A)$

5. بما أن $\partial(A) \subseteq \bar{A}$, $A \subseteq \bar{A} \Leftarrow A \cup \partial(A) \subseteq \bar{A}$

ليكن $x \in \bar{A}$ هنالك احتمالان

(ا) إذا كان $x \in A$ فان $x \in A \cup \partial(A) \Leftarrow \bar{A} \subseteq A \cup \partial(A)$

(ب) إذا كان $x \notin A \Leftarrow x \in A^c \Leftarrow x \in \overline{A^c} \Leftarrow x \in \bar{A} \cap \overline{A^c}$

ولكن $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c} \Leftarrow x \in \partial(A) \Leftarrow x \in A \cup \partial(A) \Leftarrow \bar{A} \subseteq\subset A \cup \partial(A)$

وعليه $\bar{A} = A \cup \partial(A)$

مثال(25.4.1)

1. ليكن $X = \{a,b,c,d,e\}$ ، $\tau = \{\phi, \{b\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, X\}$

ولتكن $D = \{b,c,d\}$, $C = \{a,c,d\}$, $B = \{a,b\}$, $A = \{a\}$ فان

$$\partial(A) = \{a,c,d,e\}, \ \partial(B) = \{a,e\}, \ \partial(C) = \{a,c,d,e\}, \ \partial(D) = \{a,e\}$$

2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا مبعثر ولتكن $A \subseteq X$. فان

بما أن A مجموعة مغلقة $\Leftarrow \bar{A} = A$ وكذلك A^c مغلقة $\Leftarrow \overline{A^c} = A^c$

$$\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c} = A \cap A^c = \phi$$

3. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي متماسك ولتكن A مجموعة جزئية فعلية غير خالية من X. فان

$\text{int}(A) = \phi \Leftarrow \partial(\text{int}(A)) = \phi$ ولكن $\partial(A) = X \Leftarrow \partial(\text{int}(A)) \neq \partial(A)$

مثال(26.4.1)

لتكن $((\mathbb{R},\tau_u))$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $A\subseteq\mathbb{R}$.

1. إذا كانت $A=(a,b)$ فان $\partial(A)=\{a,b\}$
2. إذا كانت $A=(a,b]$ فان $\partial(A)=\{a,b\}$
3. إذا كانت $A=[a,b)$ فان $\partial(A)=\{a,b\}$
4. إذا كانت $A=[a,b]$ فان $\partial(A)=\{a,b\}$
5. إذا كانت $A=\mathbb{N}$ فان $\partial(A)=\mathbb{N}$ حيث $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية.
6. إذا كانت $A=\mathbb{Z}$ فان $\partial(A)=\mathbb{Z}$ حيث $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.
7. إذا كانت $A=\mathbb{Q}$ فان $\partial(A)=\mathbb{R}$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية
8. إذا كانت $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\}$ فان $\partial(A)=\{0\}\cup A$

مبرهنة(27.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A\subseteq X$

1. المجموعة A تكون مغلقة إذا وفقط إذا كان $\partial(A)\subseteq A$
2. $\partial(\phi)=\phi$
3. المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $A\cap\partial(A)=\phi$
4. $\partial(A)=\phi$ إذا وفقط إذا كانت المجموعة A مفتوحة ومغلقة في X
5. $\partial(\partial(A))\subseteq\partial(A)$
6. $\partial(A^c)\subseteq\partial(A)$
7. $\partial(\bar{A})\subseteq\partial(A)$

البرهان :

1. نفرض المجموعة A مغلقة $\Leftarrow$ $\bar{A}=A$

بما أن $\partial(A)\subseteq\bar{A}$ $\Leftarrow$ $\partial(A)\subseteq A$

الاتجاه الأخر : نفرض $\partial(A)\subseteq A$ $\Leftarrow$ $A\cup\partial(A)=A$

ولكن $A\cup\partial(A)=\bar{A}$ $\Leftarrow$ $\bar{A}=A$ $\Leftarrow$ A مغلقة

2. بما أن ϕ مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ $\partial(\phi)\subseteq\phi$

ولكن $\phi\subseteq\partial(\phi)$ $\Leftarrow$ $\partial(\phi)=\phi$

3. نفرض المجموعة A مفتوحة $\Leftarrow$ A^c مجموعة مغلقة $\Leftarrow$ $\partial(A^c)\subseteq A^c$ $\Leftarrow$ $A\cap\partial(A^c)=\phi$

ولكن $\partial(A)=\partial(A^c)$ $\Leftarrow$ $A\cap\partial(A)=\phi$

الاتجاه الأخر : نفرض $A\cap\partial(A)=\phi$ $\Leftarrow$ $\partial(A)\subseteq A^c$

ولكن $\partial(A)=\partial(A^c)$ $\Leftarrow$ $\partial(A^c)\subseteq A^c$

⇐ A^c مجموعة مغلقة في X ⇐ A مجموعة مفتوحة في X

4. نفرض $\partial(A)=\phi$ ⇐ $\partial(A)\subseteq A$ ⇐ A مجموعة مغلقة في X

وكذلك $A\cap\partial(A)=\phi$ ⇐ A مجموعة مفتوحة في X

⇐ المجموعة A مفتوحة ومغلقة في X

الاتجاه الأخر : نفرض المجموعة A مفتوحة ومغلقة في X

بما أن A مغلقة ⇐ $\bar{A}=A$

بما أن A مفتوحة ⇐ A^c مغلقة ⇐ $\overline{A^c}=A^c$

$$\partial(A)=\bar{A}\cap\overline{A^c}=A\cap A^c=\phi$$

5. بما أن $\partial(A)$ مجموعة مغلقة في X ⇐ $\partial(\partial(A))\subseteq\partial(A)$

6. $\partial(\text{int}(A))=\overline{\text{int}(A)}\cap\overline{(\text{int}(A))^c}=\overline{\text{int}(A)}\cap\overline{\overline{A^c}}=\overline{\text{int}(A)}\cap\overline{A^c}\subseteq\bar{A}\cap\overline{A^c}=\partial(A)$

لان $\text{int}(A)\subseteq A$ ⇐ $\overline{(\text{int}(A))}\subseteq\bar{A}$

7. $\partial(\bar{A})=\bar{\bar{A}}\cap\overline{(\bar{A})^c}=\bar{A}\cap\overline{\text{int}(A^c)}\subseteq\bar{A}\cap\overline{A^c}=\partial(A)$

لان $\text{int}(A^c)\subseteq A^c$ ⇐ $\overline{\text{int}(A^c)}\subseteq\overline{A^c}$

مبرهنة(28.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A,B\subseteq X$

1. $\partial(A\cup B)\subseteq\partial(A)\cup\partial(B)$
2. $\partial(A\cap B)\subseteq\partial(A)\cup\partial(B)$

البرهان :

.1

$$\begin{aligned}\partial(A\cup B)&=\overline{(A\cup B)}\cap\overline{((A\cup B)^c)}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap\overline{(A^c\cap B^c)}\\&\subseteq(\bar{A}\cup\bar{B})\cap(\overline{A^c}\cap\overline{B^c})=(\bar{A}\cap(\overline{A^c}\cap\overline{B^c}))\cup(\bar{B}\cap(\overline{A^c}\cap\overline{B^c}))\\&=((\bar{A}\cap\overline{A^c})\cap\overline{B^c})\cup((\bar{B}\cap\overline{B^c})\cap\overline{A^c})=(\partial(A)\cap(\overline{B^c}))\cup(\partial(B)\cap(\overline{A^c}))\subseteq\partial(A)\cup\partial(B)\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}\partial(A\cap B)&=\overline{(A\cap B)}\cap\overline{((A\cap B)^c)}\subseteq(\bar{A}\cap\bar{B})\cap\overline{(A^c\cup B^c)}\\&=(\bar{A}\cap\bar{B})\cap((\overline{A^c})\cup(\overline{B^c}))=((\bar{A}\cap\bar{B})\cap(\overline{A^c}))\cup((\bar{A}\cap\bar{B})\cap(\overline{B^c}))\\&=((\bar{A}\cap(\overline{A^c}))\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap(\bar{B}\cap(\overline{B^c})))=(\partial(A)\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\partial(B))\subseteq\partial(A)\cup\partial(B)\end{aligned}$$

النقاط الخارجة لمجموعة Exterior point of set

تعريف(29.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A \subseteq X$. يقال عن النقطة $x \in X$ بأنها نقطة خارجية (Exterior point) إلى المجموعة A إذا كانت x نقطة داخلية إلى المجموعة A^c، أي إذا وجدت مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x \in G \subset A^c$ أو يكافئ $G \cap A = \phi \quad \wedge \quad x \in G$.

مجموعة كل النقاط الخارجية إلى المجموعة A تسمى خارج (Exterior) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $e(A)$، وعليه $e(A) = \text{int}(A^c) \subseteq A^c \Leftarrow e(A) \cap A = \varphi$

مبرهنة(30.4.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A \subseteq X$.

1. $e(A) = (\bar{A})^c = \text{int}(A^c)$
2. $e(X) = \phi \ , \ e(\phi) = X$
3. $\text{int}(A) = e(A^c) = (\overline{A^c})^c$
4. $X = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup e(A)$
5. $e((e(A))^c) = e(A)$

البرهان :

1. لتكن $x \in e(A) \Leftarrow x \in \text{int}(A^c) \Leftarrow A^c$ جوار إلى النقطة x

ولكن $A \cap A^c = \phi \Leftarrow x \notin \bar{A} \Leftarrow x \in (\bar{A})^c \Leftarrow e(A) \subseteq (\bar{A})^c$

الاتجاه الآخر : ليكن $y \in (\bar{A})^c \Leftarrow y \notin \bar{A} \Leftarrow$ يوجد جوار V إلى y بحيث أن $A \cap V = \phi$

$\Leftarrow y \in V \subseteq A^c \Leftarrow y \in \text{int}(A^c) \Leftarrow y \in e(A) \Leftarrow (\bar{A})^c \subseteq e(A) \Leftarrow e(A) = (\bar{A})^c$

2. مباشرة من التعريف .
3. $\text{int}(A) = \text{int}((A^c)^c) = e(A^c) = (\overline{A^c})^c$
4. $\text{int}(A) \cup e(A) = (\overline{A^c})^c \cup (\bar{A})^c = (\overline{A^c} \cap \bar{A})^c , \quad (\text{int}(A) \cup e(A))^c = \overline{A^c} \cap \bar{A} = \partial(A)$

بما أن $X = \partial(A) \cup (\partial(A))^c$ فان $X = \partial(A) \cup (\text{int}(A) \cup e(A)) = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup e(A)$

5. $e(A) = (\bar{A})^c , \quad (e(A))^c = \bar{A}, \quad e((e(A))^c) = (\bar{\bar{A}})^c = (\bar{A})^c = e(A)$

مثال(31.4.1)

1. ليكن $X = \{a,b,c\}$ ، $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ ولتكن $A = \{a,c\}, B = \{b\}$.

لاحظ أن المجموعات المغلقة في X هي $\phi, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}, X$

بما أن $A = \{a,c\}$ مغلقة $\Leftarrow \bar{A} = A \Leftarrow (\bar{A})^c = \{b\} \Leftarrow e(A) = \{b\}$

بما أن $B = \{b\} \Leftarrow \bar{B} = \{b,c\} \Leftarrow (\bar{B})^c = \{a\} \Leftarrow e(A) = \{a\}$

2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر ولتكن $A \subseteq X$.

بما أن A مجموعة مغلقة في X لأن الفضاء التبولوجي (X,τ) مبعثر

$\Leftarrow \quad \bar{A} = A \quad \Leftarrow \quad (\bar{A})^c = A^c \quad \Leftarrow \quad e(A) = A^c$

مثال(32.4.1)

لتكن $((\mathbb{R}, \tau_u))$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. إذا كانت $A = (a,b)$ فان $e(A) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
2. إذا كانت $A = (a,b]$ فان $e(A) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
3. إذا كانت $A = [a,b)$ فان $e(A) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
4. إذا كانت $A = [a,b]$ فان $e(A) = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
5. إذا كانت $A = \mathbb{N}$ فان $e(A) = A^c$ حيث $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية.
6. إذا كانت $A = \mathbb{Z}$ فان $e(A) = A^c$ حيث $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.
7. إذا كانت $A = \mathbb{Q}$ فان $e(A) = \phi$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعة الأعداد النسبية
8. إذا كانت $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ فان $e(A) = (\{0\} \cup A)^c$

مبرهنة (33.4.1)

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A, B \subseteq X$

1. $\bar{A} = \text{int}(A) \cup \partial(A)$
2. إذا كانت $A \subseteq B$ فان $e(B) \subseteq e(A)$
3. $e(A \cup B) = e(A) \cap e(B)$

البرهان

1. بما أن $X = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup e(A) \quad \Rightarrow \quad e(A) = (\text{int}(A) \cup \partial(A))^c$
ولكن $e(A) = (\bar{A})^c \quad \Rightarrow \quad (\bar{A})^c = (\text{int}(A) \cup \partial(A))^c \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \text{int}(A) \cup \partial(A)$
2. بما أن $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \bar{A} \subseteq \bar{B} \quad \Rightarrow \quad (\bar{B})^c \subseteq (\bar{A})^c \quad \Rightarrow \quad e(B) \subseteq e(A)$
3. $e(A \cup B) = (\overline{A \cup B})^c = (\bar{A} \cup \bar{B})^c = (\bar{A})^c \cap (\bar{B})^c = e(A) \cap e(B)$

تمارين(4.1)

1. لتكن $X=\{a,b,c\}$ ، $\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$ ولتكن $A=\{b\}$ احسب $\overline{\text{int}(A)}$ ، $\text{int}(\overline{A})$
2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A\subseteq X$. برهن على أن
   ا. $(\overline{A})^c=\text{int}(A^c)$
   ب. $(\text{int}(A))^c=\overline{A^c}$
3. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A,B\subseteq X$. برهن على أن
   ا. إذا كانت كل من A,B مجموعة واهنة فان تكون أيضا مجموعة واهنة $A\bigcup B$.
   ب. إذا كانت A مجموعة مغلقة وكان $\text{int}(A)$ فان A^c تكون واهنة.
   ج. إذا كانت $A\subseteq B$ وكانت B مجموعة واهنة فان A تكون واهنة.
4. لتكن $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الإعداد الطبيعية ولتكن $A_m=\{m,m+1,m+2,\cdots\}$.نعرف $\tau=\{\phi\}\cup\{A_m:m\in\mathbb{N}\}$ فان $(\mathbb{N},\tau)$ فضاء تبولوجي.
   ا. احسب A' أذا كانت $A=\{3,12,28,35\}$
   ب. هل توجد مجموعة جزئية B من $\mathbb{N}$ بحيث أن $B'=\mathbb{N}$.
   ج.احسب $\{1\}'$
5. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مكمل المنتهي ولتكن $A\subseteq X$. برهن على أن A' مجموعة مغلقة.
6. ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، $\tau=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,b,c,d\},X\}$ احسب A' إذا كانت
   ا. $A=\{a,b\}$
   ب. $A=\{b,c,d\}$
   ج. $A=\{a,b,c\}$
   د. $A=\{b,d\}$
7. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A\subseteq X$ برهن على أن
   ا. $\overline{A}=A^{\circ}\cup\partial(A)$
   ب. $\partial(A)=\overline{A}\,|\,\text{int}(A)$
   ج.إذا كانت A مجموعة مفتوحة فان $\partial(A)=\overline{A}\,|\,A$
8. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A,B\subseteq X$. بين فيما اذا كانت أي من العبارات التالية صحيحة أم لا ؟مع البرهان
   ا. إذا كانت $A\subseteq B$ فان $\partial(A)\subseteq\partial(B)$
   ب. إذا كانت $A\cap B\neq\phi$ فان $\partial(A)\cap\partial(B)\subseteq\partial(A\cap B)$
   ج. إذا كانت $\overline{A}\cap\overline{B}=\phi$ فان $\partial(A\cup B)=\partial(A)\cup\partial(B)$

5.1 التبولوجيا النسبية الفضاءات الجزئية Relative Topology and Subspaces

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن Y مجموعة من X. الهدف في هذا البند إنشاء تبولوجي τ_Y على Y يسمى بالتبولوجي النسبي (Relative Topology) أو التبولوجيا المستحثة (Induced Topology) بواسطة τ. الثنائي (Y,τ_Y) يسمى فضاء جزئيا (Subspace) من الفضاء (X,τ). المبرهنة التالية تبين كيفية إنشاء التبولوجي τ_Y.

مبرهنة (1.5.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $Y \subseteq X$ فأن $\tau_Y = \{G \cap Y : G \in \tau\}$ يكون تبولوجي على τ_Y ويسمى بالتبولوجيا النسبية أو التبولوجيا المستحثة بواسطة τ وان الثنائي (Y,τ_Y) يسمى بالفضاء الجزئي من الفضاء التبولوجي (X,τ)

البرهان :-

1. بما أن $\phi \in \tau \Leftarrow \phi \cap Y = \phi \Leftarrow \phi \in \tau_Y$

بما أن $X \in \tau \Leftarrow X \cap Y = Y \Leftarrow Y \in \tau_Y$

2. ليكن $A_i \in \tau_Y$ لكل $i = 1,2,\cdots,n \Leftarrow A_i = G_i \cap Y$ حيث $G_i \in \tau$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (G_i \cap Y_i) = (\bigcap_{I=1}^{n} G_i) \cap Y$$

بما أن $G_i \in \tau$ لكل $i = 1,2,\cdots,n \Leftarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau \Leftarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_Y$

3. لتكن $A_\lambda \in \tau_Y$ لكل $\lambda \in \Lambda \Leftarrow A_\lambda = G_\lambda \cap Y$ حيث $G_\lambda \in \tau$ لكل $\lambda \in \Lambda$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda \cap Y) = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda) \cap Y$$

بما أن $G_\lambda \in \tau$ لكل $\lambda \in \Lambda \Leftarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \tau \Leftarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_Y$

$\Leftarrow$ τ_Y تبولوجي على Y.

تعريف(2.5.1)

يقال عن خاصية تبولوجية (في الفضاء التبولوجي (X,τ)) بأنها خاصية وراثية (Hereditary property) إذا كان كل فضاء جزئي من (X,τ) يمتلك تلك الخاصية

ملاحظة

ليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئيا من الفضاء التبولوجي (X,τ). من الممكن أن تكون مجموعة جزئية من Y مفتوحة أو مغلقة باعتبارها مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي (Y,τ_Y) وليس في الفضاء التبولوجي (X,τ). ولكي نتجنب الالتباس سنميز بين المجموعات المفتوحة في (Y,τ_Y) بان ندعوها مفتوحة نسبيا (Relatively Open) ونقول إنها مفتوحة في Y أو تنتمي إلى τ_Y. وتستخدم مصطلحات متشابهة بالنسبة للمجموعات المغلقة. إذا رمزنا لانغلاق A بالرمز $\overline{A}$ في (X,τ) سوف نرمز لانغلاق A بالرمز $\overline{A_Y}$ في (Y,τ_Y) وبصورة مشابهة للمجموعات الأخرى مثل A° في (X,τ) تكون A_Y° في (Y,τ_Y).

مثال(3.5.1)

ليكن $X=\{1,2,3,4,5\}$, $\tau=\{\phi,\{1\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4,5\},X\}$ وليكن $Y=\{1,4,5\}$ احسب τ_Y

الحل : $\phi\cap Y=\phi,\quad \{1\}\cap Y=\{1\},\quad \{3,4\}\cap Y=\{4\},\quad \{1,3,4\}\cap Y=\{1,4\},\quad \{2,3,4,5\}\cap Y=\{4,5\},\quad X\cap Y=Y$

$\Leftarrow$ $\tau_Y=\{\phi\{1\},\{4\},\{1,4\},\{4,5\},Y\}$.

مثال (4.5.1)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي. ناقش التبولوجي النسبي على $\mathbb{N}$ حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية.

الحل

ليكن $m\in\mathbb{N}$

$$\Leftarrow \quad (m-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2})\in\tau_u \quad \Leftarrow \quad (m-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2})\cap\mathbb{N}=\{m\} \quad \Leftarrow \quad \{m\}\in\tau_{\mathbb{N}}$$

وعليه كل مجموعة جزئية أحادية من $\mathbb{N}$ تكون مفتوحة في $\mathbb{N}$ وبذلك تكون كل مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{N}$ وعليه $(\mathbb{N},\tau_{\mathbb{N}})$ فضاء تبولوجي مبعثر.

مثال (5.5.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر وليكن $Y\subseteq X$ فان (Y,τ_Y) يكون فضاء تبولوجي مبعثر إذا وفقط إذا كان (Y,τ_Y) فضاء جزئي من (X,τ)

البرهان :

نفرض أن ((Y,τ_Y)) فضاء تبولوجي مبعثر. يجب أن نبرهن τ_Y تبولوجي نسبي على Y

لتكن $A\in\tau_Y$ $\Leftarrow$ $A\subseteq Y$ $\Leftarrow$ $A\subseteq X$

بما أن τ تبولوجي مبعثر على X $\Leftarrow$ $A\in\tau$ $\Leftarrow$ $A=A\cap Y\in\tau_Y$

$\Leftarrow$ τ_1 تبولوجي نسبي على Y

الاتجاه الأخر : نفرض (Y,τ_Y) فضاء جزئي. يجب أن نبرهن τ_Y تبولوجي مبعثر على Y

لتكن $A\subseteq Y$ $\Leftarrow$ $A\subseteq X$

بما أن τ تبولوجي مبعثر $\Leftarrow$ $A\in\tau$ $\Leftarrow$ $A=A\cap Y\in\tau_Y$

$\Leftarrow$ τ_Y تبولوجي مبعثر على Y.

مثال(6.5.1)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي متماسك وليكن $Y\subseteq X$ فان (Y,τ_Y) يكون فضاء تبولوجي متماسك إذا وفقط إذا كان (Y,τ_Y) فضاء جزئي من (X,τ)

البرهان :

نفرض (Y,τ_Y) فضاء تبولوجي متماسك. يجب أن نبرهن τ_Y تبولوجي نسبي على Y

ليكن $A\in\tau_Y$ $\Leftarrow$ إما $A=\phi$ أو $A=Y$ لأن τ_Y تبولوجي متماسك على Y

وعليه $A\in\tau_Y$ لأن τ_Y تبولوجي على Y وان $\phi,\ Y\in\tau_Y$.

الاتجاه الأخر : نفرض $(Y\,,\tau_Y)$ فضاء جزئي من $(X\,,\tau)$. يجب أن نبرهن τ_Y تبولوجي متماسك.

نفرض أن $A\in\tau_Y$ ⇐ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $A=G\cap Y$

بما أن τ تبولوجي متماسك على X ⇐ أما $G=\phi$ أو $G=X$

⇐ أما $A=\phi$ أو $A=Y$ ⇐ τ_Y تبولوجي متماسك على Y.•

مثال(7.5.1)

ليكن $(Y\,,\tau_Y)$ فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي المكمل المنتهي $(X\,,\tau)$ برهن على أن $(Y\,,\tau_Y)$ يكون أيضا فضاء تبولوجي مكمل المنتهي.

البرهان :

لتكن $A\in\tau_Y$ حيث $A\neq\phi$. يجب أن نبرهن أن $A_Y^C=Y\,|\,A$ مجموعة منتهية

بما أن τ_Y تبولوجي نسبي على Y ⇐ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $A=G\cap Y$

$$A_Y^c=(G\cap Y)_Y^c=Y\,|\,(G\cap Y)=Y\cap(G\cap Y)^c=Y\cap(G^c\cup Y^c)$$

$$=(Y\cap G^c)\cup(Y\cap Y^c)=(Y\cap G^c)\cap\phi=Y\cap G^c$$

بما أن τ تبولوجي مكمل المنتهي، $G\in\tau$ ⇐ G^c مجموعة منتهية.

⇐ $Y\cap G^c$ مجموعة منتهية ⇐ A_Y^c مجموعة منتهية. ⇐ τ_Y مكمل المنتهي. •

مبرهنة (8.5.1)

ليكن $(Y\,,\tau_1)$ فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي $(X\,,\tau)$ وليكن $(Z\,,\tau_2)$ فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي $(Y\,,\tau_1)$ فأن $(Z\,,\tau_2)$ فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي $(X\,,\tau)$.

البرهان:

بما أن $Z\subseteq Y\subseteq X$ ⇐ $Z\subseteq X$

ليكن $A\in\tau_2$

بما أن $(Z\,,\tau_2)$ فضاء جزئي من $(Y\,,\tau_1)$ ⇐ $A=V\cap Z$ حيث $V\in\tau_1$

بما أن $(Y\,,\tau_1)$ فضاء جزئي من $(X\,,\tau)$ ⇐ $V=G\cap Y$ حيث $G\in\tau$

$$A=V\cap Z=(G\cap Y)\cap Z=G\cap(Y\cap Z)$$

بما أن $Z\subseteq Y$ ⇐ $Y\cap Z=Z$ ⇐ $A=G\cap Z$ ⇐ $A\in\tau_Z$ ⇐ $\tau_2\subseteq\tau_Z$

ليكن $B\in\tau_Z$ ⇐ $B=G\cap Z$ حيث $G\in\tau$

بما أن $(Y\,,\tau_1)$ فضاء جزئي من (X,τ) ⇐ $G\cap Y\in\tau_1$

وكذلك بما أن $(Z\,,\tau_2)$ فضاء جزئي من $(X\,,\tau_1)$ ⇐ $(G\cap Y)\cap Z\in\tau_2$

⇐ $G\cap(Y\cap Z)\in\tau_2$

ولكن $Y\cap Z=Z$ ⇐ $G\cap Z\in\tau_2$ ⇐ $B\in\tau_2$ ⇐ $\tau_Z\subseteq\tau_2$ ⇐ $\tau_2=\tau_Z$

⇐ $(Z\,,\tau_2)$ فضاء جزئي من (X,τ).•

مبرهنة(9.5.1)

ليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي (X,τ) ولتكن $V, A \subseteq Y$

1. إذا كانت المجموعة A مفتوحة في X فأنها مفتوحة في Y.
2. المجموعة A تكون مغلقة في Y إذا وفقط إذا توجد مجموعة مغلقة K في X بحيث أن $A = K \cap Y$
3. إذا كانت المجموعة A مغلقة في X فأنها مغلقة في Y.
4. المجموعة V تكون جوار إلى النقطة $y \in Y$ بالنسبة للتبولوجي τ_Y إذا وفقط إذا كان $V = U \cap Y$ حيث U جوار إلى النقطة y بالنسبة للتبولوجي τ.

البرهان :

1. بما أن $A \in \tau \Leftarrow A \cap Y \in \tau_Y$

ولكن $A \subseteq Y \Leftarrow A \cap Y = A \Leftarrow A \in \tau_Y$

2. (أ) نفرض المجموعة A مغلقة في $Y \Leftarrow A_Y^c = Y | A$ مفتوحة في Y.

$\Leftarrow A_Y^c = G \cap Y$ حيث G مجموعة مفتوحة في X.

$Y | A = G \cap Y$

$A = Y | (G \cap Y) = Y \cap (G \cap Y)^c = Y \cap (G^c \cup Y^c) = (Y \cap G^c) \cup (Y \cap Y^c) = G^c \cap Y$

نضع $K = G^c$، بما أن G مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow K$ مجموعة مغلقة في X وان

$A = K \cap Y$

وبالمثل نبرهن الاتجاه الأخر .

3. بما أن A مغلقة في $X \Leftarrow A \cap Y$ مغلقة في Y.

بما أن $A \subseteq Y \Leftarrow A \cap Y = A \Leftarrow A$ مغلقة في Y.

4. لتكن V جوار إلى النقطة $y \in Y$ بالنسبة إلى التبولوجي τ_Y

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة H في Y بحيث أن $y \in H \subset V$ $\Leftarrow$

توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $H = G \cap Y$

$\Leftarrow y \in G \cap Y \subset V$

نضع $U = V \cup G$

بما أن $y \in G \subset U \Leftarrow U$ جوار إلى النقطة y بالنسبة للتبولوجي τ

بما أن $U \cap Y = (V \cup G) \cap Y = (V \cap Y) \cup (G \cap Y)$

$V \subset Y \Leftarrow V \cap Y = V \Leftarrow U \cap Y = V \cup (G \cap Y)$

بما أن $G \cap Y \subset V \Leftarrow V \cup (G \cap Y) = V \Leftarrow U \cap Y = V$

الاتجاه الأخر : نفرض $V = U \cap Y$ حيث U جوار إلى النقطة y بالنسبة للتبولوجي τ

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $y \in G \subset U$

$\Leftarrow G \cap Y$ مجموعة مفتوحة في X وان $y \in G \cap Y \subset U \cap Y = V$

$\Leftarrow V$ جوار إلى النقطة y بالنسبة للتبولوجي τ_Y.•

ملاحظة

ليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي (X,τ) ولتكن $A\subseteq Y$

1. إذا كانت A مجموعة مفتوحة في Y فليس من الضروري أن تكون مفتوحة في X
2. إذا كانت A مجموعة مغلقة في Y فليس من الضروري أن تكون مغلقة في X

ففي لمثال **(3.5.1)**

1. إذا كانت $A=\{1,4\}$ فان A مفتوحة في Y وليست مفتوحة في X
2. إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ فان A مغلقة في Y وليست مغلقة في X

مبرهنة(10.5.1)

ليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي (X,τ) ولتكن $A\subseteq X$

1. $A^\circ \subset A_Y^\circ$
2. $\overline{A}_Y=\overline{A}\cap Y$

البرهان

1. نفرض $x\in A^\circ$ $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x\in G\subseteq A$

بما أن $G\in\tau$ $\Leftarrow$ $G\cap Y\in\tau_Y$

بما إن $G\subset A$, $A\subset Y$ $\Leftarrow$ $G\subset Y$ $\Leftarrow$ $G\cap Y=G$ $\Leftarrow$ $G\in\tau_Y$

أصبح أن G مجموعة مفتوحة في Y وان $x\in G\subseteq A$ $\Leftarrow$ $x\in A_Y^\circ$ $\Leftarrow$ $A^\circ\subset A_Y$

2. $\overline{A_Y}=\cap\{F\subseteq Y: A\subset F$ بحيث أن Y مجموعة مغلقة في $F\}$

$=\{K\cap Y: A\subset K$ بحيث أن X مجموعة مغلقة في $K\}$

$=(\cap\{K\subseteq X: A\subset K$ بحيث أن X مجموعة مغلقة في $K\})\cap Y$

$=\overline{A}\cap Y$

مثال(11.5.1)

ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، $\tau=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},X\}$ وليكن $Y=\{a,c,e\}$

جد τ_Y ثم جد كل من $\overline{A}_Y,\overline{A},A_Y^\circ,A^\circ$ إذا كانت $A=\{a,e\}$

الحل

$\tau_Y=\{\phi,\{a\},\{a,c\},\{a,e\},Y\}$

$A_Y^\circ=\{a,e\},\quad A^\circ=\{a\}$

المجموعات المغلقة في X هي $\phi,\{b,c,d,e\},\{c,d,e\},\{b,e\},\{c,d\},\{e\},X$ $\Leftarrow$ $\overline{A}=X$

المجموعات المغلقة في Y هي $\phi,\{b,c,d,e\},\{b,d,e\},\{b,c,d\},Y$ $\Leftarrow$ $\overline{A}_Y=Y$

مبرهنة(12.5.1)

لتكن (Y,τ_Y) فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي (X,τ)

أ.د. نوري فرحان المياحي
كلية العلوم / جامعة القادسية

1. إذا كانت β قاعدة إلى التبولوجي τ فان $\beta_Y=\{V\cap Y=V\in\beta\}$ تكون قاعدة إلى التبولوجي τ_Y
2. إذا كانت σ قاعدة جزئية إلى التبولوجي τ فان $\sigma_Y=\{V\cap Y:V\in\sigma\}$ تكون قاعدة جزئية إلى التبولوجي τ_Y
3. إذا كانت $\beta(x)$ قاعة محلية عند النقطة $x\in Y$ بالنسبة للتبولوجي τ فان $\beta_Y(x)=\{k\cap Y\ :\ K\in\beta(x)\}$ تكون قاعدة محلية عند النقطة $x\in Y$ بالنسبة للتبولوجي τ_Y.

البرهان :

لتكن $A\in\tau_Y$ ولتكن $x\in A$ $\Leftarrow$ توجد $G\in\tau$ بحيث أن $A=G\cap Y$

بما أن β قاعدة إلى التبولوجي τ $\Leftarrow$ توجد $V\in\beta$ بحيث أن $x\in V\subset G$

بما أن $A\subset Y$, $x\in A$ $\Leftarrow$ $x\in Y$ $\Leftarrow$ $x\in V\cap Y\subset G\cap Y=A$

وعليه يوجد $U=V\cap Y\in\beta_Y$ بحيث أن $x\in U\subset A$ $\Leftarrow$ β_Y قاعدة إلى التبولوجي τ_Y.

وبالمثل نبرهن (2)،(3) .

تمارين (5.1)

1. ليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي (X,τ) ولتكن $A\subseteq X$. برهن على أن
   - أ. $A^\circ=A_Y^\circ\cap Y^\circ$
   - ب. $\overline{A}_Y=A'\cap Y$
   - ج. $\partial(A)_Y\subset\partial(A)$
   - د. $e(A)_Y=e(A)\cap Y$

6.1 الفضاءات المترية Metric Spaces

مفهوم الفضاءات المترية من المفاهيم المهمة في الرياضيات الحديثة.الفضاءات المترية هي تعمم لمفهوم المسافة والتقارب في الأعداد الحقيقة . في هذا البند نقدم التعاريف والملاحظات والمبرهنات والأمثلة المتعلقة في الفضاءات المترية.

تعريف (1.6.1)

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية. يقال عن الدالة $d:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathbb{R}$ بأنها دالة مترية (Metric Function) على X إذا تحققت البديهيات الآتية:

1. $d(x,y)\ge 0$ لكل $x,y\in X$
2. $d(x,y)=0$ إذا وفقط إذا كان $x=y$
3. $d(x,y)=d(y,x)$ لكل $x,y\in X$
4. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ لكل $x,y,z\in X$ (المتراجحة المثلثية)

الفضاء المتري (Metric Space) هو الثنائي (X,d) حيث X مجموعة غير خالية ، d دالة مترية على X. سوف نكتب X بدلا من (X,d) في حالة عدم وجود التباس . عناصر المجموعة X تسمى بالنقاط ولكل $x,y\in\mathrm{X}$ يسمى

العدد الحقيقي $d(x,y)$ بالبعد بين النقطتين x,y . كما تسمى d دالة البعد أو دالة المسافة . من البديهيتين (1) و(2) نستنتج إذا كانت $x \neq y$ فان $d(x,y) > 0$ وعليه البعد بين أي نقطتين مختلفتين يكون موجبا.

ملاحظة

إذا كانت جميع البديهيات في التعريف (1.1.2) متحققة ، ما عدى البديهية (2) تكون بالشكل $d(x,x) = 0$. في هذه الحالة يقال عن الدالة d بأنها شبه مترية (Pseudo Metric) والثنائي (X,d) يسمى فضاء شبه متري (Pseudo Metric Space).

مثال (2.6.1)

1. الدالة $d_u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d_u(x,y) = |x-y|$ لكل $x.y \in \mathbb{R}$ فان d_u تكون دالة مترية على $\mathbb{R}$، وان $(\mathbb{R},d_u)$ يسمى بالفضاء المتري الاعتيادي (Usual Metric Space).
2. الدالة $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(x,y) = |x-y|+1$ لكل $x,y \in \mathbb{R}$. ليست دالة مترية على $\mathbb{R}$
3. لتكن X مجموعة غير خالية . الدالة $d : \mathrm{X}\times\mathrm{X} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ لكل $x,y \in X$. فان d دالة مترية على X، وعليه (X,d) فضاء متري و يسمى الفضاء المتري المبعثر (Discrete Metric Space)

الحل :

1. (ا) ليكن $x,y \in \mathbb{R} \Leftarrow x-y \in \mathbb{R} \Leftarrow |x-y| \geq 0 \Leftarrow d_u(x,y) \geq 0$.

(ب) $x = y \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow d_u(x,y) = 0$.

(ج) ليكن $x,y \in \mathbb{R}$ ، $\Leftarrow d_u(x,y) = |x-y| = |y-x| = d_u(y,x)$

(د) ليكن $x,y,z \in \mathbb{R}$

$x-y = (x-z)+(z-y) \Rightarrow |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y|$

$\Rightarrow d_u(x,y) \leq d_u(x,z)+d_u(z,y) \Rightarrow d_u$ دالة مترية على $\mathbb{R}$

2. ليكن $x,y \in \mathbb{R}$ بحيث أن $x = y \Leftarrow d(x,y) = 1$ وهذا يعني أن البديهية الثانية ليست متحققة $\Leftarrow d$ ليست مترية

3. (ا) بما أن $d(x,y) = 0$ أو $d(x,y) = 1$ لكل $x,y \in \mathrm{X} \Leftarrow d(x,y) \geq 0$ لكل $x,y \in X$

(ب) ليكن $x,y \in \mathrm{X}$ ، من التعريف مباشرة نحصل على أن $d(x,y) = 0$ عندما $x = y$.

(ج) ليكن $x,y \in \mathrm{X}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 0, & y = x \\ 1 & y \neq x \end{cases} = d(y,x)$$

(د) ليكن $x,y,z \in \mathrm{X}$

(i) إذا كان $x = y \Leftarrow d(x,y) = 0$

بما أن $d(x,z) \geq 0, d(z,y) \geq 0 \Leftarrow d(x,z)+d(z,y) \geq 0 \Leftarrow d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

(ii) إذا كان $x \neq y \Leftarrow d(x,y)=1$
وبهذه الحالة يكون z لا يساوي احدهما على الأقل أي أن $z \neq x$ أو $z \neq y$
وليكن $z \neq x$ مثلا $d(x,z)=1 \Leftarrow$ ، بما أن $d(z,y)\geq 0 \Leftarrow d(x,z)+d(z,y)\geq 1$
وعليه $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \Leftarrow d$ دالة مترية على X

مثال(3.6.1) الفضاءات الإقليدية Euclidean Spaces

1. الدالة $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$
لكل $x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ تكون دالة مترية على $\mathbb{R}^n$ ، وعليه $(\mathbb{R}^n,d)$ فضاء متري.
2. الدالة $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$
لكل $x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ تكون دالة مترية على $\mathbb{R}^n$، وعليه $(\mathbb{R}^n,d)$ فضاء متري .
3. الدالة $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(x,y)=\max\{|x_i-y_i|: i=1,2,\cdots,n\}$
لكل $x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ تكون دالة مترية على $\mathbb{R}^n$ ، وعليه $(\mathbb{R}^n,d)$ فضاء متري.

الحل :

1. (أ) ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$
$\Leftarrow x_i-y_i\in\mathbb{R}$ لكل $i=1,2,\cdots,n$ $\Leftarrow (x_i-y_i)^2\geq 0$ لكل $i=1,2,\cdots,n$ $\Leftarrow d(x,y)\geq 0$

(ب)
$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow (\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (x_i-y_i)^2=0 \quad \forall i=1,2,\cdots,n \quad \Leftrightarrow x_i-y_i=0 \quad \forall i=1,2,\cdots,n$$
$$\Leftrightarrow x_i=y_i \quad \forall i=1,2,\cdots,.n \quad \Leftrightarrow x=y$$

(ج) ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$
$$d(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2)^{\frac{1}{2}}=d(y,x)$$

(د) ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n),z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$.
نضع $\alpha_i=x_i-z_i,\ \ \beta_i=z_i-y_i$
$$d(x,z)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2})^{\frac{1}{2}},\quad d(z,y)=(\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{\,2})^{\frac{1}{2}}$$
$$d(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}((x_i-z_i)+(z_i-y_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$
باستخدام متراجحة منكوفسكي نحصل على
$$(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)^2)^{\frac{1}{2}}\leq(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2})^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{\,2})^{\frac{1}{2}}$$

وعليه $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \Leftarrow d$ دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

2. (أ)، (ب)، (ج) واضحة

(د) ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n), z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$

نضع $\alpha_i = x_i - z,\quad \beta_i = z_i - y_i$

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i+\beta_i| \quad\Leftarrow\quad d(x,z)=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \ ,\ d(z,y)=\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|$$

بما أن $|\alpha_i+\beta_i|\le|\alpha_i|+|\beta_i|$ وعليه $d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z) \Leftarrow d$ دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

3. (أ)، (ب)، (ج) واضحة

(د) ليكن $x=(x_1,\cdots,x_n),\ y=(y_1,\cdots,y_n), z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$.

نضع $\alpha_i = x_i - z,\quad \beta_i = z_i - y_i \quad\Leftarrow\quad \alpha_i+\beta_i = x_i - y_i$

$$d(x,z)=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\cdots,|\alpha_n|\}\ ,\ d(z,y)=\max\{|\beta_1|,|\beta_2|\cdots,|\beta_n|\}\ ,$$
$$d(x,y)=\max\{|\alpha_1+\beta_1|,|\alpha_2+\beta_2|,\cdots,|\alpha_n+\beta_n|\}$$

بما أن $|\alpha_i+\beta_i| \le |\alpha_i|+|\beta_i|$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$$d(x,y)\le\max\{|\alpha_1|,|\beta_1|,|\alpha_2|,|\beta_2|,\cdots,|\alpha_n|,|\beta_n|\}\le\max\{|\alpha_1|,|\alpha_2|,\cdots,|\alpha_n|\}+\max\{|\beta_1|,|\beta_2|\cdots,|\beta_n|\}=d(x,z)+d(z,y) \quad\Leftarrow\quad d$$

دالة مترية على $\mathbb{R}^n$.

مثال (4.6.1)

إذا كان كل من $(X,d_1),\ (Y,d_2)$ فضاء مترياً فان $(X\times Y,d)$ يكون فضاء مترياً حيث

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}$$

لكل $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

الحل :

1. ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y \ \Leftarrow\ d_1(x_1,x_2)\ge 0,\ \ d_2(y_1,y_2)\ge 0$

$\Leftarrow\ \max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}\ge 0 \ \Leftarrow\ d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\ge 0$

2. ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0 \ \Leftrightarrow\ \max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}=0 \ \Leftrightarrow\ d_1(x_1,x_2)=0,\ \ d_2(y_1,y_2)=0$$
$$\Leftrightarrow\ x_1=x_2,\ \ y_1=y_2 \ \Leftrightarrow\ (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

3. ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\}=\max\{d_2(x_2,x_1),d_1(y_2,y_1)\}=d((x_2,y_2),(x_1,y_1))$$

4. ليكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in X\times Y$

$$\begin{aligned} d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= \max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\} \\ &\le \max\{d_1(x_1,x_3)+d_1(x_3,x_2),d_2(y_1,y_3)+d_2(y_3,y_2)\} \\ &\le \max\{d_1(x_1,x_3),d_2(y_1,y_3)\}+\max\{d_1(x_3,x_2),d_2(y_3,y_2)\} \\ &= d((x_1,y_1),(x_3,y_3))+d((x_3,y_3),(x_2,y_2)) \end{aligned}$$

مثال(5.6.1)

ليكن X تمثل مجموعة كل الدوال الحقيقية على الفترة المغلقة $[0,1]$ والقابلة للتكامل على تلك الفترة. عرف الدالة $d: X\times X\to\mathbb{R}$ بالصيغة $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$ لكل $f,g\in X$، فان d دالة شبه مترية وليست مترية على X.

الحل:

باستعمال خواص التكامل نبرهن البديهيات الآتية:

1. ليكن $f,g\in X$ $\Leftarrow$ $|f(x)-g(x)|>0$ $\Leftarrow$ $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx>0$
2. ليكن $f\in X$ $\Leftarrow$ $d(f,f)=\int_0^1|f(x)-f(x)|dx=\int_0^1|0|dx=0$
3. ليكن $f,g\in X$ $\Leftarrow$ $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|g(x)-f(x)|dx=d(g,f)$
4. ليكن $f,g,h\in X$

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|dx$$

$$\le\int_0^1(|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|)dx=\int_0^1|f(x)-h(x)|dx+\int_0^1|h(x)-g(x)|dx=d(f,h)+d(h,g)$$

$\Leftarrow$ d دالة شبه مترية، بقي أن نبرهن على أن d دالة ليست مترية.

نعرف الدوال $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ بالصورة الآتية :

$$g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases}\ ,\quad f(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases}\ \Leftarrow\ f(x)-g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & 0<x\le 1\end{cases}$$

$\Leftarrow$ $d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=0$ ولكن $f\neq g$.

مبرهنة(6.6.1)

ليكن (X,d) فضاء شبه متري . نعرف العلاقة $\sim$ على X كالأتي :

$x\sim y$ إذا وفقط إذا كان $d(x,y)=0$

1. $\sim$ تكون علاقة تكافؤ على X
2. إذا كان $[x]$ يمثل صف التكافؤ إلى x وكانت $A=\{[x]:x\in X\}$، فان الدالة $d^*:A\times A\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d^*([x],[y])=d(x,y)$ تكون مترية على A، أي إن (A,d^*) فضاء متريا

البرهان:

1. بما أن $d(x,x)=0$ لكل $x\in X$ $\Leftarrow$ $x\sim x$ وعلية تكون العلاقة $\sim$ انعكاسية

ليكن $x\sim y$ $\Leftarrow$ $d(x,y)=0$

ولكن $d(x,y)=d(y,x)$ $\Leftarrow$ $d(y,x)=0$ $\Leftarrow$ $y\sim x$ وعلية تكون العلاقة $\sim$ متناظرة.

ليكن $x\sim y,\ \ y\sim z$ $\Leftarrow$ $d(x,y)=0,\ \ d(y,z)=0$

بما أن $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ $\Leftarrow$ $d(x,z)\le 0$

ولكن $d(x,z)\ge 0$ $\Leftarrow$ $d(x,z)=0$ $\Leftarrow$ $x\sim z$ وعلية تكون العلاقة $\sim$ متعدية.

وهذا يعني أن $\sim$ علاقة تكافؤ على X

2. إذا كان $a\in[x], b\in[y]$ فان $b\sim y$, $a\sim x$ $\Leftarrow$ $d(x,a)=0,\ \ d(y,b)=0$

بما أن $|d(x,y)-d(a,b)|\le d(x,a)+d(y,b)$ $\Leftarrow$ $|d(x,y)-d(a,b)|\le 0$

بما أن القيمة المطلقة غير سالبة فان $|d(x,y)-d(a,b)|=0$

$\Leftarrow$ $d(x,y)-d(a,b)=0$ $\Leftarrow$ $d(x,y)=d(a,b)$ وعلية d^* معرفة تعريفا حسنا.

بما أن $d(x,y)\ge 0$ لكل $x,y\in X$ $\Leftarrow$ $d^*([x],[y])\ge 0$ لكل $[x],[y]\in A$

ليكن $x,y\in X$ $\Leftarrow$ $[x]=[y] \Leftrightarrow x\sim y \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow d^*([x],[y])=0$

ليكن $x,y\in X$ $\Leftarrow$ $d^*([x],[y])=d(x,y)=d(y,x)=d^*([y],[x])$

ليكن $x,y,z\in X$ $\Leftarrow$ $d^*([x],[y])=d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)=d^*([x],[z])+d^*([z],[y])$

وعلية (A,d^*) فضاء متري .

مبرهنة (7.6.1)

ليكن (X,d) فضاء متريا

1. $|d(x,z)-d(z,y)|\le d(x,y)$ لكل $x,y,z\in X$
2. $|d(x,y)-d(z,w)|\le d(x,z)+d(y,w)$ لكل $x,y,z,w\in X$

البرهان :

$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)=d(x,y)+d(z,y)$ $\Leftarrow$ $d(x,z)-d(z,y)\le d(x,y)\quad \cdots(1)$

وكذلك $d(z,y)\le d(z,x)+d(x,y)=d(x,z)+d(x,y)$ $\Leftarrow$ $d(z,y)-d(x,z)\le d(x,y)$

$\Leftarrow$ $-(d(x,z)-d(z,y)\le d(x,y)$ $\Leftarrow$ $d(x.z)-d(z,y)\ge -d(x,y)\quad \cdots(2)$

من المتراجحتين(1)،(2) نحصل على $-d(x,y)\le d(x,z)-d(z,y)\le d(x,y)$

$\Leftarrow |d(x,z)-d(z,y)|\le d(x,y)$

(2) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)\le d(x,z)+d(z,w)+d(w,y)=d(x,z)+d(z,w)+d(y,w)$

$d(x,y)-d(z,w)\le d(x,z)+d(y,w)\quad \cdots(3)$

$d(z,w)\le d(z,x)+d(x,w)\le d(z,x)+d(x,y)+d(y,w)=d(x,z)+d(x,y)+d(y,w)$

$d(z,w)-d(x,y)\le d(x,z)+d(y,w)$

$d(x,y)-d(z,w)\geq -(d(x,z)+d(y,w)) \quad \cdots(4)$

من المتراجحتين(3)،(4) نحصل على $-(d(x,z)+d(y,w))\leq d(x,y)-d(z,w)\leq d(x,z)+d(y,w)$

وعليه $|d(x,y)-d(z,w)|\leq d(x,z)+d(y,w)$

مبرهنة (8.6.1)

لتكن X مجموعة غير خالية فان الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ تكون دالة مترية إذا وفقط إذا تحقق الشرطين الآتيين :-

1. $d(x,y)=0$ إذا وفقط إذا كان $x=y$
2. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)$ لكل $x,y,z\in \mathrm{X}$

البرهان:

نفرض d دالة مترية

الشرط(1) متحقق لأنه بديهية (2) من بديهيات الدالة المترية وكذلك الشرط (2) يتحقق من البديهيات (4) , (2) من بديهيات الدالة المترية

الاتجاه المعاكس ، نفرض الشرطين (1) , (2) متحققين.

(1) ليكن $x,y\in \mathrm{X}$. باستخدام الشرط (2) نحصل على $d(x,x)\leq d(x,y)+d(x,y)=2d(x,y)$

ولكن $d(x,x)=0$ حسب الشرط (1) $\Leftarrow$ $d(x,y)\geq 0$

(2) نفس الشرط (1)

(3) ليكن $x,y\in \mathrm{X}$. باستخدام الشرط (2)

$$d(y,x)\leq d(y,y)+d(x,y)=0+d(x,y)=d(x,y)$$
$$d(x,y)\leq d(x,x)+d(y,x)=0+d(y,x)=d(y,x)$$

$\Leftarrow d(y,x)\leq d(x,y), d(x,y)\leq d(y,x) \Leftarrow d(x,y)=d(y,x)$

(4) ليكن $x,y,z\in \mathrm{X}$ $\Leftarrow$ $d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)=d(x,z)+d(z,y)$

$\Leftarrow d$ دالة مترية على X.

تعريف (9.6.1)

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $A,B\subseteq X$ ، $p\in X$.

1. قطر المجموعة A يرمز له بالرمز $\delta(A)$ ويعرف بالصيغة $\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$

من الواضح ان $\delta(A)\geq 0$ لكل $A\subseteq X$. وإذا كانت $\mathrm{A}=\phi$ أو A تحتوي على عنصر واحد فقط فان $\delta(A)=0$.

2. بعد (المسافة) النقطة p عن المجموعة A يرمز له بالرمز $d(p,A)$ ويعرف بالصيغة

$$d(p,A)=\inf\{d(p,x):x\in A\}$$

ومن الواضح ان $d(p,\mathrm{A})\geq 0$ لكل $A\subseteq X$ ولكل $p\in \mathrm{X}$. وإذا كانت $p\in A$ فان $d(p,A)=0$

أو إذا كانت $\mathrm{A}=\phi$ فان $d(p,\phi)=\infty$.

3. البعد (المسافة) بين A,B يرمز له بالرمز $d(A,B)$ ويعرف بالصيغة

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B})=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}$$

ومن الواضح ان $d(A,B)\geq 0$ لكل $A,B\subseteq X$. وإذا كانت $A=\phi$ فان $d(\phi,B)=\infty$

مثال(10.6.1)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$

1. إذا كانت $A=[3,7]$ فان لكل $x,y\in A$ يكون $0\le d(x,y)\le d(3,7)=|7-3|=4$
$\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}=\sup\{t:t\in[0,4]\}=4$
2. إذا كانت $A=[1,2)$ فان لكل $x,y\in A$ يكون $0\le d(x,y)\le d(1,2)=|2-1|=1$
$\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}=\sup\{t:t\in[0,1]\}=1$
3. إذا كانت $A=(2,4]$ فان لكل $x,y\in A$ يكون $0\le d(x,y)\le d(2,4)=|4-2|=2$
$\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}=\sup\{t:t\in[0,2]\}=2$
4. إذا كانت $p=-2,\quad A=[1,2]$ فان $d(-2,1)=|-2-1|=3,\quad d(-2,2)=|-2-2|=4$
وعليه لكل $x\in A$ فان $3\le d(-2,x)\le 4$
$d(-2,A)=\inf\{d(-2,x):x\in A\}=\inf\{t:t\in[3,4]\}=3$
5. إذا كانت $p=2,\quad A=[1,2]$ فان $d(2,1)=|2-1|=1,\quad d(2,2)=|2-2|=0$
وعليه لكل $x\in A$ فان $0\le d(2,x)\le 1$
$d(2,A)=\inf\{d(2,x):x\in A\}=\inf\{t:t\in[0,1]\}=0$
6. إذا كانت $p=3,\quad A=[1,2]$ فان $d(3,1)=|3-1|=2,\quad d(3,2)=|3-2|=1$
وعليه لكل $x\in A$ فان $1\le d(3,x)\le 2$
$d(3,A)=\inf\{d(3,x):x\in A\}=\inf\{t:t\in[1,2]\}=1$
7. إذا كانت $A=[1,2)$ فان $d(\frac{5}{4},A)=0$
8. إذا كانت $A=(2,4]$ فان $d(5,B)=1,\quad d(\frac{9}{4},B)=0,\quad d(\frac{3}{2},B)=\frac{1}{2}$
9. إذا كانت $B=[3,4],\quad A=[-1,2]$ فان $A\cap B=\phi$ وعليه لكل $x\in A,y\in B$ فان
$1<d(x,y)\le d(4,-1)=|4-(-1)|=|4+1|=5$
$d(\mathrm{A,B})=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}=\inf\{t:t\in[1,5]\}=1$
10. إذا كانت $B=[1,3],\quad A=[-1,2]$ فان $A\cap B=[1,2]$ وعليه لكل $x\in A,y\in B$ فان
$0\le d(x,y)\le d(3,-1)=|3-(-1)|=|3+1|=4$
$d(\mathrm{A,B})=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}=\inf\{t:t\in[0,4]\}=0$
11. إذا كانت $B=(2,4],\quad A=[1,2)$ فان $A\cap B=\phi$ وان
$d(\mathrm{A,B})=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}=\inf\{t:t\in[0,2]\}=0$

مبرهنة(11.6.1)

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن كل من A,B مجموعة جزئية غير خالية في X

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

1. إذا كانت A منتهية فان $\delta(A)<\infty$
2. إذا كانت $A\cap B\neq\phi$ فان $d(A,B)=0$
3. $|d(p,A)-d(q,A)|\le d(p,q)$ لكل $p,q\in X$
4. إذا كانت $A\subseteq B$ فان $d(p,A)\ge d(p,B)$ لكل $p\in X$

البرهان :

1. نحصل عليها من التعريف مباشرة
2. بما أن $A\cap B\neq\phi$ $\Leftarrow$ يوجد على الأقل عنصر ينتمي إلى التقاطع وليكن x_0 مثلا،

أي أن $x_0\in A\cap B$ $\Leftarrow$ $x_0\in A$ و $x_0\in B$

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,y\in B\}\le d(x,y)\ \forall x\in A,\forall y\in B$$

$\Leftarrow$ $d(A,B)\le d(x_0,x_0)=0$ ولكن $d(A,B)\ge 0$ $\Leftarrow$ $d(A,B)=0$

4. بما أن $d(p,q)=d(q,p)$ $\Leftarrow$ $d(p,A)\ge d(q,A)$

$$d(p,A)-d(q,A)\ge 0$$

$$|d(p,A)-d(q,A)|=d(p,A)-d(q,A) \qquad \cdots(1)$$

$$d(p,A)=\inf\{d(p,x):x\in A\}\le d(p,x)\ \forall x\in A$$

بما أن $d(p,A)=\inf\{d(p,x):x\in A\}\le d(p,x)$

لكل $x\in A$ $\Leftarrow$ $d(p,A)-d(q,A)\le d(p,x)-d(q,A)$ لكل $x\in A$

$$|d(p,A)-d(q,A)|\le d(p,x)-d(q,A) \quad \cdots(2)$$

بما أن $d(q,A)=\inf\{d(q,y):y\in A\}$

$\Leftarrow$ لكل $\varepsilon>0$ يوجد $y\in A$ بحيث ان $d(q,A)\ge d(q,y)-\varepsilon$

$\Leftarrow$ $-d(q,A)\le -d(q,y)+\varepsilon$

$$d(p,y)-d(q,A)\le d(p,y)-d(q,y)+\varepsilon$$

$$|d(p,A)-d(q,A)|\le d(p,y)-d(q,y)+\varepsilon \quad \cdots(3)$$

بما أن $d(p,y)\le d(p,q)+d(y,q)$ $\Leftarrow$ $d(p,y)-d(q,y)\le d(p,q)$ $\Leftarrow$ $|d(p,A)-d(q,A)|\le d(p,q)+\varepsilon$

لكل $\varepsilon>0$ $\Leftarrow$ $|d(p,A)-d(q,A)|\le d(p,q)$

(4) لتكن $p\in X$

بما أن $A\subseteq B$ $\Leftarrow$ $\{d(p,x):x\in A\}\le\{d(p,x):x\in B\}$

$$\inf\{d(p,x):x\in A\}\ge\inf\{d(p,x):x\in B\}$$

$\Leftarrow$ $d(p,A)\ge d(p,B)$

ملاحظة

1. إذا كان $d(p,A)=0$ فليس من الضروري أن يكون $p\in A$
2. إذا كان $d(A,B)=0$ فليس من الضروري أن يكون $A\cap B\neq\phi$ والمثال الأتي يوضح ذلك

مثال (12.6.1)
ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متريا اعتياديا

1. إذا كانت $A=(a,b)$ فان $d(b,A)=0$ وان $b\notin A$
2. إذا كانت $A=[0,1),\quad B=(1,2]$ فان $d(A,B)=0$ وان $A\cap B=\phi$

الحل:

1. نفرض $d(b,A)\neq 0$

بما أن $d(b,A)\geq 0 \;\Leftarrow\; d(p,A)>0$

حسب خاصية أرخميدس , يوجد عدد صحيح موجب n بحيث $\frac{1}{n}<d(p,A)$

بما أن $d(p,A)=\inf\{d(p,x):x\in A\} \;\Leftarrow\; d(p,A)\leq d(b,x)$ لكل $x\in A$

$\Leftarrow\; \frac{1}{n}\leq d(b,x)$ لكل $x\in A$

ولكن $d(b,x)=|b-x|$ لان $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي

$\Leftarrow\; \frac{1}{n}\leq |b-x|$ لكل $x\in A \;\Leftarrow\; x<b-\frac{1}{n}$ لكل $x\in A$

$\Leftarrow\; b-\frac{1}{n}\in A$ لان $x<b-\frac{1}{n}<b \;\Leftarrow\; \frac{1}{n}<\left|b-(b-\frac{1}{n})\right|<\frac{1}{n}$ و هذا تناقض.

وبالمثل نبرهن (2).

القيدية Boundednes

ليكن (X,d) فضاء متريا . ولتكن $A\subseteq X$.قطر المجموعة A (كما في التعريف9.6.2) يعرف بالصيغة $\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$. نلاحظ أن المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة من الأسفل لان $d(x,y)\geq 0$ لكل $x,y\in X$. لكي تكون المجموعة B مقيدة يجب أن تكون مقيدة من الأعلى.

تعريف(13.6.1)
ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$ يقال عن المجموعة A بأنها مقيدة (Bounded) في X إذا كانت $\delta(A)<\infty$.
بعبارة أخرى إذا كانت المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة في $\mathbb{R}$. وبصورة خاصة يقال عن X بأنه فضاء مقيد (Bounded Space) إذا كانت $\delta(X)<\infty$.

مبرهنة(14.6.1)
ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$.فان المجموعة A تكون مقيدة في X إذا وفقط إذا كان لكل $x_0\in A$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ (لا يعتمد على x_0) بحيث أن $d(x,x_0)<k$ لكل $x\in A$.

البرهان :
نفرض أن المجموعة A مقيدة $\Leftarrow\; \delta(A)<\infty \;\Leftarrow$ المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $|\lambda|<k$ لكل $\lambda\in B \;\Leftarrow\; |d(x,y)|<k$ لكل $x,y\in A$

بما أن $d(x,y)\ge 0$ لكل $x,y\in X$ $\Leftarrow$ $d(x,y)<k$ لكل $x,y\in A$ وبصورة خاصة لكل $d(x,x_0)<k$ لكل $x_0\in A$

الاتجاه الأخر: نفرض أن لكل $x_0\in A$ يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $d(x,x_0)<k$ لكل $x\in A$.

ليكن $x,y\in A$ $\Leftarrow$ $d(x,x_0)<k,\ \ d(y,x_0)<k$

$$d(x,y)\le d(x,x_0)+d(y,x_0)<k+k=2k$$

$\Leftarrow$ المجموعة $B=\{d(x,y):x,y\in A\}$ مقيدة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ المجموعة A مقيدة

نتيجة(15.6.1)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$ فان A تكون مقيدة في X إذا وفقط إذا يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $d(x,y)<k$ لكل $x,y\in A$.

مثال(16.6.1)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d)$.

1. كل من الفترات $A_1=(a,b),\ A_2=(a,b],\ A_3=[a,b),\ A_4=[a,b]$ تكون مقيدة لان $\delta(A_i)=b-a$ لكل $i=1,2,3,4$
2. الفضاء $\mathbb{R}$ غير مقيد لان $\delta(\mathbb{R})=\infty$.

مثال(17.6.1)

في الفضاء المتري المبعثر (X,d)

1. X مجموعة مقيدة لان $\delta(X)=1$
2. إذا كانت $x_0\in X$ وكانت $A=\{x\in X:d(x,x_0)<\frac{1}{2}\}$ فان $\delta(A)=0$

$\Leftarrow$ قطر المجموعة A يساوي صفر

نلاحظ أن المجموعة A عبارة عن كرة مركزها x_0 ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ وهذا يعني أن قطر الكرة لا يساوي ضعف نصف قطرها.

تعريف (18.6.1)

ليكن (X,d) فضاء متريا وليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاءَ متريا اعتياديا. يقال عن الدالة $f:X\to\mathbb{R}$ بأنها مقيدة (Bounded) إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $|f(x)|\le M$ لكل $x\in X$. بعبارة أخرى إذا كان مستقر الدالة f مجموعه مقيدة في $\mathbb{R}$، أي أن المجموعة $f(X)=\{f(x):x\in X\}$ مجموعه مقيدة في $\mathbb{R}$.

أ.د. نوري فرحان المياحي
كلية العلوم / جامعة القادسية

تبولوجيا مترية Metric Topology

في هذا البند سوف نبين أن كل فضاء متري يكون فضاء تبولوجيا ولكن العكس غير صحيح دائما.

تعريف (19.6.1)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً، $x_0 \in X$ وليكن r عددا حقيقيا موجبا. الكرة المفتوحة (Open Ball) في X التي مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها r، يرمز لها بالرمز $\beta_r(x_0)$، وتعرف بالصيغة

$$\beta_r(x_0)=\{x\in \mathrm{X}: d(x,x_0)<r\}$$

والكرة المغلقة (Closed Ball) في X التي مركزها النقطة x_0 ونصف قطرها r يرمز لها بالرمز $\overline{\beta_r}(x_0)$ وتعرف بالصيغة

$$\overline{\beta}_r(x_0)=\{x\in \mathrm{X}: d(x,x_0)\le r\}$$

ملاحظة

كل من $\beta_r(x_0)$ ، $\overline{\beta_r}(x_0)$ مجموعة غير خالية لان كلا منها تحتوي على المركز x_0، أي أن $x_0\in\beta_r(x_0)$ وكذلك $x_0\in\overline{\beta_r}(x_0)$.

مثال(20.6.1)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$

1. كل كرة مفتوحة فيه تكون فترة مفتوحة وبالعكس
2. كل كرة مغلقة فيه تكون فترة مغلقة وبالعكس

الحل:

بما ان $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متري اعتيادي $\Leftarrow$ $d(x,y)=|x-y|$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$

1. لتكن $x_0\in\mathbb{R}$ و $r>0$

$$\beta_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}: d(x,x_0)<r\}=\{x\in\mathbb{R}: |x-x_0|<r\}=\{x\in\mathbb{R}: -r<x-x_0<r\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}: x_0-r<x<x_0+r\}=(x_0-r,x_0+r)$$

الآن نأخذ العكس. لتكن A فترة مفتوحة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $A=(a,b)$.

نضع $x_0=\dfrac{a+b}{2}$, $r=\dfrac{b-a}{2}$ $\Leftarrow$ $r>0$

$$x_0+r=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=b,\quad x_0-r=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a \Leftarrow \mathrm{A}=(a,b)=(x_0-r,x_0+r)=\beta_r(x_0)$$

وبالمثل نبرهن (2)

مثال(21.6.1)

ليكن $X=[0,1]$ ولتكن الدالة $d: X\times X\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $d(x,y)=|x-y|$ لكل $x,y\in \mathrm{X}$. ناقش $\beta_1(\frac{1}{2})$ ، $\beta_{\frac{1}{4}}(0)$

$$\beta_1(\tfrac{1}{2})=\{x\in X: d(x,\tfrac{1}{2})<1\}=\{x\in X:|x-\tfrac{1}{2}|<1\}=\{x\in X:-\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{3}{2}\}=\{x\in X:0\le x\le 1\}=X$$

$$\beta_{\frac{1}{4}}(0)=\{x\in X: d(x,0)<\tfrac{1}{4}\}=\{x\in X:|x-0|<\tfrac{1}{4}\}=\{x\in X:-\tfrac{1}{4}<x<\tfrac{1}{4}\}=[0,\tfrac{1}{4})$$

مثال(22.6.1)

ناقش الكرات المفتوحة التي مركزها النقطة $(0,0)$ ونصف قطرها 1 لكل من الدوال المترية التالية والمعرفة على $\mathbb{R}^2$

1. $d_1(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$.
2. $d_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$.
3. $d_3(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$ لكل $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$.

الحل: $r=1,\quad x_0=(0,0)$

1. $\beta_r(x_0)=\{x\in X: d(x,x_0)<r\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2<1\}$
2. $\beta_r(x_0)=\{x\in X: d(x,x_0)<r\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: |x_1|+|x_2|<1\}$
3. $\beta_r(x_0)=\{x\in X: d(x,x_0)<r\}=\{(x,x_2)\in\mathbb{R}^2: \max\{|x_1|,|x_2|\}<1\}$

وهذه المنطقة تكون محدودة بالمستقيمات $x_1=1$ ، $x_1=-1$ ، $x_2=1$ ، $x_2=-1$

مثال(23.6.1)

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر وليكن $x_0\in X$ وان r عدد حقيقي موجب

1. إذا كان $r>1$ فان $\beta_r(x_0)=X$
2. إذا كان $r\le 1$ فان $\beta_r(x_0)=\{x_0\}$

الحل:

1. ليكن $x\in X$، بما أن $d(x,x_0)=\begin{cases}0, & x=x_0\\ 1, & x\neq x_0\end{cases}$ $\Leftarrow$ $d(x,x_0)<r$
$\Leftarrow x\in\beta_r(x_0)\Leftarrow X\subseteq\beta_r(x_0)$ ولكن $\beta_r(x_0)\subseteq X \Leftarrow \beta_r(x_0)=X$.

(ب) ليكن $x\in X$ بحيث $x\neq x_0 \Leftarrow d(x,x_0)=1 \Leftarrow d(x,x_0)\ge r \Leftarrow x\notin\beta_r(x_0)$ لكل $x\neq x_0$
بما أن $x_0\in\beta_r(x_0)$ (لأنها مركز الكرة) $\Leftarrow \beta_r(x_0)=\{x_0\}$.

تعريف (24.6.1)

ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن A بأنها مجموعة مفتوحة (Open Set) في X إذا كان لكل $x\in A$ يوجد $r>0$ بحيث أن $\beta_r(x)\subseteq A$. بعبارة أخرى المجموعة A تكون مفتوحة إذا كان لكل $x\in A$ يوجد $r>0$ يحقق الشرط الآتي : أذا كان $y\in X$ وكان $d(x,y)<r$ فان $y\in A$. ويقال عن A بأنها مجموعة مغلقة (Closed Set) في X إذا كانت A^c مجموعة مفتوحة في X.

بسهولة إثبات

1. $\text{int}(A)=\{x\in A:\exists r>0,\quad \beta_r(x)\subseteq A\}$
2. $A'=\{x\in X:\ \forall r>0,\exists y\in A \ni d(x,y)<r\}$
3. $A'=\{x\in X:\ \forall r>0,\exists y\in A \ni y\neq x,\ d(x,y)<r\}$
4. $\partial(A)=\{x\in X:\forall r>0,\exists y\in A,z\in A^c \ni d(x,y)<r,d(x,z)<r\}$
5. $e(A)=\{x\in X:G\cap A=\phi$ بحيث أن x تحتوي على G توجد مجموعة مفتوحة $\}$

مبرهنة (25.6.1)

في أي فضاء متري

1. كل كرة مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة.
2. كل كرة مغلقة تكون مجموعة مغلقة.

البرهان

ليكن (X,d) فضاء متري وليكن $x_0\in X$ ، $r>0$

1. يجب أن نبرهن $\beta_r(x_0)$ مجموعة مفتوحة

لتكن $x\in\beta_r(x_0)\Leftarrow d(x,x_0)<r \Leftarrow r-d(x,x_0)>0$

نضع $r_1=r-d(x,x_0) \Leftarrow r_1>0$. يجب أن نبرهن $\beta_{r_1}(x)\subseteq\beta_r(x_0)$

ليكن $y\in\beta_{r_1}(x) \Leftarrow d(y,x)<r_1 \Leftarrow d(y,x)<r-d(x,x_0) \Leftarrow d(y,x)+d(x,x_0)<r$

بما أن $d(y,x_0)\le d(y,x)+d(x,x_0) \Leftarrow d(y,x_0)<r \Leftarrow y\in\beta_r(x_0)$

وعليه $\beta_r(x_0)$ مجموعة مفتوحة

2. يجب أن نبرهن $\overline{\beta}_r(x_0)$ مجموعة مغلقة. لتكن $A=(\overline{\beta}_r(x_0))^c$

بما أن $\overline{\beta}_r(x_0)=\{x\in X:d(x,x_0)\le r\} \Leftarrow A=\{x\in X:d(x,x_0)>r\}$

ليكن $x\in A \Leftarrow d(x,x_0)>r$. نضع $r_2=d(x,x_0)-r \Leftarrow r_2>0$

يجب أن نبرهن $\beta_{r_2}(x)\subseteq A$.

ليكن $y\in\beta_{r_2}(x) \Leftarrow d(y,x)<r_2 \Leftarrow d(y,x)<d(x,x_0)-r \Leftarrow d(x,x_0)-d(y,x)>r$

بما أن $d(x,x_0)\le d(x,y)+d(y,x_0) \Leftarrow d(x,x_0)-d(y,x)\le d(y,x_0)$

$\Leftarrow d(y,x_0)>r \Leftarrow y\in A \Leftarrow \beta_{r_2}(x)\subseteq A \Leftarrow A$ مجموعة مفتوحة

وعليه $A^c=\overline{\beta}_r(x_0)$ مجموعة مغلقة .

نتيجة (26.6.1)

في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d_u)$

1. كل فترة مفتوحة تكون مجموعة .
2. كل فترة مغلقة تكون مجموعة مغلقة .

مبرهنة(27.6.1)
ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A \subseteq X$ فان المجموعة A تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت A تساوي اتحاد كرات مفتوحة .

البرهان :

إذا كانت $A=\phi$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $A \neq \phi$

نفرض A مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ لكل $x \in A$ يوجد $r_x > 0$ بحيث أن $B_{r_x}(x) \subseteq A$

$\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{x\in A} B_{r_x}(x) \subset A$ $\Leftarrow$ $A = \bigcup_{x\in A} B_{r_x}(x)$ $\Leftarrow$ A تساوي اتحاد كرات مفتوحة

الاتجاه المعاكس: نفرض أن A تساوي اتحاد كرات مفتوحة

بما أن كل كرة مفتوحة تكون مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ A تساوي اتحاد مجموعات مفتوحة وعليه A مجموعة مفتوحة .

مثال(28.6.1)
برهن على أن كل مجموعة جزئية في فضاء متري مبعثر تكون مفتوحة ومغلقة .

الحل :

ليكن (X,d) فضاء متريا مبعثرا ولتكن $A \subseteq X$

إذا كانت $A=\phi$ ينتهي البرهان . أما إذا كانت $A \neq \phi$. نفرض $x \in A$. نأخذ $r=\frac{1}{2}$

$$B_r(x)=\{y\in X : d(y,x)<\frac{1}{2}\}=\{y\in X : d(y,x)=0\}=\{y\in X : y=x\}=\{x\}\subset A$$

$\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة وعليه كل مجموعة جزئية من X تكون مجموعة مفتوحة.

بما أن $A \subseteq X$ $\Leftarrow$ $A^c \subseteq X$ $\Leftarrow$ A^c مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة في X.

ملاحظة
بعد أن قدمنا مفهوم المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري ، سوف نركز الاهتمام على دراسة خواص تلك المجموعات . فإذا فرضنا المتري (X,d) وكانت τ هي عائلة كل المجموعات المفتوحة الناتجة عن دالة المسافة d فإننا نحصل على المبرهنة التالية .

مبرهنة (29.6.1)
ليكن (X,d) فضاء مترياً

1. كل من ϕ, X مجموعة مفتوحة في X
2. إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعات مفتوحة في X فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مفتوحة X.
3. إذا كانت A_λ ،لكل $\lambda \in \Lambda$ مجموعة مفتوحة في X فان $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ تكون مجموعة مفتوحة في X.

البرهان:

1. نفرض أن ϕ مجموعة غير مفتوحة $\Leftarrow$ يوجد $x \in \phi$ بحيث $\beta_r(x) \subseteq \phi$ لكل $r>0$.

وهذا غير ممكن لان ϕ لا تحتوي على عناصر $\Leftarrow$ ϕ مجموعة مفتوحة.

بما أن $\beta_r(x) \subseteq X$ لكل $x \in X$, $r>0$ $\Leftarrow$ X مجموعة مفتوحة.

2. لتكن كل من $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعة مفتوحة في X .

وليكن $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftarrow x \in A_i$ لكل $i = 1, 2, \cdots, n$

بما أن A_i مجموعة مفتوحة في X لكل $i = 1, 2, \cdots, n$

$\Leftarrow$ يوجد $r_i > 0$ لكل $i = 1, 2, \cdots, n$ بحيث أن $\beta_{r_i}(x) \subseteq A_i$ لكل $i = 1, 2, \cdots, n$.

نضع $r = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\} \Leftarrow \beta_r(x) \subseteq \beta_{r_i}(x)$ لكل $i = 1, 2, \cdots, n$.

$\beta_r(x) \subseteq A_i \Leftarrow \beta_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ مجموعة مفتوحة في X

3. لتكن A_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda \in \wedge$ وليكن $x \in \bigcup_{\lambda \in \wedge} A_\lambda$

$\Leftarrow x \in A_\lambda$ لبعض قيم $\lambda \in \wedge$.

بما أن A_λ مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow$ يوجد $r > 0$ بحيث أن $\beta_r(x) \subseteq A_\lambda$

$\Leftarrow \beta_r(x) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \wedge} A_\lambda \Leftarrow \bigcup_{\lambda \in \wedge} A_\lambda$ مجموعة مفتوحة في X.

ملاحظة

في أي فضاء متري ليس من الضروري أن يكون تقاطع أي عدد غير منتهي من المجموعات المفتوحة مجموعة مفتوحة. والمثال الأتي يوضح ذلك.

مثال(30.6.1)

ليكن $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاء متري اعتيادي ولتكن $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ نلاحظ أن A_n مجموعة مفتوحة لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ وان $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ مجموعة غير مفتوحة.

مبرهنة (31.6.1)

ليكن (X, d) فضاء متريا

1. كل من ϕ, X مجموعة مغلقة في X

2. إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعات مغلقة في X فإن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ تكون مجموعة مغلقة X.

3. إذا كانت A_λ لكل $\lambda \in \Lambda$ مجموعة مغلقة في X فان $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ تكون مجموعة مغلقة في X.

البرهان :

1. بما أن $\phi^c = X$ ، وان X مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow \phi^c$ مجموعة مفتوحة في X

ϕ مجموعة مغلقة في X

بما أن $X^c = \phi$ ، وان ϕ مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow X^c$ مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow X$ مجموعة مغلقة في X

2. لتكن كل من $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ A_i^c مجموعة مفتوحة في X لكل $i = 1, 2, \cdots, n$

$\Leftarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$ مجموعة مغلقة في X

3. لتكن A_λ مجموعة مغلقة في X لكل $\lambda \in \wedge$

$\Leftarrow$ A_λ^c مجموعة مفتوحة في X لكل قيم $\lambda \in \wedge$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c)^c = \bigcap_{\lambda \in} A_\lambda$ مجموعة مغلقة في X.

ملاحظة

في أي فضاء متري ليس ضروريا أن يكون اتحاد أي عدد غير منته من المجموعات المغلقة مجموعة مغلقة. والمثال الأتي يوضح ذلك.

مثال(32.6.1)

ليكن $(\mathbb{R}, d_u)$ فضاء متريا اعتياديا ولتكن $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ نلاحظ أن A_n مجموعة مغلقة لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ وان

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1]$ مجموعة غير مغلقة.

مبرهنة (33.6.1)

في أي فضاء متري (X, d) تكون كل مجموعة أحادية مغلقة وعليه كل مجموعة منتهية تكون مغلقة .

البرهان :

لتكن A مجموعة أحادية . نفرض $A = \{a\}$. يجب أن نبرهن A مغلقة .

ليكن $x \in A^c \Leftarrow$ $x \neq a$ $\Leftarrow$ $d(a,x) > 0$. نضع $r = d(a,x)$ $\Leftarrow$ $r > 0$

بما أن $d(a,x) \geq r$ $\Leftarrow$ $a \notin \beta_r(x)$ $\Leftarrow$ $\beta_r(x) \cap A = \phi$ $\Leftarrow$ $\beta_r(x) \subset A^c$ $\Leftarrow$ A^c مجموعة مفتوحة $\Leftarrow A$ مجموعة مغلقة .

الآن نبرهن كل مجموعة منتهية تكون مغلقة . لتكن B مجموعة جزئية منتهية من X إذا كانت $B = \phi$ ينتهي البرهان ، أما إذا كانت $B \neq \phi$، نفرض $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ بما أن $\{b_i\}$ مغلقة لكل $i = 1, 2, \cdots, n$ $\Leftarrow$ $B = \bigcup_{i=1}^{n} \{b_i\}$ مجموعة مغلقة في X.

مبرهنة (34.4.1)

ليكن (X, d) فضاء متريا ، $x_0 \in X$ ولتكن $A \subseteq X$

1. $x_0 \in A'$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الأتي :-

كل كرة مفتوحة مركزها x_0 تحتوي على عدد غير منته من نقاط A

2. $d(x_0, A) = 0$ إذا وفقط إذا كانت $x_0 \in A$ أو $x_0 \in A'$.

3. $\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

البرهان :

1. نفرض أن الشرط متحقق $\Leftarrow$ لكل $r>0$ فان $B_r(x)$ تحتوي على عدد غير منتهي من نقاط A
$\Leftarrow$ $x \in A'$ (حسب التعريف)

الاتجاه الأخر : سنبرهن بطريقة التناقض . نفرض يوجد $r>0$ بحيث أن $B_r(x)$ تحتوي على عدد منتهي من نقاط A والتي تختلف عن x ولتكن هذه النقاط هي $x_1,\ldots,x_n$ أي أن

$$A \cap B_r(x) = \{x_1,\ldots,x_n\}$$

نضع $r_1 = \min\{d(x,x_i) : i=1,2,\cdots,n\}$ $\Leftarrow$ $r_1>0$ لأنه العنصر الأصغر لمجموعة منتهية من الأعداد الموجبة
$\Leftarrow$ $B_{r_1}(x)$ لا تحتوي أي نقطة من نقاط A تختلف عن x
$\Leftarrow$ $x \notin A'$ وهذا تناقض

2. نفرض أن $d(x_0,A)=0$ ولتكن $x_0 \notin A$. يجب أن نبرهن على ان $x_0 \in A'$: ليكن $r>0$
بما أن $d(x_0,A)=\inf\{d(x_0,x) : x\in A\}=0$ $\Leftarrow$ حسب تعريف (inf) يوجد $y\in A$ ، بحيث أن

$$d(x_0,y)<0+r=r$$

بما أن $x_0\notin A$ $\Leftarrow$ $y\neq x_0$ و عليه $x_0\in A'$

الاتجاه المعاكس : نفرض إن $x_0\in A$ أو $x_0\in A'$ إذا كانت $x_0\in A$ $\Leftarrow$ $d(x_0,A)=0$
أما إذا كانت $x_0\notin A$ و$x_0\in A'$ $\Leftarrow$ لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $y\neq x$ و $d(x_0,y)<r$
وعليه لكل $r>0$ يوجد $y\in A$ بحيث أن $0\le d(x_0,y)<r$
$\Leftarrow$ $\inf\{d(x_0,x) : x\in A\}=0$ $\Leftarrow$ $d(x_0,A)=0$

3. بما أن $\bar{A}=A\cup A'$ $\Leftarrow$ $x\in\bar{A}$ إذا وفقط إذا كان $d(x,A)=0$
$\Leftarrow$ $\bar{A}=\{x\in X : d(x,A)=0\}$

تعريف(35.6.1)

يقال للفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه قابل للتمتير (Metrizable) إذا وجدت دالة مترية d على X بحيث أن $\tau(d)=\tau$.
وهذا يعني τ مولدا بواسطة الدالة المترية d على X.

مثال(36.6.1)

1. كل فضاء تبولوجي مبعثر (X,τ_D) يكون قابل للتمتير لان الدالة المترية $d : \mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$ لكل $x,y\in X$.تولد التبولوجي المبعثر τ_D على X .

2. الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ يكون قابل للتمتير لان الدالة المترية $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(x,y)=|x-y|$ لكل $x,y\in X$.تولد التبولوجي الاعتيادي τ_u على $\mathbb{R}$.

تمارين(6.1)

1. ليكن (X,d) فضاء مترياً . برهن على ان الدالة $d^*:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d^*(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ لكل $x,y\in X$ تكون دالة مترية وان (X,d^*) فضاء متريا مقيدا

2. ليكن (X,d) فضاء مترياً . برهن على ان الدالة $d^*:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d^*(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$ لكل $x,y\in X$ تكون دالة مترية على X.

3. ليكن (X,d) فضاء مترياً. هل ان الدالة $d^*:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d^*(x,y)=2d(x,y)$ لكل $x,y\in X$ تكون دالة مترية وان (X,d^*) فضاء متريا .

4. برهن على ان الدالة $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d^*(x,y)=\min\{2,|x-y|\}$ لكل $x,y\in\mathbb{R}$ تكون دالة مترية على $\mathbb{R}$.

5. ليكن (X,d) فضاء مترياً. هل ان الدالة $D:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$D(A,B)=\inf\{d(x,y):x\in A,x\in B\}$$

لكل $A,B\in\mathcal{F}$ حيث $\mathcal{F}$ تمثل عائلة جميع المجموعات الجزئية من X . تمثل دالة مترية على $\mathcal{F}$.

6. ليكن X تمثل مجموعة كل الدوال الحقيقية المستمرة على الفترة المغلقة $[0,1]$. هل ان الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|:x\in[0,1]\}$ لكل $f,g\in X$ تكون دالة مترية على X ؟ ولماذا .

7. ليكن (X_i,d_i) فضاء مترياً لكل $i=1,2,\cdots,n$. برهن على ان فان $(\prod_{i=1}^{n}X_i,d)$ يكون فضاء مترياً حيث

$$d((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))=\max\{d_i(x_i,y_i):i=1,2,\cdots,n\}$$ لكل

$(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\prod_{i=1}^{n}X_i$.

8. ليكن (X_i,d_i) فضاء مترياً لكل $i=1,2,\cdots,n$. برهن على ان $(\prod_{i=1}^{n}X_i,d)$ يكون فضاء مترياً حيث $d((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))=\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i,y_i)$ لكل $(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\prod_{i=1}^{n}X_i$.

9. لتكن X تمثل مجموعة كل المتتابعات الحقيقية الموجبة $\{x_n\}$. برهن على ان الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x_n-y_n|}{2^n(1+|x_n-y_n|)}$ لكل $\{x_n\},\{y_n\}\in X$ تكون دالة مترية.

10. لتكن X تمثل مجموعة كل المتتابعات الحقيقة المقيدة $\{x_n\}$. برهن على ان الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(\{x_n\},\{y_n\})=\sup\{|x_n-y_n|:n\in\mathbb{N}\}$ لكل $\{x_n\},\{y_n\}\in X$ تكون دالة مترية.

11. لتكن X تمثل مجموعة كل المتتابعات الحقيقة المتقاربة $\{x_n\}$. برهن على ان الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(\{x_n\},\{y_n\})=\sup\{|x_n-y_n|:n\in\mathbb{N}\}$ لكل $\{x_n\},\{y_n\}\in X$ تكون دالة مترية.

أ.د. نوري فرحان المياحي
كلية العلوم / جامعة القادسية

12. لتكن X تمثل مجموعة كل المتتابعات الحقيقة $\{x_n\}$ بحيث ان $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$ ، $1\le p<\infty$. برهن على أن الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(\{x_n\},\{y_n\})=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ لكل $\{x_n\},\{y_n\}\in X$ تكون دالة مترية.
13. لتكن X تمثل مجموعة كل المتتابعات الحقيقة $\{x_n\}$ بحيث ان $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty$ ، $0<p<1$. برهن على ان الدالة $d:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $d(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p$ لكل $\{x_n\},\{y_n\}\in X$ تكون دالة مترية.
14. ليكن (X,d) فضاء متريا ولتكن $A,B\subseteq X$. برهن على ان
ا. إذا كانت $A\subseteq B$ فان $\delta(A)\le\delta(B)$
ب. $\delta(A\cup B)\le\delta(A)+\delta(B)+d(A,B)$
ج. إذا كانت $A\cap B\ne\phi$ فان $\delta(A\cup B)\le\delta(A)+\delta(B)$
15. لتكن A مجموعة غير قابلة للعد في $\mathbb{R}$. برهن على ان A' تحتوي على الأقل عنصر واحد
16. برهن على ان كل مجموعة معزولة في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d)$ تكون قابلة للعد.
17. لتكن A مجموعة غير خالية في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d)$ بحيث ان $A'=A$.
برهن على أن A مجموعة غير قابلة للعد.
18. برهن على مجموعة الأعداد النسبية في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d)$ مجموعة واهنة.
19. برهن على أن المجموعة المغلقة A في الفضاء المتري (X,d) تكون متناثرة إذا وفقط إذا كانت A^c مجموعة كثيفة في X.

2. الاستمرارية Continuity

الاستمرارية تلعب دورا مهما في معظم فروع الرياضيات ومنها التحليل الرياضي والتبولوجيا . أن مفهوم الاستمرارية في الفضاءات الاقليدية يعتمد على مفهوم الدوال المترية . في هذا الفصل سنحاول إعطاء التعريف الأساسي لمفهوم الدالة المستمرة من فضاء تبولوجي إلى فضاء تبولوجي أخر مع دراسة المفاهيم الأخرى المرتبطة بالاستمرارية .

1.2 الاستمرارية في الفضاءات التبولوجية Continuity in Topological Spaces

في هذا البند سنحاول إعطاء التعريف الأساسي لمفهوم الدالة المستمرة من فضاء تبولوجي إلى فضاء تبولوجي أخر مع دراسة المفاهيم الأخرى المرتبطة بالاستمرارية .

تعريف (1.1.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءلتبولوجيا. يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها مستمرة (Continuous) عند النقطة $x_0\in X$ إذا كان لكل جوار U إلى النقطة $f(x_0)$ في Y يوجد جوار V إلى النقطة x_0 في x بحيث أن $f(V)\subseteq U$. يقال عن الدالة f بأنها مستمرة على المجموعة $A\subseteq X$ إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من نقاط A . وبصورة عامة يقال عن الدالة f بأنها مستمرة إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من نقاط X .

مبرهنة (2.1.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجيا فأن الدالة $f:X\to Y$ تكون مستمرة عند النقطة $x_0\in X$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الأتي :

لكل مجموعة مفتوحة H في Y تحتوي $f(x_0)$، توجد مجموعة G في X تحتوي على x_0 وان $f(G)\subseteq H$.

البرهان :

نفرض f مستمرة عند النقطة $x_0\in X$

لتكن H مجموعة مفتوحة في Y وتحتوي على $f(x_0)\Leftarrow H$ جوار إلى النقطة $f(x_0)$ في Y

بما أن f مستمرة عند النقطة $x_0\in X\Leftarrow$ يوجد جوار V إلى النقطة x_0 في X بحيث أن $f(V)\subseteq H$

بما إن V جوار إلى النقطة x_0 في $X\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $x_0\in G\subseteq V$

$\Leftarrow H\supseteq f(V)\supseteq f(G)\Leftarrow G$ مجموعة مفتوحة في X تحتوي على x_0 وان $f(G)\subseteq H$

ا لاتجاه الأخر : نفرض الشرط في المبرهنة متحقق ونبرهن f مستمرة عند النقطة x_0

ليكن U جوار إلى النقطة $f(x_0)$ في Y

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة H في Y بحيث أن $f(x_0)\in H\subseteq U$

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي على x_0 وان $f(G)\subseteq H$

$\Leftarrow f(G)\subseteq U$ وعليه f مستمرة عند النقطة x_0.

مثال (3.1.2)

ليكن $X=\{a,b,c\}, Y=\{1,2,3\}, \tau_1=\{\phi,\{a\},\{b,c\},X\}, \tau_2=\{\phi,\{3\}\},\{1,2\},Y\}$

ولتكن الدالة $f:X\to Y$ معرفة بالصيغة $f(a)=1,\ \ f(b)=2,\ \ f(c)=3$.

ناقش استمرارية الدالة f عند كل نقطة من نقاط X

1. استمرارية الدالة f عند النقطة a

المجموعات المفتوحة في Y والتي تحتوي على $f(a)=1$ هي $\{1,2\}$, Y

إذا كانت $H=\{1,2\}$ نأخذ $G=\{a\}$

$\Leftarrow$ G مجموعة مفتوحة في X تحتوي على النقطة a وأن $f(G)=\{1\}\subseteq H$

إذا كانت $H=Y$ نأخذ $G=X$ $\Leftarrow$ $f(G)=Y=H$ $\Leftarrow$ f مستمرة عند النقطة a

2. استمرارية الدالة f عند النقطة b

المجموعات المفتوحة في Y والتي تحتوي على $f(b)=2$ هي $\{1,2\}$, Y

إذا كانت $H=\{1,2\}$ لا توجد مجوعة مفتوحة V في X تحتوي على النقطة b وأن $f(V)\subseteq H$

$\Leftarrow$ f غير مستمرة عند النقطة b.

وبالمثل نبرهن f غير مستمرة عند النقطة c وعليه الدالة f غير مستمرة

مبرهنة (4.1.2)

ليكن كل من $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ فضاء تبولوجياً ولتكن $f:X\to Y$ دالة فأن العبارات الآتية متكافئة

1. الدالة f مستمرة
2. إذا كان $x_0\in X$ وكان U جوار إلى النقطة $f(x_0)$ في Y فأن $f^{-1}(U)$ جوار إلى النقطة x_0 في X
3. إذا كانت G مجموعة مفتوحة في Y فأن المجموعة $f^{-1}(G)$ تكون مفتوحة في X
4. إذا كانت H مجموعة مغلقة في Y فأن المجموعة $f^{-1}(H)$ تكون مغلقه في X
5. $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ لكل $A\subset X$
6. $\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$ لكل $B\subset Y$
7. $f^{-1}(B)\subseteq \operatorname{int}(f^{-1}(B))$ لكل $B\subset Y$
8. إذا كانت β_2 قاعدة إلى التبولوجي τ_2 فأن $f^{-1}(V)\in\tau_1$ لكل $V\in\beta_2$
9. إذا كانت σ_2 قاعدة جزئية إلى التبولوجي τ_2 فأن $f^{-1}(V)\in\tau_1$ لكل $V\in\sigma_2$

البرهان

$(1)\Leftarrow(2)$

بما أن U جوار إلى النقطة $f(x_0)$ في Y

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة H في Y بحيث أن $f(x_0)\in H\subseteq U$ $\Leftarrow$ $x_0\in f^{-1}(H)\subseteq f^{-1}(U)$

يجب أن نبرهن $f^{-1}(H)$ مجموعة مفتوحة في X

ليكن $x\in f^{-1}(H)$ $\Leftarrow$ $f(x)\in H$

بما إن f مستمرة $\Leftarrow$ f مستمرة عند النقطة x

بما أن H مجموعة مفتوحة في Y وتحتوي على $f(x)$

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي على x وان $f(G)\subseteq H$

$\Leftarrow$ $G\subseteq f^{-1}(f(G))\subseteq f^{-1}(H)$ $\Leftarrow$ $x\in G\subseteq f^{-1}(H)$ $\Leftarrow$ $x\in \operatorname{int}((f^{-1}(H)))$

$\Leftarrow$ $f^{-1}(H)\subseteq \operatorname{int}(f^{-1}(H))$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(H)$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $f^{-1}(U)$ جوار إلى النقطة x_0 في X.

$(2) \Leftarrow (3)$

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y. إذا كانت $f^{-1}(G)=\phi$ ينتهي البرهان. أما إذا كانت $f^{-1}(G)\neq\phi$. ليكن $x\in f^{-1}(G) \Leftarrow f(x)\in G$

$G \Leftarrow$ جوار إلى النقطة $f(x)$ في Y لان G مجموعة مفتوحة في Y

$\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ جوار إلى النقطة x في X. وعليه $f^{-1}(G)$ تكون جوار إلى كل نقطة من نقاطها $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X.

$(3) \Leftarrow (4)$

لتكن H مجموعة مغلقة في Y $\Leftarrow$ المجموعة $H^c=Y\,|\,H$ مفتوحة في Y باستخدام (3) تكون $f^{-1}(H^c)$ مجموعة مفتوحة في X.

ولكن $f^{-1}(H^c)=f^{-1}(Y\,|\,H)=X\,|\,f^{-1}(H)$

$\Leftarrow$ $X\,|\,f^{-1}(H)$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ $f^{-1}(H)$ مجموعة مغلقة في X

$(4) \Leftarrow (5)$

لتكن $A\subset X \Leftarrow f(A)\subset Y \Leftarrow$ المجموعة $\overline{f(A)}$ مغلقة في Y

باستخدام (4) تكون $f^{-1}(\overline{f(A)})$ مجموعة مغلقة في X

بما أن $f(A)\subseteq\overline{f(A)}$ $\Leftarrow$ $A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$

بما إن $\overline{A}$ اصغر مجموعة مغلقة في X وتحتوي على A $\Leftarrow$ $\overline{A}\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$

$\Leftarrow$ $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$

$(5) \Leftarrow (6)$

لتكن $B\subseteq Y$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(B)\subseteq X$

$f(\overline{f^{-1}(B)})\subseteq\overline{f(f^{-1}(B))}\subseteq\overline{B}$

$\overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$

برهان $(6) \Leftarrow (7) \Leftarrow (8) \Leftarrow (9) \Leftarrow (1)$ يترك للقارئ

مبرهنة (5.1.2)

ليكن كل من $(X,\tau_1),\ (Y,\tau_2),\ (Z,\tau_3)$ فضاءً تبولوجياً ولتكن كل من $f:X\to Y$، $g:Y\to Z$ دالة مستمرة فأن الدالة $g\circ f:X\to Z$ تكون مستمرة

البرهان :

لتكن G مجموعة مفتوحة في Z.

بما إن الدالة $g:Y\to Z$ مستمرة $\Leftarrow$ $g^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Y

بما أن الدالة $f:X\to Y$ مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(g^{-1}(G))$ مجموعة مفتوحة في X.

لكن $f^{-1}(g^{-1}(G))=(f^{-1}\circ g^{-1})(G)=(g\circ f)^{-1}(G)$

$\Leftarrow$ $(g\circ f)^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X, $\Leftarrow$ $g\circ f$ مستمرة

مثال (6.1.2)

ليكن كل (X,τ_1), (Y,τ_2) فضاء تبولوجي ولتكن $f:X\to Y$ دالة. برهن على أن

1. إذا كانت الدالة f ثابتة فأنها مستمرة
2. إذا كانت الفضاء التبولوجي (X,τ_1) مبعثر فان f مستمرة
3. إذا كانت الفضاء التبولوجي (Y,τ_2) متماسك فأن f مستمرة

الحل

1. بما أن الدالة f ثابتة$\Leftarrow$يوجد $b\in Y$ بحيث أن $f(x)=b$ لكل $x\in X$

نفرض G مجموعة مفتوحة في Y

$$f^{-1}(G)=\begin{cases}\phi, & b\notin G\\ X, & b\in G\end{cases}$$

بما أن كل من ϕ, X مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ f مستمرة

2. لتكن G مجموعة مفتوحة في Y $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)\subseteq X$

بما أن (X,τ_1) مبعثر $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ f مستمرة

3. لتكن G مجموعة مفتوحة في Y

بما أن (Y,τ_2) متماسك$\Leftarrow$ أما $G=\phi$ أو $G=Y$

أما $f^{-1}(G)=\phi$ أو $f^{-1}(G)=X$

بما أن كل من ϕ, X مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ f مستمرة

مثال (7.1.2)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي،وليكن (X,τ) فضاء تبولوجي حيث $X=\{a,b\}$ $\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},X\}$

ولتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to X$ معرفة بالصيغة $f(x)=\begin{cases}a, & x\geq 0\\ b, & x<0\end{cases}$

هل أن الدالة f مستمرة ؟ ولماذا

الحل :

نأخذ $G=\{a\}$ $\Leftarrow$ G مجموعة مفتوحة في X

ولكن المجموعة $f^{-1}(G)=[0,\infty)$ ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ f غير مستمرة

مثال (8.1.2)

لتكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة بين فيما إذا كانت f مستمرة أم لا لكل حالة من الحالات التالية

1. $f(x)=[x]$ لكل $x\in\mathbb{R}$
2. $f(x)=\begin{cases}2, & x\geq 0\\ -2, & x<0\end{cases}$
3. $f(x)=2x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
4. $f(x)=|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$

الحل :

1. لتكن $G=(1,3)$ $\Leftarrow$ G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ لأنها فترة مفتوحة

$$G=(1,2)\cup\{2\}\cup(2,3)$$

$$f^{-1}(G)=f^{-1}((1,2))\cup f^{-1}(\{2\})\cup f^{-1}((2,3))=\phi\cup[2,3)\cup\phi=[2,3)$$

بما أن $[2,3)$ مجموعة غير مفتوحة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ f غير مستمرة

2. لتكن $G=(1,5)$ $\Leftarrow$ G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$

بما أن $2\in G$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)=f^{-1}((1,5))=[0,\infty)$

$\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ f غير مستمرة.

3. لتكن β عائلة جميع الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ β قاعدة إلى التبولوجي τ_u ، أي أن

$$\beta=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$$

لتكن $V\in\beta$ $\Leftarrow$ $V=(a,b)$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$

$$f^{-1}(V)=f^{-1}((a,b))=\frac{1}{2}(a,b)=(\frac{a}{2},\frac{b}{2})\in\tau_u$$

$\Leftarrow$ $f^{-1}(V)\in\tau_u$ $\Leftarrow$ f مستمرة

4. لتكن V مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$

$$f^{-1}(V)=\begin{cases}\phi, & a<b<0\\ (-b,b), & a<0<b\\ (-b,-a)\cup(a,b), & 0<a<b\end{cases}$$

$\Leftarrow$ $f^{-1}(V)\in\tau_u$ $\Leftarrow$ f مستمرة .

مبرهنة (9.1.2)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي فأن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تكون مستمرة عند النقطة x_0 في $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان لكل $\varepsilon>0$ توجد $\delta>0$ بحيث أن كل $x\in\mathbb{R}$

$|x-x_0|<\delta$ يؤدي إلى $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

البرهان :

نفرض الدالة f مستمرة عند النقطة x_0

ليكن $\varepsilon>0$. نضع $U=(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$ جوار إلى النقطة $f(x_0)$ في $\mathbb{R}$

بما أن f مستمرة عند النقطة x_0 في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ يوجد جوار V إلى x_0 في $\mathbb{R}$ بحيث $f(V)\subseteq U$

بما أن V جوار إلى النقطة x_0 في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن

$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq V$

$\Leftarrow$ لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن

$f((x_0-\delta,x_0+\delta))\subseteq f(V)\subseteq U=(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$

$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\in\mathbb{R}:|x-x_0|<\delta\}$

$(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}:|y-f(x_0)|<\varepsilon\}$

ألان

ليكن $x\in\mathbb{R}$ بحيث $|x-x_0|<\delta$ $\Leftarrow$ $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $\Leftarrow$ $f(x)\in f((x_0-\delta,x_0+\delta))$

ولكن $f((x_0-\delta,x_0+\delta))\subseteq(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$

$\Leftarrow$ $f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$ $\Leftarrow$ $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

وبسهولة يمكن برهان الاتجاه الأخر .

مثال (10.1.2)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي برهن على أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ لكل $x\in\mathbb{R}$ تكون مستمرة.

الحل :

ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ وليكن $\varepsilon>0$

$|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0|=|(x-x_0)(x+x_0)|=|x-x_0||x+x_0|$

بما أن $|x+x_0|\le|x|+|x_0|$

$|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0|(|x|+|x_0|)\qquad ...(1)$

بما أن $x=(x-x_0)+x_0$ $\Leftarrow$ $|x|=|(x-x_0)+x_0|$ $\Leftarrow$ $|x|\le|x-x_0|+|x_0|$

$|x|-|x_0|\le|x-x_0|$

إذا كان $|x-x_0|<1$ فان $|x|-|x_0|<1$

$|x| < 1 + |x_0| \qquad ...(2)$

من (1),(2) نحصل على $\qquad ...(3) \qquad |f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|(1 + 2|x_0|)$

نختار $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\}$. الآن ليكن $x \in \mathbb{R}$ بحيث أن $|x - x_0| < \delta$

$\Leftarrow \quad |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$ و $|x - x_0| < 1 \quad \Leftarrow \quad |x - x_0| < (1 + 2|x_0|) < \varepsilon$

من (3) نحصل على $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 وعلية الدالة f مستمرة.

مثال (11.1.2)

ليكن $(\mathbb{R}, \tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي برهن على أن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = \frac{1}{x}$ لكل $x \in \mathbb{R}^+$ تكون مستمرة عند النقطة 2.

الحل :

ليكن $\varepsilon > 0$

$|f(x) - f(2)| = |\frac{1}{x} - 2| = \left|\frac{2-x}{2x}\right| = \frac{|2-x|}{2x} \qquad$ (لان $x > 0$)

إذا كان $|x - 2| < 1 \quad \Leftarrow \quad -1 < x - 2 < 1 \quad \Leftarrow \quad 1 < x < 3$

$\Leftarrow \quad x > 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{x} < 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{|2-x|}{2x} < \frac{1}{2}|2-x|$

نختار $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$. الآن ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ بحيث أن $|x - 2| < \delta$

$\Leftarrow \quad |x - 2| < 2\varepsilon$ و $|x - 2| < 1 \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{2}|x - 2| < \varepsilon$

$|f(x) - f(2)| < \frac{1}{2}|2 - x| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة 2.

مبرهنة (12.1.2)

ليكن كل من (X, τ_1) ، (Y, τ_2) فضاءَ تبولوجيا ولتكن $f : X \to Y$ دالة مستمرة. أذا كان (Z, τ_Z) فضاءَ جزئيا من الفضاء التيولوجي (X, τ_1) فأن f_Z مقصور الدالة f على Z تكون مستمرة

البرهان :

بما أن الدالة $f_Z : Z \to Y$ هي مقصور الدالة f على Z

$\Leftarrow \quad f_Z(x) = f(x)$ لكل $x \in Z$

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $Z \cap f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Z أي أن $Z \cap f^{-1}(G) \in \tau_Z$

بما أن $f_Z^{-1}(G) = Z \cap f^{-1}(G)$ حسب تعريف f_Z

$\Leftarrow$ $f_Z^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Z $\Leftarrow$ f_Z مستمرة.

الدوال ذات القيم الحقيقية Real-Valued Functions

الدوال التي مستقرها مجموعه جزئية من مجموعة الإعداد الحقيقية تسمى بالدوال ذات القيم الحقيقية. سوف نرمز للدوال ذات القيم الحقيقية والمعرفة على المجموعة X بالرمز $\mathbb{F}(X)$، أي أن

$$\mathbb{F}(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \text{ دالة } f\}$$

في هذا البند سوف نتطرق إلى الدوال المستمرة والمعرفة من الفضاء التبولوجي (X,τ) إلى الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ ونرمز لمجموعة هذه الدوال بالرمز $C(X)$.

مبرهنة (13.1.2)

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجيا و $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجيا اعتياديا فأن الدالة $f : X \to \mathbb{R}$ تكون مستمرة عند النقطة $x_0 \in X$ إذا وفقط إذا كان لكل $r > 0$ يوجد جوار V إلى النقطة x_0 في X بحيث $|f(x) - f(x_0)| < r$ لكل $x \in V$

البرهان :

نفرض الدالة f مستمرة عند النقطة $x_0 \in X$

ليكن $r > 0$. نضع $U = (f(x_0) - r, f(x_0) + r)$ $\Leftarrow$ U جوار إلى النقطة $f(x_0)$ في $\mathbb{R}$.

بما أن f مستمرة عند النقطة $x_0 \in X$ $\Leftarrow$ يوجد جوار V إلى النقطة $x_0 \in X$ بحيث أن $f(V) \subseteq U$

$$f(V) \subseteq (f(x_0) - r, f(x_0) + r)$$

ليكن $x \in V$ $\Leftarrow$ $f(x) \in f(V)$ $\Leftarrow$ $f(x) \in (f(x_0) - r, f(x_0) + r)$

$f(x_0) - r < f(x) < f(x_0) + r$ $\Leftarrow$ $-r < f(x) - f(x_0) < r$ $\Leftarrow$ $|f(x) - f(x_0)| < r$ الاتجاه الأخر :

نفرض لكل $r > 0$ يوجد جوار V إلى النقطة x_0 في X بحيث $|f(x) - f(x_0)| < r$ لكل $x \in V$ ونبرهن f مستمرة عند النقطة $x_0 \in X$

ليكن U جوار إلى النقطة $f(x_0)$ في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subseteq U$

بما أن $\varepsilon > 0$ $\Leftarrow$ يوجد جوار V إلى النقطة x_0 في X بحيث أن $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

لكل $x \in V$ $\Leftarrow$ $-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ $\Leftarrow$ $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$\Leftarrow$ $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ لكل $x \in V$ $\Leftarrow$ $f(x) \in U$ لكل $x \in V$

$\Leftarrow$ $f(V) \subseteq U$ $\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة $x_0 \in X$

تعريف(14.1.2)

ليكن $f,g \in \mathbb{F}(X)$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$ نعرف $f+g$, λf, fg, $\frac{f}{g}$, $|f|$ على النحو الاتي

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ لكل $x \in X$
2. $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ لكل $x \in X$
3. $(fg)(x)=f(x)g(x)$ لكل $x \in X$
4. $|f|(x)=|f(x)|$ لكل $x \in X$
5. $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x)\neq 0,$ لكل $x \in X$

مبرهنة(15.1.2)

إذا كانت $f,g \in C(X)$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$ فان

1. $f+g \in C(X)$
2. $\lambda f \in C(X)$
3. $f\,g \in C(X)$
4. $\frac{f}{g} \in C(X)$ عندما $g(x)\neq 0$ لكل $x \in X$
5. $|f| \in C(X)$

البرهان:

لتكن $x_0 \in X$ وليكن $\varepsilon > 0$

بما أن $f,g \in C(X) \Leftarrow$ كل من $f:X \to \mathbb{R}, g:X \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة $\Leftarrow$ كل من g, f مستمرة عند النقطة x_0

بما أن الدالة $f:X \to \mathbb{R}$ مستمرة عند النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد جوار V_1 إلى النقطة x_0 في X بحيث أن

$|f(x)-f(x_0)| < \frac{r}{2}$ لكل $x \in V_1$

وكذلك الدالة $g:X \to \mathbb{R}$ مستمرة عند النقطة $x_0 \Leftarrow$ يوجد جوار V_2 الى النقطة x_0 في X بحيث أن

$|g(x)-g(x_0)| < \frac{r}{2}$ لكل $x \in V_2$

نضع $V=V_1 \cap V_2 \Leftarrow V$ جوار إلى النقطة x_0

ليكن $x \in V$

$$(f+g)(x)-(f+g)(x_0)=(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))=(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))$$

$$|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)|=|(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))|\le|f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

$\Leftarrow$ $f+g$ دالة مستمرة عند النقطة x_0 وعليه مستمرة في جميع نقاط X

$\Leftarrow$ $f+g\in C(X)$

وبالمثل نبرهن $(2),(3),(4),(5)$.

ملاحظه

من المبرهنة أعلاه نستنتج على أن كل دالة متعددة حدود P حيث

$$p(x)=a_\circ+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

تكون دالة مستمرة

تمارين (1.2)

1. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي، وان $Y=[0,1]$ و (Y,τ_Y) فضاء جزئي من الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$. عرف الدالة $f:X\to Y$ بحيث أن $f^{-1}((a,1)),\ f^{-1}((0,b))$ مجموعات مفتوحة في X لكل $a>0,\ \ b<1$. برهن على أن الدالة f مستمرة.
2. ليكن كل من $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ فضاء تبولوجياً، ليكن $x\in X$ تحت أي شرط تكون الدالة $f:X\to Y$ غير مستمرة عند النقطة x.
3. ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاءَ تبولوجياً اعتيادياً ولتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$$

برهن على أن الدالة f غير مستمرة

4. ليكن $X=\{1,2,3,4\},\ \tau_1=\{\phi,\{3\},X\},\ \tau_2=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\},X\}$ ولتكن الدالة $f:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ معرفة بالصيغة $f(x)=x$ لكل $x\in X$. برهن على أن f دالة غير مستمرة
5. ليكن (Y,τ_Y) فضاءَ جزئيا من الفضاء التبولوجي (X,τ) ولتكن الدالة $f:X\to Y$ معرفة بالصيغة $f(x)=x$ لكل $x\in Y$. برهن على أن الدالة f مستمرة
6. ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجيا اعتياديا ولتكن كل من $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة. برهن على أن المجموعة $A=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=g(x)\}$ مغلقة في $\mathbb{R}$
7. ليكن كل من $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ فضاءَ تبولوجياً ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة إذا كانت $x\in A'$ حيث $A\subseteq X$ فأن $f(x)\in\overline{f(A)}$
8. ليكن كل من $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ فضاءَ تبولوجياً ولتكن $x\in X$ بحيث أن $\{x\}\in\tau$. برهن على أن الدالة

2.2 الدوال المفتوحة والمغلقة Open and Closed Functions

الدالة المستمرة لا تضمن نقل المجموعات المفتوحة (المغلقة) من مجالها إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في مجالها المقابل .يتضمن هذا البند تقديم نوعا من الدوال يضمن الحفاظ على صفة كون المجموعة مفتوحة أو مغلقة من مجال الدالة إلى مجالها المقابل .

تعريف (1.2.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجيا. يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها

1. مفتوحة (Open) إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة في X تكون مجموعة مفتوحة في Y ، بعبارة أخرى $f(G)\in\tau_2$ لكل $G\in\tau_1$.
2. مغلقة **(Closed)** إذا كانت صورة كل مجموعة مغلقة في X تكون مجموعة مغلقة في Y، بعبارة أخرى $f(F)$ تكون مغلقة في Y لكل F مغلقة في X.

مثال (2.2.2)

ليكن $Y=\{1,2,3\}$, $X=\{a,b,c\}$ ، وليكن $\tau_2=\{\phi,\{3\},\{1,2\},Y\}$, $\tau_1=\{\phi,\{c\},\{a,b\},X\}$. بين أي من الدوال التالية مستمرة , مفتوحة , مغلقة ؟

1. $f:X\to Y$ بحيث إن $f(c)=1, f(b)=2, f(a)=1$
2. $g:X\to Y$ بحيث إن $g(c)=3, g(b)=3, g(a)=3$
3. $h:X\to Y$ بحيث إن $h(c)=3, h(b)=1, h(a)=2$
4. $r:X\to Y$ بحيث إن $r(c)=3, r(b)=2, r(a)=1$

الحل :

1.المجموعات المفتوحة في Y هي $Y,\{1,2\},\{3\},\phi$ وأن

$$f^{-1}(\phi)=\phi,\quad f^{-1}(\{3\})=\phi,\quad f^{-1}(\{1,2\})=\{a,b,c\}=X\,,\quad f^{-1}(Y)=X$$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة

بما أن $\{c\}$ مجموعة مفتوحة في X وأن المجموعة $f(\{c\})=\{1\}$ ليست مفتوحة في Y

$\Leftarrow$ الدالة f ليست مفتوحة

بما أن $\{a,b\}$ مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ المجموعة $\{a,b\}^c=\{c\}$ مغلقة في X وان المجموعة $f(\{c\})=\{1\}$ ليست مغلقة في Y

$\Leftarrow$ الدالة f ليست مغلقة

وبالمثل نبرهن على أن

2. الدالة g مستمرة , مفتوحة , مغلقة .
3. الدالة h مستمرة , مفتوحة , مغلقة
4. الدالة r مستمرة , مفتوحة , مغلقة

مثال (3.2.2)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي وليكن $b\in\mathbb{R}$ نعرف الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x)=b$ لكل $x\in\mathbb{R}$، (أي أن f دالة ثابتة). برهن على أن الدالة f مغلقة وليست مفتوحة

البرهان :

ليكن A مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ المجموعة $f(A)=\{b\}$ مغلقة في $\mathbb{R}$ لان $\{b\}$ مجموعة منتهية

$\Leftarrow$ الدالة f مغلقة

لتكن G مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ المجموعة $f(G)=\{b\}$ ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ الدالة f ليست مفتوحة.

مثال (4.2.2)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي. نعرف الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ 1, & 1\le x\le 2 \\ \dfrac{x^2}{4}, & x>2 \end{cases}$$

برهن على إن الدالة f مستمرة وليست مغلقة

البرهان :

لتكن $\beta=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$ $\Leftarrow$ β قاعدة إلى التبولوجي τ_u

ليكن $V\in\beta$ $\Leftarrow$ $V=(a,b)$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$ ، $a<b$

$$f^{-1}(V)=\begin{cases} (a,b), & a<b<1 \\ (a,2\sqrt{b}), & a<1<b \\ (2\sqrt{a},2\sqrt{b}), & 1<a<b \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $f^{-1}(V)\in\tau_u$ $\Leftarrow$ الدالة f مستمرة

خذ $G=(\frac{3}{2},\frac{7}{4})$ $\Leftarrow$ G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولكن المجموعة $f(G)=\{1\}$ ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ الدالة f ليست مفتوحة.

مبرهنة (5.2.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءً تبولوجياً ولتكن $f:X\to Y$ دالة

1. الدالة f تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كان $f(\text{int}(A))\subseteq \text{int}(f(A))$ لكل $A\subseteq X$
2. الدالة f تكون مغلقة إذا وفقط إذا كان $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$ لكل $A\subseteq X$

البرهان :

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

1. نفرض الدالة f مفتوحة , ولتكن $A \subseteq X$

بما إن $\operatorname{int}(A)$ مجموعة مفتوحة في X ⇐ $f(\operatorname{int}(A))$ مجموعة مفتوحة في Y

بما أن $\operatorname{int}(A) \subseteq A$ ⇐ $f(\operatorname{int}(A)) \subseteq f(A)$ ⇐ $\operatorname{int}(f(\operatorname{int}(A))) \subseteq \operatorname{int}(f(A))$

بما أن $f(\operatorname{int}(A))$ مجموعة مفتوحة في Y ⇐ $\operatorname{int}(f(\operatorname{int}(A))) = f(\operatorname{int}(A))$

⇐ $f(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{int}(f(A))$

الاتجاه الآخر: نفرض $f(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{int}(f(A))$ لكل $A \subseteq X$.

لتكن G مجموعة مفتوحة في X ⇐ $\operatorname{int}(G)=G$

بما أن $f(\operatorname{int}(G)) \subseteq \operatorname{int}(f(G))$ حسب الفرض ⇐ $f(G) \subseteq \operatorname{int}(f(G))$

ولكن $\operatorname{int}(f(G)) \subseteq f(G)$ ⇐ $\operatorname{int}(f(G)) = f(G)$ ⇐ $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y ⇐ f دالة مفتوحة .

2. نفرض الدالة f مغلقة، ولتكن $A \subseteq X$

بما أن $A \subseteq \overline{A}$ ⇐ $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ ⇐ $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})}$

بما أن $\overline{A}$ مجموعة مغلقة في X ⇐ $f(\overline{A})$ مجموعة مغلقة في Y

⇐ $\overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$ ⇐ $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$

الاتجاه الآخر : نفرض $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ لكل $A \subset X$

لتكن M مجموعة مغلقة في X ⇐ $\overline{M} = M$

بما أن $\overline{f(M)} \subseteq f(\overline{M})$ حسب الفرض ⇐ $\overline{f(M)} \subseteq F(M)$

ولكن $f(M) \subseteq \overline{f(M)}$ ⇐ $\overline{f(M)} = f(M)$ ⇐ $f(M)$ مجموعة مغلقة في Y

⇐ f دالة مغلقة .

مبرهنة (6.2.2)

ليكن كل من (X,τ_1)، (Y,τ_2) فضاء تبولوجياً ولتكن $f:X \to Y$ دالة تقابلية

1. الدالة f تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت الدالة $f^{-1}:Y \to X$ مستمرة

2. الدالة f تكون مغلقة إذا وفقط إذا كانت الدالة $f^{-1}:Y \to X$ مستمرة

البرهان :

1. نفرض الدالة f مفتوحة، ولتكن G مجموعة مفتوحة في X

⇐ $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y

بما أن الدالة f تقابلية ⇐ $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$

⇐ $(f^{-1})^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Y ⇐ f^{-1} دالة مستمرة

الاتجاه الآخر: نفرض الدالة f^{-1} مستمرة

لتكن M مجموعة مفتوحة في X ⇐ $(f^{-1})^{-1}(M)$ مجموعة مفتوحة في Y

بما أن الدالة f تقابلية $\Leftarrow$ $\left(f^{-1}\right)^{-1}(M)=(f^{-1})^{-1}(M)=f(M)$

$\Leftarrow$ $f(M)$ مجموعة مفتوحة في Y وعليه الدالة f تكون مفتوحة .

وبالمثل نبرهن (2).

نتيجة (7.2.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجياً ولتكن $f:X\to Y$ دالة تقابلية فأن الدالة f تكون مفتوحة إذا وفقط إذا كانت مغلقة

مثال(8.2.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجياً ولتكن $f:X\to Y$ دالة.

1. أذا كان (Y,τ_2) مبعثراً فأن الدالة f تكون مفتوحة ومغلقة .
2. إذا كان (X,τ_1) متماسك وكانت f شاملة فأن الدالة f تكون مغلقة ومفتوحة

البرهان :

1. لتكن G مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ $G\subseteq X$ $\Leftarrow$ $f(G)\subseteq Y$

بما إن (Y,τ_2) فضاء تبولوجي مبعثر $\Leftarrow$ $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y

$\Leftarrow$ f دالة مفتوحة . وبالمثل نبرهن على أن الدالة f مغلقة

2. لتكن G مجموعة مفتوحة في X

بما آن (X,τ_1) فضاء تبولوجي متماسك $\Leftarrow$ أما $G=\phi$ أو $G=X$

بما أن الدالة f شاملة فان $f(X)=Y$ وعليه أما $f(G)=\phi$ أو $f(G)=Y$

$\Leftarrow$ f دالة مفتوحة . وبالمثل نبرهن على أن الدالة f مغلقة

مبرهنة (9.2.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجياً ولتكن $f:X\to Y$ دالة. إذا كانت β قاعدة إلى التبولوجي τ_1 بحيث أن $f(V)\in\tau_2$ لكل $V\in\beta$ فأن الدالة f تكون مفتوحة

البرهان :

لتكن G مجموعة مفتوحة في X

بما أن β قاعدة إلى التبولوجي τ_1 $\Leftarrow$ $G=\bigcup_i V_i$ بحيث $V_i\in\beta$ لكل i

$$f(G)=f(\bigcup_i V_i)=\bigcup_i f(V_i)$$

بما أن $V_i\in\beta$ $\Leftarrow$ $f(V_i)\in\tau_2$ $\Leftarrow$ $\bigcup_i f(V_i)\in\tau_2$ $\Leftarrow$ $f(G)\in\tau_2$

$\Leftarrow$ f دالة مفتوحة .

الدوال ثنائية الاستمرارية Bicontinuous Functions

تعريف (10.2.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءً تبولوجياً يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها ثنائية الاستمرارية (Bicontinuous) إذا كانت الدالة f مفتوحة ومستمرة

مثال (11.2.2)

ليكن $X=\{a,b,c\},Y=\{1,2,3\},\tau_1=\{\phi,\{c\},\{a,b\},X\},\tau_2=\{\phi,\{3\},\{1,2\},Y\}$

نعرف الدالة $f:X\to Y$ بحيث أن $f(a)=3,f(b)=3,f(c)=3$. برهن على ان الدالة f ثنائية الاستمرارية

الحل :

المجموعات المفتوحة في X هي $\phi,\{c\},\{a,b\},X$ وأن

$$f(\phi)=\phi,f(\{c\})=\{3\},\quad f(\{a,b\})=\{3\},\quad f(X)=\{3\},\quad \{3\}\in\tau_2$$

$\Leftarrow$ f دالة مفتوحة

المجموعات المفتوحة في y هي $\phi,\{3\},\{1,2\},Y$ وان

$$f^{-1}(\phi)=\phi,\quad f^{-1}(\{3\})=X,\quad f^{-1}(\{1,2\})=\phi,\quad f^{-1}(Y)=X$$

$\Leftarrow$ f دالة مستمرة وعليه الدالة f ثنائية الاستمرارية.

مثال (12.2.2)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي ولتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ لكل $x\in\mathbb{R}$. هل أن الدالة f ثنائية الاستمرارية ؟.

الحل :

الدالة f مستمرة (انظر المثال (10.1.2)) ولكنها ليست مفتوحة لأن لو أخذنا $G=(-2,2)$ $\Leftarrow$ G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولكن $f(G)=[0,4)$ ليست مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وعليه الدالة f ليست ثنائية الاستمرارية.

تمارين (2.2)

1. ليكن $Y=\{1,2\}$, $X=\{a,b\}$ ، وليكن $\tau_2=\{\phi,\{1\},Y\}$, $\tau_1=\{\phi,\{a\},X\}$. برهن أن
   1. الدالة $f:X\to Y$ المعرفة بالصيغة إن $f(a)=f(b)=1$ مفتوحة وليست مغلقة
   2. الدالة $g:X\to Y$ المعرفة بالصيغة $g(a)=2,\quad g(b)=1$ ليسن مفتوحة ولا مغلقة.
2. ليكن $Y=\{1,2,3,4\}$, $X=\{a,b,c,d\}$ ، وليكن $\tau_1=\{\phi,\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d\},X\}$ ، $\tau_2=\{\phi,\{1\},\{2,3\},\{1,2,3\},Y\}$. عرف دالة $f:X\to Y$ بحيث
   ا. مستمرة ومفتوحة
   ب. مستمرة ومغلقة
   ج. مفتوحة ومغلقة
   د. معلقة وغير مفتوحة .

3. ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة معرفة بالصيغة $f(x)=\tan^{-1}x$ لكل $x\in\mathbb{R}$. برهن على أن الدالة f ليست مفتوحة.

4. ليكن $X=(0,\infty),\quad Y=[-1,1]$ وليكن كل من (X,τ_X) ، (Y,τ_Y) فضاءَ جزئيا من الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$.

5. ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) ، (Z,τ_3) فضاءَ تبولوجياَ. بين أي من العبارات التالية صحيحة أم لا ؟ مع البرهان

ا. إذا كانت كل من $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ دالة مفتوحة فان $g\circ f$ دالة مفتوحة .

ب. إذا كانت كل من $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ دالة مغلقة مفتوحة فان $g\circ f$ دالة مفتوحة .

3.2 التشاكل التبولوجي Homeomorphism

بعد أن تطرقنا في البندين الأول والثاني من هذا الفصل إلى نوعا خاصا من التطبيقات من بينية تبولوجية إلى أخرى وهي كل من الدوال المستمرة والدوال المفتوحة والدوال المغلقة ودرسنا بعض خواصهما . وقد لاحظنا أن الدوال المستمرة لا تحافظ على نقل صورة المجموعات المفتوحة (المغلقة) من المجال إلى مجموعات مفتوحة (مغلقة) في المجال المقابل. وفي هذا البند سنتطرق إلى دوال مستمرة تجعل صور المجموعات المفتوحة (المغلقة)هي مجموعات مفتوحة (مغلقة) وهذه الدوال يجب أن تكون تقابلية بالإضافة إلى كونها مستمرة ومفتوحة .

وتلعب هذه التطبيقات دورا غاية في الأهمية ، ذلك أنها تعتبر وسيط لدراسة الخواص للرئيسية للتبولوجيا ولا تقتصر على الحفاظ صفات المجموعات من حيث كونها مفتوحة أو معلقة بل تتعدى ذلك للعديد من الخواص الأخرى التي تحفظ تحت تأثير مثل هذه الدوال وهذه تسمى الخواص التبولوجية .

تعريف (1.3.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجيا. يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها تشاكل تبولوجي (Homeomorphism) إذا كانت الدالة f تقابلية وكل من f^{-1},f دالة مستمرة. ويقال عن الفضائيين X,Y بأنهما متشاكلين تبولوجيا (Homeomorphic) إذا وجد تشاكلا تبولوجيا بينهما ويكتب $X\cong Y$.

مثال (2.3.2)

ليكن $X=\{a,b,c\},\quad Y=\{1,2,3\},\quad \tau_1=\{\phi,\{a\},X\},\quad \tau_2=\{\phi,\{1\},Y\}$. عرف الدالة $f:X\to Y$ بحيث إن $f(a)=1,\quad f(b)=2,\quad f(c)=3$ برهن على إن f تشاكل تبولوجي .

البرهان :

من الواضح أن الدالة f تقابلية . المجموعات المفتوحة في Y هي $\phi,\{1\},Y$ وان

$$f^{-1}(\phi)=\phi,\quad f^{-1}(\{1\})=\{a\},\quad f^{-1}(Y)=X$$

$\Leftarrow$ f دالة مستمرة . وبالمثل نبرهن على أن الدالة f^{-1} مستمرة $\Leftarrow$ f تشاكل تبولوجي .

مثال (3.3.2)

ليكن $X=\{a,b,c\},\quad Y=\{1,2,3\},\quad \tau_1=\{\phi,\{c\},\{a,b\},X\}$ ، τ_2 تبولوجي مبعثر على Y هل إن $X\cong Y$ ؟ ولماذا

الحل :

نفرض $X\cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f:X\to Y$ $\Leftarrow$ f مستمرة

بما إن كل مجموعة جزئية أحادية من Y هي مجموعة مفتوحة في Y ولكن الصورة العكسية لها ليس بالضرورة أن تكون مجموعة مفتوحة في X مثلا المجموعة الأحادية في Y التي صورتها العكسية $\{b\}$ ليس مفتوحة في X وهذا يناقض أن f مستمرة $\Leftarrow$ f ليست تشاكل تبولوجي وعليه $X \not\cong Y$.

مثال (4.3.2)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي ولتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=2x+1$ لكل $x\in\mathbb{R}$.

برهن على أن f تشاكل تبولوجي

الحل :

نفرض $x,y\in\mathbb{R}$ بحيث أن $f(x)=f(y) \Leftarrow 2y+1=2x+1 \Leftarrow x=y$

$\Leftarrow$ f دالة متباينة .

نفرض $y\in\mathbb{R} \Leftarrow x=\frac{1}{2}(y-1)\in\mathbb{R}$ وان $f(x)=2\frac{1}{2}(y-1)+1=y$

$\Leftarrow$ f دالة شاملة وعليه الدالة f تقابلية .

لتكن $\beta=\{(a,b):a,b\in\mathbb{R}\} \Leftarrow \beta$ قاعدة إلى التبولوجي τ_u

ولتكن $V\in\beta \Leftarrow V=(a,b)$ حيث $a,b\in\mathbb{R},\quad a<b$.

$f^{-1}(V)=f^{-1}((a,b))=(\frac{a-1}{2},\frac{b-1}{2})\in\tau_u \Leftarrow$ f دالة مستمرة

وبالمثل نبرهن الدالة $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y-1)$ مستمرة

وعلية الدالة f تشاكل تبولوجي .

مبرهنة (5.3.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجيا ولتكن $f:X\to Y$ دالة تقابلية فأن العبارات الآتية متكافئة .

1. الدالة f تشاكل تبولوجي
2. الدالة f مستمرة ومفتوحة
3. الدالة f مستمرة ومغلقة

البرهان

مباشرة من المبرهنة (6.2.2)

مبرهنة (6.3.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) و (Z,τ_3) فضاءَ تبولوجيا ولتكن كل من $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ تشاكلا تبولوجيا فأن الدالة $g\circ f:X\to Z$ تكون تشاكلا تبولوجيا .

البرهان :

بما إن كل من g,f دالة تقابلية $\Leftarrow$ $g\circ f$ دالة تقابلية

بما إن كل من g,f دالة مستمرة $\Leftarrow$ $g\circ f$ دالة مستمرة

بما أن كل من g^{-1}, f^{-1} دالة مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}\circ g^{-1}$ دالة مستمرة

ولكن $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ $\Leftarrow$ $(g\circ f)^{-1}$ دالة مستمرة

$\Leftarrow$ $g\circ f$ تشاكل تبولوجي .

مبرهنة (7.3.2)

التشاكل التبولوجي هو علاقة تكافؤ على العائلة المكونة من جميع الفضاءات التبولوجية .

البرهان :

لتكن $\mathcal{F}$ العائلة المكونة من جميع الفضاءات التبولوجية ولتكن R علاقة على $\mathcal{F}$

أي أن $R = \{(x, y) \in \mathcal{F}\times\mathcal{F} : X \cong Y\}$

1. يجب أن نبرهن على إن التشاكل التبولوجي علاقة انعكاسية

ليكن $(X, \tau) \in \mathcal{F}$. نعرف الدالة $f : X \to X$ بالصيغة $f(x) = x$ لكل $x \in X$

(أي أن f دالة ذاتية) من السهولة أن نبرهن على أن f تشاكل تبولوجي $\Leftarrow$ $X \cong X$

2. يجب أن نبرهن على أن التشاكل التبولوجي علاقة متناظرة

ليكن $(X, \tau_1), \quad (Y, \tau_2) \in \mathcal{F}$ بحيث أن $(X, Y) \in R$.

بما أن $X \cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f : X \to Y$

$\Leftarrow$ f دالة تقابلية وان كل من f ، f^{-1} دالة مستمرة وعليه $f^{-1} : Y \to X$ دالة تقابلية ومستمرة وان $(f^{-1})^{-1} = f$ تكون مستمرة $\Leftarrow$ f^{-1} تشاكل تبولوجي $\Leftarrow$ $(Y, X) \in R$.

3. يجب أن نبرهن على أن R علاقة متعدية .

ليكن $(X, \tau_1), \quad (Y, \tau_2), \quad (Z, \tau_3) \in \mathcal{F}$ بحيث أن $(X, Y), \quad (Y, Z) \in R$.

بما أن $X \cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f : X \to Y$

وكذلك $Y \cong Z$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $g : Y \to Z$

$\Leftarrow$ $g\circ f : X \to Z$ تشاكل تبولوجي وعليه $X \cong Z$ $\Leftarrow$ $(X, Z) \in R$.

مبرهنة (8.3.2)

ليكن كل من $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ فضاءً تبولوجيا ولتكن $f : X \to Y$ تشاكل تبولوجيا فأن $\partial(f(A)) = f(\partial(A))$ لكل $A \subseteq X$.

البرهان :

بما أن $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{(A^c)}$ $\Leftarrow$ $f(\partial(A)) = f(\overline{A} \cap \overline{(A^c)})$

بما أن الدالة f متباينة $\Leftarrow$ $f(\overline{A} \cap \overline{(A^c)}) = f(\overline{A}) \cap f(\overline{(A^c)})$

$\Leftarrow$ $f(\partial(A)) = f(\overline{A}) \cap f(\overline{(A^c)})$

بما إن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

بما أن الدالة f مغلقة $\Leftarrow$ $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ $\Leftarrow$ $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$

وبالمثل نبرهن $f(\overline{(A^c)}) = \overline{f(A^c)}$ $\Leftarrow$ $f(\partial(A)) = \overline{f(A)} \cap \overline{f(A^c)}$

بما إن الدالة f تقابلية $\Leftarrow$ $f(A^c)=(f(A))^c$

$\Leftarrow$ $f(\partial(A))=\overline{f(A)}\cap\overline{(f(A))^c}$ $\Leftarrow$ $f(\partial(A))=\partial(f(A))$

مبرهنة(9.3.2)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجيا ولتكن $f:X\to Y$ دالة تقابلية فأن f تشاكل تقابلي إذا وفقط إذا كان $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ لكل $A\subseteq X$.

البرهان :

نفرض f تشاكل تقابلي . ولتكن $A\subseteq X$

بما أن الدالة f مستمرة $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$

وكذلك بما أن الدالة f مغلقة $\Leftarrow$ $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$ $\Leftarrow$ $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$

وبالمثل نبرهن الاتجاه الأخر.

تعريف (10.3.2)

يقال أن خاصية الفضاء التبولوجي (X,τ) هي صفة تبولوجية (Topological Property) إذا كان كل تشاكل تبولوجي من X لديه تلك الخاصية كلما كان لدى X تلك الخاصية . بعبارة أخرى يقال عن الصفة التي تنتقل بفعل التشاكلات التبولوجية بأنها صفة تبولوجية

ملاحظة

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجيا. الخاصية P تكون صفة تبولوجية اذا كانت محافظة على نفسها بالنسبة لأي تشاكل تبولوجي . وهذا يعني إذا كان الفضاء X يتمتع بالخاصية P فإنها تكون خاصية تبولوجية إذا وجد تشاكل تبولوجي اختياري $f:X\to Y$ بحيث أن الفضاء Y يتمتع بنفس الخاصة P .

مثال(11.3.2)

خاصية الفضاء المبعثر صفة تبولوجية

البرهان :

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجياً بحيث أن $X\cong Y$

يجب أن نبرهن X فضاء مبعثر إذا وفقط إذا كان Y فضاء مبعثر

بما إن $X\cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f:X\to Y$

نفرض X فضاء مبعثر

لتكن $B\subseteq Y$ يجب أن نبرهن $B\in\tau_2$

بما أن $f^{-1}(B)\subseteq X$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(B)\in\tau_1$ لان τ_1 تبولوجي مبعثر على X

بما أن f دالة مفتوحة $\Leftarrow$ $f(f^{-1}(B))\in\tau_2$

بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow$ $f(f^{-1}(B))=B$ $\Leftarrow$ $B\in\tau_2$ $\Leftarrow$ Y فضاء مبعثر

وبالمثل نبرهن الاتجاه الآخر.

مثال(12.3.2)

خاصية طول الفترات ليست صفة تبولوجية

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

البرهان :

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجياً اعتياديا بحيث أن $X=[0,1],\quad Y=[a,b]$

ولتكن الدالة $f:X\to Y$ معرفة بالصيغة $f(x)=(b-a)x+a$ لكل $x\in X$

1. ليكن $x,y\in X$ بحيث ان $f(x)=f(y)$

$\Leftarrow\ (b-a)x+a=(b-a)y+a\ \Leftarrow\ x=y\ \Leftarrow$ f دالة متباينة

2. ليكن $y\in[a,b]$ ، نأخذ $x=\dfrac{y-a}{b-a}\ \Leftarrow\ x\in X$ وان $f(x)=(b-a)\dfrac{y-a}{b-a}+a=y-a+a=y$

$\Leftarrow$ f دالة شاملة

وعليه الدالة f تقابلية وبالتالي الدالة العكسية f^{-1} موجودة .

3. لتكن A مجموعة مفتوحة في Y هنالك ثلاث حالات

- $A=(\alpha,\beta)$ حيث $a\le\alpha<\beta\le b$ فان $f^{-1}(A)=f^{-1}((\alpha,\beta))=(\dfrac{\alpha-a}{b-a},\dfrac{\beta-a}{b-a})\subseteq[0,1]=X$

$\Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة في X

- $A=\phi$ فان $f^{-1}(A)=f^{-1}(\phi)=\phi\ \Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة في X
- $A=Y$ فان $f^{-1}(A)=f^{-1}(Y)=X\ \Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ f دالة مستمرة

4. لتكن B مجموعة مفتوحة في X هنالك ثلاث حالات

- $B=(x,y)$ حيث $0\le x<y\le 1$ فان $f(B)=f((x,y))=((b-a)x+a,(b-a)y+a)$

لو فرضنا $c=(b-a)x+a$ ،

بما أن $0\le x\le 1\ \Leftarrow\ (b-a)x\le(b-a)\ \Leftarrow\ (b-a)x+b\le(b-a)+a=b\ \Leftarrow\ c\le b$

كما أن $c\ge a$ لأنه إذا كانت $c<a\ \Leftarrow\ (b-a)x+a=c<a\ \Leftarrow\ (b-a)x<0\ \Leftarrow\ b-c<0$

$\Leftarrow\ f(B)=f((x,y))=((b-a)x+a,(b-a)y+a)=(c,d)\subseteq[a,b]=Y$

$\Leftarrow$ $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y

- $B=\phi$ فان $f(B)=f(\phi)=\phi$
- $B=X$ فان $f(B)=f(X)=Y$

$\Leftarrow$ f دالة مفتوحة $\Leftarrow$ f^{-1} دالة مستمرة

نلاحظ أن الدالة f تقابلية وان كل من $f,\ f^{-1}$ دالة مستمرة وعليه $X\cong Y$

بما أن $f(X)=Y\ \Leftarrow\ f([0,1])=[a,b]$

طول الفترة $[0,1]$ هو $1-0=1$ وطول الفترة $f([0,1])$ هو $b-a$

ولو فرضنا $b=5\quad a=0,$ فان طول الفترة $f([0,1])$ هو $b-5-0=5$

وهذا يعني الطول ليست صفة تبولوجية .

مثال(13.3.2)

خاصية القيدية ليست صفة تبولوجية

البرهان :

ليكن $X=(-1,1)$ وليكن كل من (X,τ_1) ، $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجياً اعتياديا . ولتكن الدالة $f:X\to Y$ معرفة بالصيغة $f(x)=\tan^{-1}\frac{\pi}{2}x$ لكل $x\in X$ فمن الواضح أن f تقابلية وان كل من f^{-1} , f دالة مستمرة وعليه $X\cong\mathbb{R}$.

ولكن X مجموعة مقيدة بينما $f(X)=\mathbb{R}$ مجموعة غير مقيدة .

فان القيدية ليست صفة تبولوجية .

مثال(14.3.2)

خاصية انعزال مجموعة صفة تبولوجية

البرهان :

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجياً بحيث أن $X\cong Y$

يجب أن نبرهن إذا كانت A مجموعة منعزلة في X إذا وفقط إذا كان $f(A)$ مجموعة منعزلة في Y .

بما إن $X\cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f:X\to Y$

نفرض A مجموعة منعزلة في X . $\Leftarrow$ $A\cap A'=\phi$

ليكن $y\in f(A)$ $\Leftarrow$ يوجد $x\in A$ بحيث أن $y=f(x)$

بما أن $A\cap A'=\phi$ $\Leftarrow$ $x\notin A'$

$\Leftarrow$ مجموعة مفتوحة G في X تحتوي x بحيث أن $(G\,|\,\{x\})\cap A=\phi$

$\Leftarrow$ $y=f(x)\in f(G)$

بما أن الدالة f مفتوحة فان $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y

بما أن $(G\,|\,\{x\})\cap A=\phi$ $\Leftarrow$ $f((G\,|\,\{x\})\cap A)=f(\phi)=\phi$ $\Leftarrow$ $f((G\,|\,\{x\}))\cap f(A)=\phi$

$\Leftarrow$ $(f(G)\,|\,\{f(x)\})\cap f(A)=\phi$ $\Leftarrow$ $(f(G)\,|\,\{y\})\cap f(A)=\phi$

$y\notin(f(A))'$ $\Leftarrow$ $f(A)\cap(f(A))'=\phi$ وبالتالي $f(A)$ مجموعة منعزلة في Y

وبالمثل نبرهن الاتجاه الآخر.

تمارين (3.2)

1. لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية . ولتكن τ_1 تبولوجي مكمل المنتهى على $\mathbb{N}$ ، $\tau_2=\{\phi,\mathbb{N}\}\cup\{A_m:m\in\mathbb{N}\}$ حيث $A_m=\{1,2,\cdots,m\}$ برهن على أن $(\mathbb{N},\tau_1)\cong(\mathbb{N},\tau_2)$
2. لتكن $X=(-1,1)$ وليكن (X,τ_X) فضاء جزئيا من الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$. برهن على أن الدالة $f:X\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$ لكل $x\in X$ تكون تشاكلا تبولوجياً.

3. ليكن كل من (X,τ_X) ، (Y,τ_Y) فضاءَ جزئيا من الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$. برهن على أن $X \cong Y$ عندما

أ. $X=(0,1),\ \ Y=(a,b)$

ب. $X=[0,1],\ \ Y=[a,b]$

ج. $X=[0,1),\ \ Y=[a,b)$

د. $X=(1,\infty),\ \ Y=(a,\infty)$

هـ. $X=(0,1),\ \ Y=(0,1)$

4. ليكن $X=\{a,b,c,d\},\ \ \tau_1=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\},\ \ \tau_2=\{\phi,\{b\},\{c\},\{a,b\},X\}$ برهن على أن الدالة $f:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ بالصيغة $f(a)=c,\ \ f(b)=b,\ \ f(c)=a,\ \ f(d)=d$ تكون تشاكل تبولوجيا .

5. ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) ، (Z,τ_3) فضاءَ تبولوجيا ولتكن $f:X\to Y$ دالة شاملة ومستمرة $g:Y\to Z$ دالة متباينة ومستمرة , $g\circ f:X\to Z$ تشاكل تبولوجياَ برهن على أن كل من f,g تشاكلا تبولوجيا.

4.2 الاستمرارية في الفضاءات المترية Continuity in Metric Spaces

ليكن كل من (X,d_1) ، (Y,d_2) فضاء متريا. يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها مستمرة **(Continuous)** عند النقطة $x_0\in X$ إذا كان لكل مجموعة مفتوحة U في Y تحتوي على النقطة $f(x_0)$ ، توجد مجموعة مفتوحة V في X تحتوي على النقطة x_0 بحيث أن $f(V)\subseteq U$. يقال عن الدالة f بأنها مستمرة على المجموعة $A\subseteq X$ إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من نقاط A . وبصورة عامة يقال عن الدالة f بأنها مستمرة إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من نقاط X . يقال عن الدالة $f:X\to Y$ بأنها تشاكل تبولوجي (Homeomorphism) إذا كانت الدالة f تقابلية وكل من f,f^{-1} دالة مستمرة ويقال عن الفضائيين X,Y بأنهما متشاكلين تبولوجيا (Homeomorphic) إذا وجد تشاكلا تبولوجيا بينهما ويكتب $X\cong Y$.

مبرهنة(1.4.2)

ليكن كل من (X,d_1) ، (Y,d_2) فضاء متريا . فأن الدالة $f:X\to Y$ تكون مستمرة عند النقطة $x_0\in X$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الأتي :

لكل كرة مفتوحة $\beta_\varepsilon(f(x_0))$ في Y ، توجد كرة مفتوحة $\beta_\delta(x_0)$ في X بحيث أن $f(\beta_\delta(x_0))\subset\beta_\varepsilon(f(x_0))$

وهذا يكافئ الشرط الأتي : لكل $\varepsilon>0$ ، يوجد $\delta>0$ بحيث أن لكل $x\in X$ فان

$$d_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon \ \Leftarrow\ d_1(x,x_0)<\delta$$

البرهان :

نفرض أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0

ليكن $\varepsilon>0$. نضع $U=\beta_\varepsilon(f(x_0))$ $\Leftarrow$ U كرة مفتوحة في Y

$\Leftarrow$ U مجموعة مفتوحة في Y تحتوي على النقطة $f(x_0)$.

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

بما أن f مستمرة عند النقطة x_0 في X $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة V في X تحتوي على النقطة x_0 بحيث أن $f(V)\subseteq U$.

بما أن V مجموعة مفتوحة في X تحتوي على النقطة x_0 $\Leftarrow$ يوجد $\delta>0$ بحيث أن $\beta_\delta(x_0)\subset V$

$\Leftarrow$ $f(\beta_\delta(x_0))\subset f(V)\subset U=\beta_\varepsilon(f(x_0))$

الاتجاه المعاكس

نفرض الشرط في المبرهنة متحقق ونبرهن f مستمرة عند النقطة x_0

ليكن U مجموعة مفتوحة في Y تحتوي على النقطة $f(x_0)$

$\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $\beta_\varepsilon(f(x_0))\subset U$ $\Leftarrow$ توجد كرة مفتوحة $\beta_\delta(x_0)$ في X بحيث أن $f(\beta_\delta(x_0))\subset\beta_\varepsilon(f(x_0))$

نضع $V=\beta_\delta(x_0)$ $\Leftarrow$ V مجموعة مفتوحة في X تحتوي على النقطة x_0 بحيث أن $f(V)=f(\beta_\delta(x_0))\subset\beta_\varepsilon(f(x_0))=U$ وعليه f مستمرة عند النقطة x_0.

مثال(2.4.2)

ليكن $(\mathbb{R},d)$ فضاء متريا اعتياديا .بين أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=x^2$ لكل $x\in\mathbb{R}$ تكون مستمرة.

الحل:

ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ وليكن $\varepsilon>0$

$$|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0^2|=|(x-x_0)(x+x_0)|=|x-x_0||x+x_0|$$

بما أن $|x+x_0|\le|x|+|x_0|$ فان $|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_0|(|x|+|x_0|)\quad\cdots\quad(1)$

بما أن $x=(x-x_0)+x_0$

$\Leftarrow$ $|x|=|(x-x_0)+x_0|$ $\Leftarrow$ $|x|\le|x-x_0|+|x_0|$ $\Leftarrow$ $|x|-|x_0|\le|x-x_0|$ إذا كان $|x-x_0|<1$ فان $|x|-|x_0|<1$ وعليه $\cdots(2)$ $|x|<1+|x_0|$ ، من $(2),(1)$ نحصل على

$$|f(x)-f(x_0)|<|x-x_0|(1+2|x_0|)\quad\cdots\quad(3)$$

نختار $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$. الآن ليكن $x\in\mathbb{R}$ بحيث أن $|x-x_0|<\delta$

$\Leftarrow$ $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$ و $|x-x_0|<1$ $\Leftarrow$ $|x-x_0|(1+2|x_0|)<\varepsilon$

من (3) نحصل على $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 وعلية الدالة f مستمرة.

مثال(3.4.2)

ليكن $(\mathbb{R},d)$ فضاء متريا اعتياديا. برهن على أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x)=\frac{1}{x}$ لكل $x\in\mathbb{R}^+$ تكون مستمرة عند النقطة 2.

الحل :

ليكن $\varepsilon>0$

$$|f(x)-f(2)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-x}{2x}\right|=\frac{|2-x|}{2x} \qquad (\text{لان } x>0)$$

إذا كان $|x-2|<1 \Leftarrow -1<x-2<1 \Leftarrow 1<x<3 \Leftarrow x>1 \Leftarrow \frac{1}{x}<1 \Leftarrow \frac{|2-x|}{2x}<\frac{1}{2}|2-x|$

نختار $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$.

الآن ليكن $x\in\mathbb{R}^+$ بحيث أن $|x-2|<\delta \Leftarrow |x-2|<2\varepsilon$ و $|x-2|<1 \Leftarrow \frac{1}{2}|x-2|<\varepsilon$ ، ومنها نحصل على ان $|f(x)-f(2)|<\frac{1}{2}|2-x|<\varepsilon$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة 2.

مثال(4.4.2)

ليكن $(\mathbb{R},d)$ فضاء متريا اعتياديا. برهن على أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

مستمرة عند جميع نقاط $\mathbb{R}$ ماعدا النقطة 0.

الحل:

سنبرهن أولا في حالة $x>0$. ليكن $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $x_0>0 \Leftarrow f(x_0)=1$

ليكن $\varepsilon>0$. حسب كثافة الأعداد النسبية يوجد $r\in\mathbb{R}$ بحيث أن $0<r<x_0$.

نضع $\delta=x_0-r$

$$\beta_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=(r,2x_0-r)$$

بما أن $r>0$

$$f(\beta_\delta(x_0))=\{1\}$$
$$\beta_\varepsilon(f(x_0))=(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$$

بما أن $1\in(1-\varepsilon,1+\varepsilon) \Leftarrow f(\beta_\delta(x_0)\subseteq\beta_\varepsilon(f(x_0))$

وبالمثل نبرهن في حالة $x<0$ ، (تلميح نضع $\delta=r-x_0$).

وأخيرا نبرهن الدالة غير مستمرة عند النقطة 0 ، نبرهن على أنة يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل $\delta > 0$ فان
$f(\beta_\delta(0)) \not\subset \beta_\varepsilon(f(0))$

نأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad \beta_\varepsilon(f(0)) = (f(0)-\varepsilon, f(0)+\varepsilon) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ليكن $\delta > 0 \quad \Leftarrow \quad \beta_\delta(0) = (-\delta, \delta)$

$$f(\beta_\delta(0)) = f((-\delta,\delta)) = f((-\delta,0)) \cup f(\{0\}) \cup f((0,\delta)) = \{-1,0,1\}$$

بما أن $-1 \notin \beta_\varepsilon(f(0)) \quad \Leftarrow \quad f(\beta_\delta(0)) \not\subset \beta_\varepsilon(f(0)) \quad \Leftarrow \quad f$ غير مستمرة عند النقطة 0.

مبرهنة(5.4.2)

ليكن كل من (X,d_1) ، (Y,d_2) فضاء متريا ولتكن $f: X \to Y$ دالة مستمرة. إذا كان (Z,d_Z) فضاءً جزئيا من الفضاء المتري (X,d_1) فأن f_Z مقصور الدالة f على Z تكون مستمرة .

البرهان :

بما أن الدالة $f_Z: Z \to Y$ هي مقصور الدالة f على $Z \quad \Leftarrow \quad f_Z(x) = f(x)$ لكل $x \in Z$.

لتكن G مجموعة مفتوحة في Y

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow \quad f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow \quad Z \cap f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في Z

بما أن $f_Z^{-1}(G) = Z \cap f^{-1}(G)$ حسب تعريف f_Z

$\Leftarrow$ المجموعة $f_Z^{-1}(G)$ مفتوحة في $Z \quad \Leftarrow \quad f_Z$ مستمرة.

تمارين(4.2)

1. ليكن (X,d) فضاء مترياً وليكن $x_0 \in X$. برهن على ان الدالة $f: X \to \mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x) = d(x,x_0)$ لكل $x \in X$ تكون مستمرة .
2. لتكن A مجوعة مغلقة في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R},d)$. هل توجد دالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث تكون مستمرة على المجموعة A^c وغير مستمرة على المجموعة A.

5.2 الاستمرارية المنتظمة Uniform Continuity

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجي. يقال عن الدالة $f: X \to Y$ بأنها مستمرة بانتظام على X إذا كان لكل مجموعة مفتوحة U في Y تحتوي النقاط $f(x), f(y)$ توجد مجموعة مفتوحة V في X تحتوي نقاط x,y بحيث أن $f(V) \subseteq U$. من الواضح أن كل دالة مستمرة بانتظام تكون مستمرة والعكس غير صحيح دائما.

تعريف(1.5.2)

ليكن كل من (X,d_1) ، (Y,d_2) فضاء متريا. يقال عن الدالة $f: X \to Y$ بأنها مستمرة بانتظام على X إذا تحقق الشرط الأتي : لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث أن لكل $x,y \in X$ فان

$$d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \Leftarrow d_1(x, y) < \delta$$

ويقال عن الدالة $f: X \to Y$ بأنها تشاكل منتظم (Uniform Isomorphism) إذا كانت الدالة f تقابلية وكل من f, f^{-1} دالة مستمرة بانتظام .

مثال(2.5.2)

ليكن $(\mathbb{R}, d)$ فضاء متريا اعتياديا ولتكن الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = 3x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ فأنها مستمرة بانتظام.

مبرهنة(3.5.2)

كل دالة مستمرة بانتظام تكون مستمرة والعكس غير صحيح دائما.

البرهان:

ليكن كل من (X, d_1) ، (Y, d_2) فضاء متريا ، ولتكن الدالة $f: X \to Y$ مستمرة بانتظام . ليكن $x_0 \in X$ ، يجب أن نبرهن على أن الدالة f تكون مستمرة عند النقطة x_0

ليكن $\varepsilon > 0$

بما أن الدالة f مستمرة بانتظام $\Leftarrow$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن لكل $x, y \in X$ فان

$$d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \Leftarrow d_1(x, y) < \delta$$

بما أن $x_0 \in X$ $\Leftarrow$ لكل $x \in X$ فان $d_1(x, x_0) < \delta$ يؤدي إلى $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

$\Leftarrow$ الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 وعليه الدالة f مستمرة لان النقطة x_0 لا على التعين في X

والمثال الأتي سيوضح العكس غير صحيح دائما

مثال(4.5.2)

ليكن $(\mathbb{R}, d)$ فضاء متريا اعتياديا ولتكن الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالصيغة $f(x) = x^2$ لكل $x \in \mathbb{R}$ فأنها مستمرة (راجع المثال (3.4.2)) ولكنها ليست مستمرة بانتظام كما موضح في الأتي :

سوف نبرهن يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث لكل $\delta > 0$ يوجد $x, y \in \mathbb{R}$ وان

$|x - y| < \delta$ يؤدي إلى $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$

ليكن $\delta > 0$ ، باستخدام خاصية ارخميدس يوجد $k \in \mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\frac{1}{k} < \delta$

نضع $x = k, \quad y = k + \frac{1}{k} \Leftarrow |x - y| = \frac{1}{k} < \delta$ ولكن $|f(x) - f(y)| = 2 + \frac{1}{k^2} > 2$

$\Leftarrow$ الدالة f غير مستمرة بانتظام .

تمارين(5.2)

1. لتكن A مجموعة مقيدة في الفضاء المتري الاعتيادي $(\mathbb{R}, d)$ ،ولتكن $f: A \to \mathbb{R}$ مستمرة بصورة منتظمة . برهن على ان الدالة f مقيدة .

3. بديهيات الفصل والعد Separation and Countability Axioms

تدخل بديهية الفصل في تعريف الفضاءات التبولوجية. عمل في هذا المجال عالم الرياضيات الروسي أندريه تيخونوف.

1.3 فضاءات من نوع $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ -Spaces

تعريف(1.1.3)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه يحقق

1. بديهية كولوموكروف (Kolmogorov) إذا كانت x,y نقطتين مختلفتين في X ، فأنه توجد مجموعة مفتوحة في X تحوي احدهما ولا تحوي الأخر.
2. بديهيه فريشيه (Fréchet) إذا كانت x,y نقطتين مختلفتين في X ، فأنه توجد مجموعتان مفتوحتان في X الأولى تحوي على x ولا تحوي على y والثانية تحوي على y ولا تحوي على x.
بعبارة أخرى يوجد $G_x, G_y \in \tau$ بحيث أن $(x \in G_x, y \notin G_x) \wedge (y \in G_y, x \notin G_y)$
3. بديهية هاوزدورف (Hausdorff) إذا كانت x,y نقطتين مختلفتين في X فأنه توجد مجموعتان مفتوحتان متنافيتان احدهما تحوي على x والأخرى تحوي على y .
بعبارة أخرى توجد $G_x, G_y \in \tau$ بحيث أن $G_x \cap G_y = \phi$ وان $x \in G_x,\ y \in G_y$.

تعريف(2.1.3)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه

1. فضاء - T_0 (T_0-Space) إذا حقق بديهيه كولوموكروف
2. فضاء- T_1 (T_1-Space) إذا حقق بديهيه فريشيه .
3. فضاء T_2 (T_2- Spaces) أو فضاء هاوزدورفي (Hausdorff Space) إذا حقق بديهية هاوزدورف.

مثال (3.1.3)

1. ليكن $X=\{a,b\},\quad \tau=\{\phi,\{a\},X\}$. نلاحظ أن X فضاء T_0 لأنة $a \neq b$ وان $G=\{a\}$ مجموعه مفتوحة في X تحوي على a ولا تحوي على b.
2. ليكن $X=\{a,b,b\},\quad \tau=\{\phi,\{b\},X\}$. فأن X ليس فضاء T_0 لأن $a \neq c$ ولكن لا توجد مجموعة مفتوحة G في X تحوي على احدهما ولا تحوي على الأخر.

مثال (4.1.3)

1. كل فضاء تبولوجي متماسك يحوي على أكثر من نقطة فانه ليس فضاء T_0
2. كل فضاء تبولوجي مبعثر يكون فضاء T_0
3. كل فضاء تبولوجي المكل المنتهي يكون فضاء T_0.

لحل:

1. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي متماسك $\Leftarrow$ $\tau=\{\phi,X\}$

لتكن $x,y \in X$ بحيث $x \neq y$ $\Leftarrow$ لا توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث تحوي على احدهما

ولا تحوي على الآخر.

2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر. ولتكن $a,b \in X$ بحيث $a \neq b$ ⇐ نضع $G=\{a\}$ ⇐ G مجموعة مفتوحة في X تحتوي على a ولا تحتوي على b . ⇐ (X,τ) فضاء T_0.

مبرهنة (5.1.3)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي فان العبارات التالية متكافئة

1. (X,τ) فضاء - T_0

2. انغلاقاً كل نقطتين مختلفتين يكون مجموعتين مختلفتين .
بعبارة أخرى إذا كانت $a,b \in X$ بحيث $a \neq b$ فأن $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$.

3. لكل $x \in X$ فان $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة

البرهان :

(1) ⇐ (2)

ليكن $x,y \in X$ بحيث $x \neq y$.

بما أن (X,τ) فضاء - T_0 ⇐ توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي على احدهما ولا تحتوي على الأخرى .

ولتكن G تحتوي على x ولا تحتوي على y , أي أن $x \in G$, $y \notin G$

⇐ G^c مجموعة مغلقة في X بحيث أن $y \in G^c$, $x \notin G^c$

بما أن $\{y\} \subseteq \overline{\{y\}}$ ⇐ $y \in \overline{\{y\}}$

بما أن $\overline{\{y\}}$ تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة في X والتي تحتوي على $\{y\}$ وكذلك $x \notin G^c$ ⇐ $x \notin \overline{\{y\}}$

ولكن $a \in \overline{\{x\}}$ ⇐ $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

(3) ⇐ (2)

ليكن $x \in X$. يحب أن نبرهن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة

ليكن $y \in \{x\}'$

بما أن $x \notin \{x\}'$ ⇐ $y \neq x$

بما أن $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ وعليه $x \notin \overline{\{y\}}$

بما أن $y \in \overline{\{y\}}$ ، $z \in \{x\}'$ و $\overline{\{x\}} = \{x\} \cup \{x\}'$ ⇐ $y \in \overline{\{x\}}$ وعليه $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$

بما أن $y \in \overline{\{y\}} \subseteq \{x\}'$

وعليه فان $\{x\}' = \bigcup\{\overline{\{y\}} : y \in \{x\}'\}$ أي أن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة

(3) ⇐ (1)

ليكن $x,y \in X$ بحيث أن $x \neq y$. هنالك احتمالان أما $y \in \{x\}'$ أو $y \notin \{x\}'$

1. إذا كانت $y \in \{x\}'$

بما أن $\{x\}'$ هي اتحاد مجموعات مغلقة ، فانه توجد مجموعة مغلقة A بحيث أن $y \in A \subseteq \{x\}'$

نضع $G = A^c$ ⇐ G مجموعة مفتوحة تحتوي على x ولا تحتوي على y

2. . إذا كانت $y \notin \{x\}'$ فانه $y \notin \overline{\{x\}}$

نضع $G = (\overline{\{x\}})^c \Leftarrow G$ مجموعة مفتوحة تحتوي على y ولا تحتوي على x

في كلتا الحالتين (X,τ) فضاء - T_0.

مثال (6.1.3)

1. لتكن $X = \{a,b,c\}, \quad \tau = \{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\}$

نلاحظ أن X فضاء T_1 لأنة $a,b \in X$ وان $a \neq b$. نأخذ $G_a = \{a\}, \quad G_b = \{b\} \quad \Leftarrow \quad G_a, G_b \in \tau$

وان $(a \in G_a, \quad b \notin G_a) \wedge (a \notin G_b, \quad b \in G_b)$

2. ليكن $X = \{a,b,c\}, \quad \tau = \{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$ ، نلاحظ أن

X ليس فضاء T_1 لأن $a,b \in X$ وان $a \neq b$. ولا يمكن إيجاد $G_b \in \tau_2$ بحيث $a \notin G_b, b \in G_b$

مثال (7.1.3)

برهن على أن الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ يكون فضاء- T_1

الحل :

ليكن $x,y \in \mathbb{R}$ بحيث $x \neq y$. نفرض $x < y \Rightarrow k = y - x > 0$

$\Leftarrow$ كل من $G_x = (x - \frac{k}{4}, x + \frac{k}{4}), \quad G_y = (y - \frac{k}{4}, y + \frac{k}{4})$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ وأن

$(x \in G_x, y \notin G_x) \wedge (x \notin G_y, y \in G_y) \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء T_1

مثال (8.1.3)

الفضاء التبولوجي المكمل المنتهي $(\mathbb{R},\tau)$ يكون فضاء- T_1 حيث $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية

الحل:

ليكن $a,b \in \mathbb{R}$ بحيث $a \neq b$. نضع $G_a = \mathbb{R} | \{b\}, \quad G_b = \mathbb{R} | \{a\}$

$\Leftarrow (a \in G_a, b \notin G_a) \wedge (a \notin G_b, b \in G_b)$

بما أن كل من $\{a\},\{b\}$ مجموعة منتهية في $\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ كل من G_a, G_b مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{R},\tau)$ فضاء- T_1

مبرهنة (9.1.3)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي فان العبارات التالية متكافئة

1. (X,τ) فضاء - T_1
2. لكل $x \in X$ فان $\{x\}$ مجموعة مغلقة
3. لكل $x \in X$ فان $\{x\}' = \phi$

البرهان :

$(1) \Rightarrow (2)$

لتكن $x \in X$. يجب أن نبرهن على أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

ليكن $y \in \{x\}^c \Leftarrow y \neq x$

بما أن (X,τ) فضاء- T_1 $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G_y في X بحيث آن $y \in G_y, x \notin G_y$

$\Leftarrow y \in G_y \subseteq \{x\}^c \Leftarrow y \in \text{int}(\{x\}^c) \Leftarrow \{x\}^c$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow \{x\}$ مجموعة مغلقة في X

$(2) \Leftarrow (3)$

لتكن $x \in X$. يجب أن نبرهن على أن $\{x\}' = \phi$

من (2) نحصل على $\{x\}$ مجموعة مغلقة $\Leftarrow \overline{\{x\}} = \{x\}$

بما أن $\overline{\{x\}} = \{x\} \cup \{x\}' \Leftarrow \{x\} = \{x\} \cup \{x\}'$

بما أن $x \notin \{x\}' \Leftarrow \{x\}' = \phi$

$(3) \Leftarrow (1)$

ليكن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$

من (3) نحصل على $\{x\}' = \phi$ وهذا يؤدي إلى $y \notin \{x\}'$ ، أي يوجد مجموعة مفتوحة G_y في X تحتوى على y بحيث أن $G_y \cap \{x\} = \phi \Leftarrow x \notin G_y$

وبالمثل $\{y\}' = \phi$ وهذا يؤدي إلى $x \notin \{y\}'$ ، أي يوجد مجموعة مفتوحة G_x في X تحتوى على x بحيث أن $G_x \cap \{y\} = \phi \Leftarrow y \notin G_x$. وبالتالي فان (X,τ) فضاء T_1.

نتيجة (10.1.3)

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون فضاء T_1 إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية منتهية فيه مغلقة

مثال(11.1.3)

كل فضاء T_1 ومنتهي يكون مبعثر

الحل :

ليكن X مجموعة منتهية وليكن (X,τ) فضاء T_1. يجب ان نبرهن على أن (X,τ) مبعثر.

لتكن $A \subseteq X \Leftarrow A^c \subseteq X \Leftarrow A^c$ مجموعة منتهية لأن X مجموعة منتهية

بما أن (X,τ) فضاء- T_1 $\Leftarrow A^c$ مجموعة مغلقة في X

$\Leftarrow A$ مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow A \in \tau$ وعليه (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر

مثال (12.1.3)

برهن على أن الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون فضاء T_1 إذا وفقط إذا كان τ يحتوي على التبولوجي المكمل المنتهي τ_* على X

الحل :

نفرض (X,τ) فضاء- T_1 ولتكن $A \in \tau_* \Leftarrow A^c$ مجموعة منتهية في X

بما أن (X,τ) فضاء $T_1 \Leftarrow A^c$ مجموعة مغلقة في $X \Leftarrow A$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow A \in \tau \Leftarrow \tau_* \subseteq \tau$

الاتجاه الآخر. نفرض $\tau_* \subset \tau$ ، لتكن A مجموعة منتهية في X $\Leftarrow A^c \in \tau_* \Leftarrow A^c \in \tau$

وعليه A^c مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow (X,\tau)$ فضاء- T_1

مبرهنة (13.1.3)

ليكن (X,τ) فضاء T_1 ولتكن $A \subseteq X$

1. $x \in A'$ إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مفتوحة G في X حاوية على x تحتوي على عدد غير منتهي من نقاط A
2. إذا كانت A منتهية فأن $A' = \phi$

البرهان :

1. نفرض $x \in A'$، لتكن G مجموعة مفتوحة في X بحيث ان $x \in G$

يجب أن نبرهن على ان $G \bigcap A$ يحتوي على عدد غير منتهي من النقاط

سنبرهن بطريقة التناقض . نفرض $G \bigcap A$ يحتوي على عدد منتهي من النقاط

لتكن $G \cap (A \mid \{x\}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ، بما أن (X,τ) فضاء T_1 , المجموعة $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ منتهية

$\Leftarrow$ $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ $H = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}^c$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ H مجموعة مفتوحة في X ، $x \in H$ ، $H \cap (G \mid \{x\}) = \phi$

$\Leftarrow$ $x \notin A'$ وهذا تناقض وعليه $G \cap A$ يحتوي على عدد غير منتهي من النقاط

الاتجاه الآخر. واضح (ينسخ من تعريف A' مباشرة)

2. بما أن A مجموعة منتهية . نفرض $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

بما أن (X,τ) فضاء T_1 $\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ $A' \subseteq A$

وكذلك المجموعة $B = \{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ أيضا منتهية وعليه B مجموعة مغلقة

$\Leftarrow$ B^c مجموعة مفتوحة في X، $a_1 \in B^c$ ، بما أن $B^c \cap (A \mid \{a_1\}) = \phi$ $\Leftarrow$ $a_1 \notin A'$

وبالمثل نبرهن أي نقطة أخرى من نقاط A لا تنتمي إلى A' $\Leftarrow$ $A' = \phi$

مثال (14.1.3)

ليكن (X,τ) فضاء T_1 ولتكن $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x وليكن $y \in X$ بحيث أن $y \neq x$ فأن يوجد على الأقل $V \in \beta(x)$ بحيث أن $y \notin V$

البرهان :

بما أن (X,τ) فضاء T_1 بحيث $x \neq y$

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث ان $x \in G, y \notin G$

حسب تعريف القاعدة المحلية ، يوجد $V \in \beta(x)$ بحيث أن $x \in V \subseteq G$ ،

بما أن $y \notin G$ $\Leftarrow$ $y \notin V$.

مثال (15.1.3)

كل فضاء تبولوجي مبعثر يكون فضاء T_2

الحل :

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر .

لتكن $a,b \in X$ بحيث آن $a \neq b$

نضع $G_a=\{a\}, G_b=\{b\} \Leftarrow G_a \cap G_b = \phi$ وان $G_a , G_b \in \tau$ ، $a \in G_a , b \in G_b$

$\Leftarrow$ (X,τ) فضاء T_2

مثال (16.1.3)

برهن على أن الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ يكون فضاء T_2

الحل :

ليكن $x,y \in \mathbb{R}$ بحيث أن $x \neq y \Leftarrow x-y \neq 0 \Leftarrow |x-y| \neq 0$

نضع $\varepsilon = \frac{1}{3}|x-y|$. لتكن $G_x=(x-\varepsilon,x+\varepsilon), G_y=(y-\varepsilon,x+\varepsilon)$

$\Leftarrow$ $x \in G_x , y \in G_y$ ، $G_x,G_y \in \tau_u$ و $G_x \cap G_y = \phi$

$\Leftarrow$ $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء T_2

مثال (17.1.3)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مكمل المنتهى حيث X تحتوي على الأقل عنصرين . برهن على انه يكون فضاء T_2 إذا وفقط إذا كانت X مجموعة منتهية

الحل :

نفرض (X,τ) فضاء T_2

ليكن $a,b \in X$ بحيث أن $a \neq b$

بما أن (X,τ) فضاء T_2 $\Leftarrow$ يوجد $G_a,G_b \in \tau$ بحيث أن $G_a \cap G_b = \phi$

بما أن $G_a \cap G_b = \phi \Leftarrow (G_a \cap G_b)^c = \phi^c \Leftarrow G_a^{\ c} \cup G_b^{\ c} = X$

بما أن $G_a , \ G_b \in \tau \Leftarrow$ كل من $G_b^{\ c}, G_a^{\ c}$ مجموعة منتهية وعليه X مجموعة منتهية

الاتجاه الآخر. نفرض X مجموعة منتهية

بما أن (X,τ) فضاء تبولوجي مكمل المنتهى

$\Leftarrow$ (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر

$\Leftarrow$ (X,τ) فضاء T_2

مثال (18.1.3)

كل فضاء T_2 ومنتهي يكون مبعثر

الحل :

ليكن (X,τ) فضاء T_2 بحيث X مجموعة منتهية

يجب أن نبرهن على (X,τ) مبعثر

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

بما أن (X,τ) فضاء T_2 $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء T_1 وعليه (X,τ) فضاء مبعثر

مثال (19.1.3)

ليكن كل من $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ فضاء تبولوجي . ولتكن كل من $g: X \to Y, f: X \to Y$ دالة مستمرة.
إذا كان (Y,τ_2) فضاء T_2 فان المجموع $A=\{x \in X : f(x)=g(x)\}$ تكون مغلقة

الحل :

ليكن $x \in A^c \Leftarrow x \notin A \Leftarrow f(x) \neq g(x)$

بما أن $g(x) \in Y$,$f(x)$, (Y,τ_2) فضاء T_2

$\Leftarrow$ توجد $G,H \in \tau_2$ بحيث أن $f(x) \in G, g(x) \in H$ وان $G \cap H = \phi$

بما أن كل من f,g دالة مستمرة $g^{-1}(H) \in \tau_1$ وان $f^{-1}(G)$, $x \in g^{-1}(H)$, $x \in f^{-1}(H)$,

$\Leftarrow$ $x \in f^{-1}(G) \cap g^{-1}(H) \in \tau$

نضع $B = f^{-1}(G) \cap g^{-1}(H)$. يجب أن نبرهن على ان $B \subset A^c$ ، أي نبرهن $B \cap A = \phi$.

نفرض $B \cap A \neq \phi$ $\Leftarrow$ يوجد على الأقل عنصر واحد ينتمي إلى $B \cap A$ وليكن a مثلا

$\Leftarrow$ $a \in B, a \in A$ $\Leftarrow$ $a \in A$, $a \in f^{-1}(G)$, $a \in g^{-1}(H)$

$\Leftarrow$ $a \in A$, $f(a) \in G$, $g(a) \in H$

$\Leftarrow$ $f(a)=g(a)$, $f(a) \in G$, $g(a) \in H$ $\Leftarrow$ $f(a)=g(a) \in G \cap H$

$\Leftarrow$ $G \cap H \neq \phi$ وهذا تناقض $\Leftarrow$ $x \in B \subseteq A^c$ $\Leftarrow$ A^c مجموعة مفتوحة

وعليه A مجموعة مغلقة

مبرهنة (20.1.3)

كل فضاء متري يكون فضاء T_2

البرهان :

ليكن (X,d) فضاء متريا

ليكن $x,y \in X$ بحيث أن $x \neq y$ $\Leftarrow$ $d(x,y)=r>0$ $\Leftarrow$ $\beta_{\frac{r}{2}}(y)$, $\beta_{\frac{r}{2}}(x)$ مجموعتان مفتوحتان في X

بحيث أن $y \in \beta_{\frac{r}{2}}(y)$, $x \in \beta_{\frac{r}{2}}(x)$ و $\beta_{\frac{r}{2}}(x) \cap \beta_{\frac{r}{2}}(y) = \phi$ فان (X,d) فضاء T_2

مبرهنة (21.1.3)

كل فضاء T_{i+1} يكون T_i لكل $i=0,1$ والعكس غير صحيح .

البرهان :

1. عندما $i=0$. يجب أن نبرهن كل فضاء T_1 يكون T_0 والعكس غير صحيح .

نفرض (X,τ) فضاء T_1. ليكن $a,b \in X$ بحيث $a \neq b$

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث ان $a \in G, b \notin G$ $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء- T_0

والمثال التالي يوضح العكس غير صحيح دائماً

ليكن $\tau=\{\phi,\{a\},X\}$ ، $X=\{a,b\}$ فان (X,τ) فضاء T_0 ولكن ليس فضاء T_1

لان $a,b\in X$ ، $a\neq b$ ولكن لا توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث أن $a\notin G, b\in G$

2. عندما $i=1$. يجب أن نبرهن كل فضاء T_2 يكون T_1 والعكس غير صحيح .

نفرض (X,τ) فضاء T_2

ليكن $a,b\in X$ بحيث أن $a\neq b$

$\Leftarrow$ توجد $G_a,G_b\in\tau$ بحيث أن $b\in G_b, a\in G_a$ ، $G_a\cap G_b=\phi$

$\Leftarrow$ $G_a,G_b\in\tau$ ، $(b\notin G_a,\ a\in G_a)$ ، $(a\notin G_b,\ b\in G_b)$

$\Leftarrow$ (X,τ) فضاء T_1

والمثال التالي يوضح العكس غير صحيح دائما

إذا كانت $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية فان الفضاء التبولوجي المكمل المنتهي $(\mathbb{R},\tau)$ يكون فضاء T_1 وليس فضاء T_2 لان $\mathbb{R}$ مجموعة غير منتهية

مبرهنة (22.1.3)

صفة كل من T_i لكل $i=0,1,2$ صفة وراثية .

البرهان :

1. عندما $i=0$

ليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئيا من الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث (X,τ) فضاء- T_0.

يجب أن نبرهن (Y,τ_Y) فضاء- T_0.

ليكن $a,b\in Y$ بحيث أن $a\neq b$

بما أن $Y\subseteq X$ $\Leftarrow$ $a,b\in X$

بما أن (X,τ) فضاء- T_0 $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X تحتوي على احدهما ولا تحتوي على الأخرى .

نفرض مثلا $b\notin G, a\in G$

بما أن (Y,τ_Y) فضاءَ جزئياً من (X,τ) $\Leftarrow$ $H=G\cap Y$ مجموعة مفتوحة في Y

بما أن $a\in G$, $a\in Y$ $\Leftarrow$ $a\in H$ ، وكذلك بما أن $b\notin G$ $\Leftarrow$ $b\notin H$

$\Leftarrow$ H مجموعة مفتوحة في Y تحتوي على a ولا تحتوي على b $\Leftarrow$ (Y,τ_Y) فضاء- T_0

2. عندما $i=1$

ليكن (X,τ) فضاء T_1 و ليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئي من (X,τ).

يجب أن نبرهن (Y,τ_Y) فضاء T_1. ليكن $a\in Y$

بما أن $Y\subseteq X \Leftarrow a\in X$ وكذلك بما أن (X,τ) فضاء T_1 $\Leftarrow$ $\{a\}$ مجموعة مغلقة في X

$\Leftarrow$ $\{a\}\cap Y$ مجموعة مغلقة في Y

ولكن $\{a\}\cap Y=\{a\}$ لان $a\in Y$ $\Leftarrow$ $\{a\}$ مجموعة مغلقة في Y $\Leftarrow$ (Y,τ_Y) فضاء- T_1

3. عندما $i=2$

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

ليكن (X,τ) فضاء T_2 و ليكن (Y,τ_Y) فضاء جزئي من (X,τ). يجب أن نبرهن (Y,τ_Y) فضاء T_2.

ليكن $a,b \in Y$ بحيث أن $a \neq b$

بما أن $Y \subset X \Leftarrow a,b \in X$

بما أن (X,τ) فضاء T_2 $\Leftarrow$ توجد $G_a,G_b \in \tau$ بحيث أن $b \in G_b, a \in G_a$, $G_a \cap G_b = \phi$

نضع $H_a = G_a \cap Y,\quad H_b = G_b \cap Y$

$\Leftarrow$ $H_a,H_b \in \tau$ وان $a \in H_a, b \in H_b$ و $H_a \cap H_b = \phi$

$\Leftarrow (Y,\tau_Y)$ فضاء T_2

مبرهنة (23.1.3)

صفة كل من T_i لكل $i = 0,1,2$ صفة تبولوجية.

البرهان :

1. عندما $i = 0$

ليكن كل من $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ فضاء تبولوجيا بحيث أن $X \cong Y$. يجب ان نبرهن على ان (X,τ_1) يكون فضاء-T_0 إذا وفقط إذا كان (Y,τ_2) فضاء- T_0.

بما ان $X \cong Y$ $\Leftarrow$ توجد تشاكل تبولوجي $f : X \to Y$

نفرض (X,τ_1) فضاء- T_0. لتكن $y_1,y_2 \in Y$ بحيث ان $y_1 \neq y_2$

بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow$ يوجد $x_1,x_2 \in X$ بحيث ان $f(x_2) = y_2, f(x_1) = y_1$

بما أن $y_1 \neq y_2$ $\Leftarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$ وعليه $x_1 \neq x_2$ (حسب تعريف الدالة)

بما أن (X,τ_1) فضاء T_0 $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث تحتوي على احدهما ولا تحتوي على الأخرى .

نفرض $x_1 \in G$, $x_2 \notin G$

بما أن الدالة f مفتوحة $\Leftarrow$ $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y

بما أن $x_1 \in G$ $\Leftarrow$ $f(x_1) \in f(G)$ $\Leftarrow$ $y_1 \in f(G)$

بما أن $x_2 \notin G$, الدالة f متباينة $\Leftarrow$ $f(x_2) \notin f(G)$ $\Leftarrow$ $y_2 \notin f(G)$

$\Leftarrow$ $f(G)$ مجموعة مفتوحة في Y تحتوي على y_1 ولا تحتوي على y_2 $\Leftarrow$ (Y,τ_2) فضاء- T_0.

الاتجاه الأخر : نفرض (Y,τ_2) فضاء - T_0

لتكن $x_1,x_2 \in X$ بحيث أن $x_1 \neq x_2$

بما أن الدالة f متباينة $\Leftarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$

بما ان (Y,τ_2) فضاء - T_0 $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G في Y بحيث تحتوي على احدهما ولا تحتوي على الأخرى .

نفرض $f(x_1) \in G$, $f(x_2) \notin G$

بما أن $f(x_1) \in G$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(f(x_1)) \in f^{-1}(G)$ $\Leftarrow$ $x_1 \in f^{-1}(G)$ (لان f متباينة)

بما أن $f(x_2) \notin G \Leftarrow$ $f^{-1}(f(x_2)) \notin f^{-1}(G)$ $\Leftarrow$ $x_2 \notin f^{-1}(G)$

بما أن الدالة f مستمرة ، G مجموعة مفتوحة في Y $\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X
$\Leftarrow$ $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X تحتوي على x_1 ولا تحتوي على x_2
$\Leftarrow$ (X,τ_1) فضاء- T_0.

2. عندما $i=1$
ليكن كل من (X,τ_1)، (Y,τ_2) فضاء تبولوجيا بحيث أن $X \cong Y$. يجب أن نبرهن على أن (X,τ_1) يكون فضاء- T_1 إذا وفقط إذا كان (Y,τ_2) فضاء- T_1.
بما أن $X \cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f:X\to Y$
نفرض (X,τ_1) فضاء T_1. لتكن $y\in Y$ ، بما أن الدالة f شاملة
$\Leftarrow$ يوجد $x\in X$ بحيث أن $f(x)=y$
بما أن (X,τ_1) فضاء T_1 $\Leftarrow$ $\{x\}$ مجموعة مغلقة في X ،
بما أن الدالة f مغلقة $\Leftarrow$ $f(\{x\})$ مجموعة مغلقة في Y
ولكن $f(\{x\})=\{y\}$ $\Leftarrow$ $\{y\}$ مجموعة مغلقة في Y $\Leftarrow$ (Y,τ_2) فضاء- T_1
الاتجاه الأخر. نفرض (Y,τ_2) فضاء- T_1 ، ليكن $x\in X \Leftarrow y=f(x)\in Y$
بما أن (Y,τ_2) فضاء - T_1 $\Leftarrow$ $\{y\}$ مجموعة مغلقة في Y
بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(\{y\})$ مجموعة مغلقة في X ، ولكن $f^{-1}(\{y\})=\{x\}$ لأن الدالة f متباينة
$\Leftarrow$ $\{x\}$ مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء T_1

3. عندما $i=2$
ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) ، فضاء تبولوجيا بحيث أن $X\cong Y$
يجب أن نبرهن على أن (X,τ_1) يكون فضاء T_2 إذا وفقط إذا كان (Y,τ_2) فضاء T_2.
بما أن $X\cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f:X\to Y$
نفرض (X,τ_1) فضاء T_2 . لتكن $y_1,y_2\in Y$ بحيث أن $y_1\neq y_2$
بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow$ يوجد $x_1,x_2\in X$ بحيث أن $f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2$
بما أن $y_1\neq y_2$ $\Leftarrow$ $f(x_1)\neq f(x_2)$.
بما أن الدالة f متباينة $\Leftarrow$ $x_1\neq x_2$
بما أن (X,τ_1) فضاء T_2 $\Leftarrow$ توجد $G_{x_1},G_{x_2}\in\tau_1$ بحيث أن

$$G_{x_1}\cap G_{x_2}=\phi,\quad x_1\in G_{x_1}, x_2\in G_{x_2}$$

بما أن الدالة f مفتوحة $\Leftarrow$ $f(G_{x_1}),\ f(G_{x_2})\in\tau_2$
$\Leftarrow$ $y_1\in f(G_{x_1}),\quad y_2\in f(G_{x_2})$
نضع $H_{y_1}=f(G_{x_1}),\quad H_{y_1}=f(G_{x_1})$ $\Leftarrow$ $H_{y_1},H_{y_1}\in\tau_2$
$\Leftarrow$ $H_{y_1},H_{y_1}\in\tau_2$ وان $y_1\in H_{y_1},\ y_2\in H_{y_2}$

وكذلك $H_{y_1} \cap H_{y_2} = f(G_{x_1}) \cap f(G_{x_2}) = f(G_{x_1} \cap G_{x_2}) = \phi$

$\Leftarrow$ (Y,τ_2) فضاء T_2

وبالمثل نبرهن الاتجاه الأخر.

تمارين (1.3)

1. ليكن $\tau = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$, $X = \{a,b,c\}$ هل أن (X,τ) فضاء T_0 ؟ مع البرهان
2. ليكن $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b,c\}, X\}$, $X = \{a,b,c\}$ هل أن (X,τ) فضاء T_0 ؟ مع البرهان
3. برهن على كل فضاء تبولوجي مكمل منتهي يكون فضاء T_0 .
4. ليكن كل من τ_1, τ_2 تبولوجي على المجموعة غير الخالية X بحيث أن $\tau_1 \subseteq \tau_2$. برهن على أن
   ا. إذا كان (X,τ_1) فضاء T_0 فان (X,τ_2) فضاء T_0.
   ب. إذا كان (X,τ_1) فضاء T_1 فان (X,τ_2) فضاء T_1.
   ج. إذا كان (X,τ_1) فضاء T_2 فان (X,τ_2) فضاء T_2.
5. لتكن X مجموعة غير خالية وليكن $\tau_p = \{\phi\} \cup \{A \subseteq X : p \in A\}$ برهن على أن (X,τ_p) فضاء T_0 .
6. ليكن $\tau = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ برهن على أن $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء T_0 .
7. برهن على أن كل مجموعة X يوجد اصغر تبولوجي وحيد τ على X بحيث أن (X,τ) فضاء T_1.
8. برهن على أن كل تبولوجي انعم من تبولوجي T_1 على أي مجموعة X يكون تبولوجي T_1 .
9. الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون فضاء T_2 إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ فان $\{x\} = \bigcap\{A : A \in N_x\}$ حيث N_x تمثل عائلة جميع الجوارات للنقطة x
10. الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون فضاء T_2 إذا وفقط إذا كان لكل $x,y \in X$ حيث $x \neq y$ توجد $A \in \tau$ بحيث أن $x \in A$ ، $y \notin \overline{A}$.

2.3 فضاءات من نوع T_3,T_4 - Spaces T_3,T_4

تعريف(1.2.2)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه فضاء منتظم (Regular) إذا حقق بديهية فياتورس(Vietoris) الاتية :

إذا كانت A مجموعة مغلقة في X وكانت x نقطة في X لا تنتمي إلى A ،فأنه توجد مجموعتان مفتوحتان متنافيتان احدهما تحتوي على A والأخرى تحوي على x .

بعبارة أخرى توجد $G_A,G_x\in\tau$ بحيث أن $G_A\cap G_x=\phi$ وان $x\in G_x, A\subseteq G_A$.

ويقال عن (X,τ) بأنه فضاء T_3 (T_3- Spaces) إذا كان (X,τ) منتظم و T_1.

مثال (2.2.3)

ليكن $X=\{a,b,c\}, \tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\}X\}$. برهن على أن (X,τ) منتظم وليس T_3.

الحل

المجموعات المغلقة في X هي $X,\{b,c\},\{a\},\phi$

1.إذا كانت $A=\{a,b\}$ و $x=a$

نضع $G_a=\{a\}, G_A=\{b,c\}$ $\Leftarrow$ $G_a,G_A\in\tau$ وان $G_a\cap G_A=\phi$ وكذلك $a\in G_a, A\subseteq G_A$

2. إذا كانت $A=\{a\}$

(أ) $x=b$

نضع $G_b=\{b,c\}, G_A=\{a\}$ $\Leftarrow$ $G_b,G_A\in\tau$ وان $G_b\cap G_A=\phi$ وكذلك $b\in G_b, A\subseteq G_A$

(ب) $x=c$

نضع $G_c=\{b,c\}, G_A=\{a\}$ $\Leftarrow$ $G_c,G_A\in\tau$ وان $G_c\cap G_A=\phi$ وكذلك $c\in G_c, A\subseteq G_A$

$\Leftarrow$ (X,τ)فضاء منتظم.

بما أن $\{b\}$ ليست مغلقة في X $\Leftarrow$ (X,τ) ليس فضاء T_1 وعلية (X,τ) ليس فضاء T_3.

ملاحظة

أن المثال أعلاه بين الفضاء المنتظم ليس بالضرورة أن يكون فضاء هاوزدورفي.

مثال (3.2.3)

برهن على أن الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ يكون فضاء T_3

الحل :

ليكن A مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}$ وليكن $x\in\mathbb{R}$ بحيث أن $x\notin A$ بما أن $\overline{A}=A$ $\Leftarrow$ $x\in A$

يوجد $\varepsilon>0$ بحيث أن $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\phi$.

نضع $G_x=(x-\frac{\varepsilon}{4},x+\varepsilon), G_A=\cup\{(y-\frac{\varepsilon}{4},y+\frac{\varepsilon}{4}):y\in A\}$

$\Leftarrow$ $x\in G_x, A\subseteq G_A$ ،

بما أن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجي اعتيادي$\Leftarrow$ $G_x,G_A\in\tau_u$

بقي أن نبرهن على أن $G_x \cap G_A = \phi$

سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض $G_x \cap G_A \neq \phi$ يوجد $z \in G_x \cap G_A = \phi \Leftarrow z \in G_x \wedge z \in G_A$

$z \in (x-\frac{\varepsilon}{4}, x+\frac{\varepsilon}{4}) \wedge z \in (y_0-\frac{\varepsilon}{4}, y_0+\frac{\varepsilon}{4})$ لبعض $y_0 \in A$

$\Leftarrow |z-x| < \frac{\varepsilon}{4} \wedge |z-y_0| < \frac{\varepsilon}{4}$

$$|x-y_0| = |(x-z)+(z-y_0)| \leq |x-z| + |z-y_0| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

$\Leftarrow y_0 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ وهذا تناقض لان $y_0 \in A$ وعلية $(\mathbb{R}, \tau_u)$ فضاء منتظم ،

وبما أن $(\mathbb{R}, \tau_u)$ فضاء $T_1 \Leftarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ فضاء T_3

مثال (4.2.3)

كل فضاء تبولوجي مبعثر يكون فضاء T_3

الحل :

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر .

لتكن A مجموعة مغلقة في X وليكن $x \in X$ بحيث أن $x \notin A$

نضع $G_x = \{x\}, G_A = A \Leftarrow G_x \cap G_A = \phi$

بما أن (X,τ) مبعثر $G_x, \in G_A \in \tau$

$\Leftarrow (X,\tau)$ منتظم . وبما أن (X,τ) فضاء $T_1 \Leftarrow (X,\tau)$ فضاء T_3

مثال (5.2.3)

لتكن $\mathbb{N}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية وليكن $\tau = \{\phi\} \cup \{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ ب حيث $A_m \{m.m+1, m+2, \cdots\}$

لكل $m \in \mathbb{N}$ (راجع المثال 15.1.1). هل أن (N,τ) فضاء منتظم ؟.

الحل :

ليكن $A = \{0,1,2\}$ ولتكن $x = 6 \Leftarrow x \notin A$

$\Leftarrow A^C = \{3,4,5,\ldots\}$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{N} \Leftarrow A$ مجموعة مغلقة في $\mathbb{N}$ وان $x \notin A$

$A_0 = \mathbb{N}$ هي المجموعة المفتوحة الوحيدة في $\mathbb{N}$ وتحتوي على A

وبما ان A_m حيث $m = 0,1,2,3,4,5,6$ وتحتوي على 6

ولذلك A_m لكل $m = 0,1,2,3,4,5,6$ لا توجد مجموعتين مفتوحتين منفصلتين G_x, G_y

بحيث ان $x \in G_x, A \subseteq G_A \Leftarrow (\mathbb{N},\tau)$ فضاء غير منتظم.

مبرهنة (6.2.3)

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون منتظم إذا وفقط إذا كان لكل $x \in X$ ولكل جوار V إلى x يوجد جوار u إلى x بحيث إن $\bar{u} \subset V$. بعبارة أخرى (X,τ) يكون منتظم إذا وفقط إذا كانت عائلة الجوارات المغلقة الى النقطة x. تشكل قاعدة محلية عند النقطة x.

البرهان :

نفرض (X,τ) فضاء منتظم

ليكن V جوار إلى النقطة x $\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة A في X بحيث ان $x \in A \subset V$

بما أن A^C مغلقة في X وان $x \notin A^C$ ، باستخدام تعريف الفضاء المنتظم

يوجد $G_x, G_A \in \tau$ بحيث أن $G_x \cap G_{A^C} = \phi$ ، $x \in G_x, A^C \subseteq G_{A^C}$

$\Leftarrow$ $G_x \subset G^C_{A^C}$ $\Leftarrow$ $\bar{G}_x \subset (\overline{G^C_{A^C}}) = G^C_{A^C}$

وكذلك $A^C \subset G_{A^C}$ $\Leftarrow$ $G^C_{A^C} \subset A \subset V$

نضع $u = G^C_{A^C}$ $\Leftarrow$ $u \subset V$

الاتجاه الأخر : نفرض الشرط في المبرهنة متحقق ونبرهن (X,τ) فضاء منتظم.

لتكن B مجموعة مغلقة في X ولتكن $x \in X$ بحيث ان $x \notin B$ $\Leftarrow$ $x \in B^C$

بما أن B^C مجموعة مفتوحة في X وتحتوي على x $\Leftarrow$ توجد مجموعة جوار u الى x بحيث ان $\bar{u} \subset B^C \Leftarrow$

توجد مجموعة مفتوحة G في X بحيث ان $x \in G \subset u$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $\bar{G} \subset \bar{u}$ $\bar{G} \subset B^C$ $\Leftarrow$ $BC(\bar{G})^C$ وعليه $(\bar{G})^C$ مجموعة مفتوحة في X تحتوي على B.

كذلك $G \cap G^C = \phi$ يؤدي إلى $G \cap (\bar{G})^C = \phi$ $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء منتظم.

ملاحظة

يمكن صياغة المبرهنة أعلاه بالشكل الأتي :-

(X,τ) يكون منتظم إذا وفقط إذا كان كل جوار مفتوح إلى $x \in X$ يحتوي على انغلاق جوار مفتوح أخر إلى x.

مبرهنة (7.2.3)

كل فضاء T_3 يكون فضاء T_2 والعكس غير صحيح دائماً.

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء T_3 $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء منتظم و فضاء T_1.

يجب أن نبرهن على (X,τ) فضاء T_2

ليكن $x, y \in X$ بحيث أن $x \neq y$.

بما أن (X,τ) فضاء T_1 $\Leftarrow$ $A = \{y\}$ مجموعة مغلقة في X.

بما أن $x \neq y$ $\Leftarrow$ $x \in A$

بما أن (X,τ) منتظم $\Leftarrow$ يوجد $G_x, G_A \in \tau$ بحيث أن $x \in G_x, A \subset G_A, G_x \cap G_A = \phi$

$\Leftarrow$ $G_x, G_A \in \tau$ وان $x \in G_x, y \in G_A, G_x \cap G_A = \phi$ $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء T_2.

والمثال الأتي يوضح العكس غير صحيح دائما

لتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية τ معرفا على $\mathbb{R}$ كالأتي $A \in \tau$ إذا وفقط أذا كانت $A = \bigcup \{u_n(p) : n \in N\}$ حيث $N, u_n(p) = \{p + kn : k \in N\}$ تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية ان $(\Re, \tau)$ فضاء T_2 ولكن غير منتظم.

مبرهنة (8.2.3)

صفة الانتظام صفة وراثية.

البرهان :

ليكن (Y, τ_y) فضاء جزئياً من الفضاء التبولوجي المنتظم (X, τ).

يجب أن نبرهن (Y, τ_y) فضاء منتظم.

لتكن B مجموعة مغلقة في Y وليكن $y \in Y$ بحيث $y \notin B$

$\Leftarrow$ $B = A \bigcap Y$ حيث A مجموعة مغلقة في X

بما أن $y \notin B$ $\Leftarrow$ $y \notin A \bigcap Y$

بما أن $y \in Y$ $\Leftarrow$ $y \notin A$.

بما إن (X, τ) فضاء منتظم $\Leftarrow$ يوجد $G_y, G_A \in \tau$ بحيث ان $y \in G_y, A \subseteq G_y, G_x \bigcap G_A = \phi$

نضع $H_y = G_y \bigcap Y, H_B = G_A \bigcap Y$

$\Leftarrow$ $H_y, H_B \in \tau_Y$ وان $y \in H_y, B \subset H_B$

$$H_y \bigcap H_B = (G_y \bigcap Y) \bigcap (G_A \bigcap Y) = (G_y \bigcap G_A) \bigcap Y = \phi \bigcap Y = \phi$$

$\Leftarrow$ (Y, τ_Y) فضاء منتظم..

نتيجة (9.2.3)

صفة T_3 صفة ورائية

مبرهنة (10.2.3)

صفة الانتظام صفة تبولوجية .

البرهان :

ليكن كل من $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ فضاء تبولوجيا بحيث أن $X \approx Y$ بحيث أن نبرهن على أن (X, τ_1) فضاء منتظم إذا وفقط إذا كان (Y, τ_2) فضاء منتظم.

بما أن $X \approx Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشكل تبولوجي $f : X \to Y$.

نفرض (X, τ_1) فضاء منتظم. لتكن B مجموعة مغلقة في Y وليكن $y \in Y$ بحيث أن $y \notin B$.

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(B)$ مجموعة مغلقة في X

بما أن الدالة f شامل $\Leftarrow$ يوجد $x \in X$ بحيث $f(x) = y$.

بما أن $y \notin B$ $\Leftarrow$ $x = f^{-1}(y) \notin f^{-1}(B)$

بما أن (X, τ_1) فضاء منتظم $\Leftarrow$ يوجد $G_x, G_{f(B)} \in \tau_1$ بحيث أن

$x \in G_x, f^{-1}(B) \subseteq G_{f^{-1}(B)}, G_x \cap G_{f^{-1}(B)} = \phi$

بما ان الدالة f مفتوحة $f(G_x), f(G_{f^{-1}B)}) \in \tau_2$

بما ان $x \in G_x \Rightarrow y = f(x) \in f(G_x)$

بما ان $f^{-1}(B) \subseteq G_{f^{-1}(B)} \Rightarrow B = f(f^{-1}(B) \subseteq f(G_{f^{-1}(B)})$ (لان الدالة f شاملة)

بما أن الدالة f متباينة $f(G_x) \cap f(G_{f^{-1}(B)} = f(G_x \cap G_{f^{-1}(B)})$

$\Leftarrow$ $f(G_x) \cap f(G_{f^{-1}(B)} = f(\phi) = \phi$

$\Leftarrow (Y, \tau_2)$ فضاء منتظم. وبالمثل نبرهن الاتجاه الأخر.

3.3 فضاءات - T_4 T_4-Spaces

تعريف (1.3.3)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X, τ) بأنه فضاء سوي (Normal) إذا حقق بديهية يوزيزون (Urysohn) الآتية:
إذا كانت A, B مجموعتين مغلقتين متنافيتين في X ، فأنة توجد مجموعتان مفتوحتان متنافيتان تحتويان على A, B على التوالي، بعبارة أخرى توجد $G_A, G_B \in \tau$ بحيث أن $G_A \cap G_B = \phi$ وان $A \subseteq G_A, B \subseteq G_B$.
ويقال عن (X, τ) بأنه فضاء T_4 (T_4- Spaces) إذا كان (X, τ) سويا وفضاء T_1.

مثال (2.3.3)

ليكن $X = \{a, b, c\}, \tau = \{\phi, \{a\}, \{b, c\} X\}$. برهن على أن (X, τ) سوي وليس T_3.

الحل :

المجموعات المغلقة في X هي $X, \{b, c\}, \{a\}, \phi$

إذا كانت $A = \{a\}, B = \{b, c\}$

نضع $G_A = A, G_B = B \Leftarrow G_A, G_B \in \tau$ وان $G_A \cap G_B = \phi$ وكذلك $A \subseteq G_A, B \subseteq G_B$

$\Leftarrow (X, \tau)$ فضاء سوي.

بما أن $\{b\}$ ليست مغلقة في $X \Leftarrow (X, \tau)$ ليس فضاء T_1 وعلية (X, τ) ليس فضاء T_4.

ملاحظة

أن المثال أعلاه بين الفضاء السوي ليس بالضرورة أن يكون فضاء هاوزدورفي.

مثال (3.3.3)

برهن على أن الفضاء التبولوجي الاعتيادي (R, τ_u) يكون فضاء T_4

الحل :

ليكن كل من A, B مجموعة مغلقة في R بحيث أن $A \cap B = \phi$.

وليكن $x \in A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in B^c$

بما أن B^c مجموعة مفتوحة في R $\Leftarrow$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq B^c$

$\Leftarrow$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap B = \phi$.

نضع $G_A = \cup\{(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) : x \in A\}$ $\Leftarrow$ $A \subseteq G_A$

وبالمثل نبرهن على أن : إذا كان $y \in B$ فانه يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

نضع $G_B = \cup\{(y-\frac{\delta}{2}, y+\frac{\delta}{2}) : y \in B\}$ $\Leftarrow$ $B \subseteq G_B$

بما أن (R, τ_u) فضاء تبولوجي اعتيادي $\Leftarrow$ $G_A, G_B \in \tau_u$

بقي أن نبرهن على أن $G_A \cap G_B = \phi$

سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض $G_A \cap G_B \neq \phi$ يوجد $z \in G_A \cap G_B = \phi$ $\Leftarrow$ $z \in G_A \wedge z \in G_B$

$\Leftarrow$ $z \in (x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2})$ لبعض $x \in A$ وكذلك $\Leftarrow$ $z \in (y-\frac{\delta}{2}, y+\frac{\delta}{2})$ لبعض $y \in B$

$\Leftarrow$ $|x-z| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y-z| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |y-z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2}$$

إذا كان $\varepsilon < \delta$ فان $|x-y| < \delta$ وعلية $x \in (y-\delta, y+\delta)$ وهذا تناقض وبالمثل نحصل على تناقض عندما $\varepsilon > \delta$

وعلية $G_A \cap G_B = \phi$ $\Leftarrow$ (R, τ_u) فضاء سوي ، وبما أن (R, τ_u) فضاء T_1 $\Leftarrow$ (R, τ_u) فضاء T_4

مثال (4.3.3)

كل فضاء تبولوجي مبعثر يكون فضاء T_4

الحل :

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي مبعثر .

لتكن كل من A, B مجموعة مغلقة في X بحيث أن $A \cap B = \phi$

نضع $G_A = A, \quad G_B = B \Leftarrow G_x \cap G_A = \phi$

بما أن (X, τ) مبعثر $\Leftarrow$ $G_x, \in G_A \in \tau$

$\Leftarrow$ (X, τ) سوي . وبما أن (X, τ) فضاء T_1 $\Leftarrow$ (X, τ) فضاء T_4

مثال (5.3.3)

لتكن $\tau = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$, $X = \{a,b,c\}$. برهن على ان الفضاء التبولوجي (X, τ) سويا ولكنة ليس منتظما.

الحل :

المجموعات المغلقة في X هي فقط $X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}, \phi$

بسهولة يمكن إثبات (X, τ) انه (X, τ) سويا.

لو أخذنا $A = \{a,c\}$ $\Leftarrow$ A مغلقة في X

نلاحظ لايوجد $G_a , G_A \in \tau$ بحيث أن بحيث أن $G_a \cap G_A = \phi$ ، $A \subseteq G_A$ ، $a \in G_a$

$\Leftarrow$ (X,τ) ليس منتظما.

مبرهنة (6.3.3)

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون سويا إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مغلقة A ومجموعة مغلقة B تحتوي على A فأنة توجد مجموعة مفتوحة V في X بحيث أن $\overline{V} \subseteq B$ ، $A \subseteq V$.

البرهان:

نفرض (X,τ) فضاء سويا . وليكن A مجموعة مغلقة في X ، B مجموعة مفتوحة في X بحيث أن $A \subseteq B$.

$\Leftarrow$ B^c مجموعة مغلقة في X وان $A \cap B^c = \phi$

بما أن (X,τ) فضاء سويا $\Leftarrow$ يوجد $G_A , G_B \in \tau$ بحيث أن $G_A \cap G_{B^C} = \phi$ ، $A \subseteq G_A$، $B^C \subseteq G_{B^C}$

$\Leftarrow$ $G_A \subset G^c_{B^C}$ $\Leftarrow$ $\overline{G}_A \subset \overline{(G^c_{B^C})} = G^c_{B^C}$ لان $G^c_{B^c}$ مجموعة مغلقة وكذلك $B^c \subset G_{B^C}$ $\Leftarrow$ $G^c_{B^C} \subset B$.

نضع $V = G_A$ $\Leftarrow$ $A \subset V$ وكذلك $\overline{V} = \overline{G_A} \subseteq G^c_{B^c} \subseteq B$

الاتجاه الأخر. نفرض الشرط الوجود في المبرهنة متحقق ونبرهن (X,τ) فضاء سويا.

لتكن كل من C, D مجموعة مغلقة في X بحيث أن $C \cap D = \phi$

$C \subseteq D^c$ $\Leftarrow$ C مجموعة مغلقة محتواة في مجموعة مفتوحة D^c

$\Leftarrow$ يوجد $V \in \tau$ بحيث أن $C \subseteq V$ ، $\overline{V} \subseteq D^c$ $\Leftarrow$ $D \subseteq (\overline{V})^c$ وكذلك $V \cap (\overline{V})^c = \phi$

نضع $G_C = V , G_D = (\overline{V})^c$ $\Leftarrow$ $G_C , G_D \in \tau$ وان $G_C \cap G_D = \phi$ ، $C \subseteq G_C , D \subseteq G_D$

$\Leftarrow$ (X,τ) فضاء سويا.

ملاحظة

يمكن صياغة المبرهنة أعلاه بالشكل الأتي :- الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون سويا إذا وفقط إذا كان كل جوار مفتوح إلى G لمجموعة مغلقة F يحتوي على انغلاق جوار مفتوح أخر V إلى المجموعة F.

مبرهنة (7.3.3)

كل فضاء T_4 يكون فضاء T_3 والعكس غير صحيح دائماً.

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء T_4 $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء سويا و فضاء T_1.

يجب أن نبرهن على (X,τ) فضاء منتظم

ليكن A مجموعة مغلقة في X وليكن $x \in X$ بحيث أن $x \notin A$.

بما أن (X,τ) فضاء T_1 $\Leftarrow$ $B = \{x\}$ مجموعة مغلقة في X.

بما أن $x \notin A$ $\Leftarrow$ $A \cap B = \phi$

بما أن (X,τ) سويا $\Leftarrow$ يوجد $G_A , G_B \in \tau$ بحيث أن $A \subseteq G_A , B \subset G_B , G_A \cap G_B = \phi$

بما أن $B = \{x\}$ $\Leftarrow$ $x \in G_B$

$\Leftarrow$ (X,τ) فضاء منتظم وعليه (X,τ) فضاء T_3.

والمثال الأتي يوضح العكس غير صحيح دائما
لتكن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية وليكن $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0\}$. نعرف التبولوجي τ على X كالأتي : لكل $(p,q)\in X$ نعرف

$$N_\varepsilon(p,q)=\begin{cases}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}<\varepsilon\}, & q>0\\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}<\varepsilon\}\cup\{(p,0)\}, & q=0\end{cases}$$

وليكن

$$N(p,q)=\begin{cases}\{N_\varepsilon(p,q):\varepsilon<q\}, & q>0\\ \{N_\varepsilon(p,0):\varepsilon>0\}, & q=0\end{cases}$$

ولتكن $\beta(p,q)$ تمثل عائلة $N(p,q)$. من السهولة أن نبرهن على وجود تبولوجي τ بحيث $\beta(p,q)$ تكون قاعدة محلية له عند النقطة (p,q). $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء- T_3 وليس فضاء T_4.

ملاحظة

صفة السوية ليس بالضرورة أن تكون وراثية والمثال التالي يوضح ذلك

مثال(8.3.3)

ليكن $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\},X\}$ $\Leftarrow$ (X,τ) فضاء سويا

وليكن $Y=\{a,b,c\}$ $\Leftarrow$ $\tau_Y=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},Y\}$

$\Leftarrow$ (Y,τ_Y) ليس سويا وذلك لو أخذنا $A=\{b\}, B=\{c\}$

$\Leftarrow$ كل من A,B مجموعة مغلقة في Y وان $A\cap B=\phi$ ولكن لاتوجد $G_A,G_B\in\tau_Y$ بحيث أن $A\subseteq G_A, B\subseteq G_B,\ G_A\cap G_B=\phi$.

مبرهنة (9.3.3)

كل فضاء جزئي مغلق من فضاء تبولوجي سوي يكون سويا.

البرهان :

ليكن (Y,τ_y) فضاء جزئياً مغلقا من الفضاء التبولوجي السوي (X,τ).

يجب أن نبرهن (Y,τ_y) فضاء سويا. لتكن B_1,B_2 مجموعة مغلقة في Y بحيث أن $B_1\cap B_2=\phi$.

$\Leftarrow$ $B_i=A_i\cap Y$ حيث A_i مجموعة مغلقة في X لكل $i=1,2$

بما أن Y مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ B_i مجموعة مغلقة في X لكل $i=1,2$

بما أن (X,τ) فضاء سوي$\Leftarrow$ يوجد $G_{B_1},G_{B_2}\in\tau$ بحيث أن $B_1\in G_{B_1}, B_2\subseteq G_{B_2},\ \ G_{B_1}\cap G_{B_2}=\phi$

بما أن $B_1,B_2\subseteq Y$ $\Leftarrow$ $B_1\subseteq G_{B_1}\cap Y,\ \ B_2\subseteq G_{B_2}\cap Y$

نضع $H_{B_2}=G_{B_2}\cap Y$, $H_{B_1}=G_{B_1}\cap Y$ $\Leftarrow$ $H_{B_1},H_{B_2}\in\tau_Y$ وان $B_1\in H_{B_1}, B_2\subset H_{B_2}$

$$H_{B_1}\cap H_{B_2}=(G_{B_1}\cap Y)\cap(G_{B_2}\cap Y)=(G_{B_1}\cap G_{B_1})\cap Y=\phi\cap Y=\phi$$

$\Leftarrow$ (Y,τ_Y) فضاء سويا.

مبرهنة (10.3.3)

صفة السوية صفة تبولوجية.

البرهان

ليكن كل من $(X,\tau_1),(X,\tau_2)$ فضاء تبولوجيا بحيث إن $X \approx Y$ بحيث أن نبرهن على أن (X,τ_1) فضاء سويا إذا وفقط إذا كان الفضاء (Y,τ_2) سويا.

بما أن $X \approx Y \Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f: X \to Y$.

نفرض (X,τ_1) فضاء سويا . لتكن كل من B_1, B_2 مجموعة مغلقة في Y بحيث أن $B_1 \cap B_2 = \phi$.

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ كل من $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2)$ مجموعة مغلقة في X

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

بما ان (X,τ) فضاء سوي $\Leftarrow$ يوجد $G_{f^{-1}(B_1)}, G_{f^{-1}(B_2)} \in \tau_1$ بحيث ان

$$f^{-1}(B_1) \subseteq G_{f^{-1}(B_1)}, f^{-1}(B_2) \subseteq G_{f^{-1}(B_2)} \quad , \quad G_{f^{-1}(B_1)} \cap G_{f^{-1}(B_2)} = \phi$$

بما ان $f^{-1}(B_1) \subseteq G_{f^{-1}(B_1)} \Leftarrow B_1 = f(f^{-1}(B_1)) \subseteq f(G_{f^{-1}(B_1)})$

وبالمثل نحصل على $B_2 \subseteq f(G_{f^{-1}(B_2)})$

نضع $H_{B_1} = f(G_{f^{-1}(B_1)}), \quad H_{B_2} = f(G_{f^{-1}(B_1)}) \Leftarrow B_1 \subseteq H_{B_1}, \quad B_2 \subseteq H_{B_2}$

بما أن الدالة f مفتوحة $H_{B1}, H_{B_2} \in \tau_2$

$$H_{B_1} \cap H_{B_2} = f(G_{f^{-1}(B_1)}) \cap f(G_{f^{-1}(B)}) = f(G_{f^{-1}(B_1)} \cap G_{f^{-1}(B)}) = f(\phi) = \phi$$

$\Leftarrow (Y,\tau_2)$ فضاء سوياً . وبالمثل نبرهن الاتجاه الأخر.

4.3 بديهيتا العد Axioms of Countability

تعريف(1.4.3)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه يحقق

1. بديهية العد الأولى **(First Axiom of Countability)** إذا كان لكل $x \in X$ يمتلك قاعدة محلية قابلة للعد
2. بديهية العد الثانية **(Second Axiom of Countability)** إذا كان τ يمتلك قاعدة قابلة للعد .

مثال(2.4.3)

1. كل تبولوجي مبعثر يحقق بديهية العد الأولى
2. الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ يحقق بديهية العد الأولى .
3. كل فضاء متري يحقق بديهية العد الأولى
4. الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ يحقق بديهية العد الثانية .

البرهان :

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

1. ليكن (X,τ_D) فضاء تبولوجي مبعثر
ليكن $x\in X$ فان $\beta_x=\{\{x\}\}$ قاعدة محلية عند النقطة x و قابلة للعد
$\Leftarrow$ (X,τ_D) يحقق بديهية العد الأولى .
2. ليكن $x\in\mathbb{R}$ فان $\beta_x=\{(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}):n\in\mathbb{N}\}$ قاعدة محلية عند النقطة x وقابلة للعد
$\Leftarrow$ $(\mathbb{R},\tau_u)$ يحقق بديهية العد الأولى .
3. ليكن (X,d) فضاء متريا
ليكن $x\in X$ فان $\beta_x=\{\{y\in X:d(x,y)<\frac{1}{n}\}:n\in\mathbb{N}\}$ قاعدة محلية عند النقطة x و قابلة للعد
$\Leftarrow$ (X,d) يحقق بديهية العد الأولى .
4. لتكن $\beta=\{(a,b):a,b\in\mathbb{Q}\}$ فان β قاعدة وقابلة للعد $\Leftarrow$ $(\mathbb{R},\tau_u)$ يحقق بديهية العد الثانية .

مثال(3.4.3)

ليكن X مجموعة غير قابلة للعد وليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا مكمل قابل للعد فان (X,τ) لا يحقق بديهية العد الأولى

البرهان :

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض (X,τ) يحقق بديهية العد الأولى

ليكن $x\in X$ ، ولتكن $\beta_x=\{A_n:n\in\Lambda\subseteq\mathbb{N}\}$ قاعدة محلية عند النقط x وقابلة للعد

نضع $A^*=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ $\Leftarrow$ $(A^*)^c=(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n)^c=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n^c$

بما أن A_n^c مجموعة قابلة للعد لكل $n\in\mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n^c$ مجموعة قابلة للعد

$\Leftarrow$ $(A^*)^c$ مجموعة قابلة للعد $\Leftarrow$ A^* مجموعة غير قابلة للعد

الآن بما أن β_x قاعدة محلية عند النقطة x و A^* جوار إلى النقطة x لأنها تقاطع لجوارات

نحصل على $x\in A_i\subseteq A^*$ لبعض $i\in\mathbb{N}$ ، ولكن $A^*\subseteq A_i$ لان $A^*=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ $\Leftarrow$ $A^*=A_i$

وعليه A^* اصغر مجموعة في β_x تحتوي على x .

إزالة من A^* نقطة ماعدا x (هذا ممكن لان A^* غير قابلة للعد) و لتكن A^{**} المجموعة التي تم الحصول عليها من ذلك .

$\Leftarrow$ A^{**} جوار إلى النقطة x ولا تحتوي على عنصر من β_x. وهذا تناقض

وعليه (X,τ) لا يحقق بديهية العد الأولى.

مثال(4.4.3)

ليكن $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء تبولوجيا مكمل منتهي فان (X,τ) لا يحقق بديهية العد الأولى

البرهان :

$$\tau=\{\phi\}\cup\{A\subseteq\mathbb{R}:\ \text{منتهية } A^c\}$$

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $(\mathbb{R},\tau)$ يحقق بديهية العد الأولى

ليكن $x \in X$ $\Leftarrow$ توجد قاعد محلية قابلة للعد $\beta_x = \{B_1, B_2, \cdots\}$

بما أن $B_n \in \tau$ لكل $n = 1, 2, \cdots$ فان B_n^c مجموعة منتهية ومغلقة لكل قيم n

بما أن B_n^c مجموعة منتهية لكل قيم n $\Leftarrow$ B_n^c مجموعة قابلة للعد لكل قيم n

$\Leftarrow$ $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c$ مجموعة قابلة للعد

بما أن $\mathbb{R}$ مجموعة غير قابلة للعد فانه يوجد $y \in \mathbb{R} | D$ بحيث أن $y \neq x$

$\Leftarrow$ $y \notin D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c$ $\Leftarrow$ $y \in (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ $\Leftarrow$ $y \in B_n$ لكل قيم n

لتكن $G = \mathbb{R} | \{y\}$ $\Leftarrow$ $G \in \tau$ لان $G^c = \{y\}$ مجموعة منتهية

بما أن $y \neq x$ $\Leftarrow$ $x \in G$

بما أن $\beta_x = \{B_1, B_2, \cdots\}$ قاعدة محلية عند النقطة x فانه توجد $B_k \in \beta_x$ بحيث أن $x \in B_k \subseteq G$

$\Leftarrow$ $y \notin B_k$ وهذا تناقض مع $y \in B_n$ لكل قيم n. وعليه $(\mathbb{R}, \tau)$ لا يحقق بديهية العد الأولى.

مبرهنة (5.4.3)

كل فضاء تبولوجي يحقق بديهية العد الثانية فانه يحقق بديهية العد الأولى والعكس غير صحيح دائما

البرهان :

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي يحقق بديهية العد الثانية $\Leftarrow$ (X, τ) يمتلك قاعدة β قابلة للعد

ليكن $x \in X$

لتكن $\beta_x = \{B \in \beta : x \in B\}$. يجب أن نبرهن أن β_x قاعدة محلية قابلة للعد عند النقطة x .

بما أن β قابلة للعد $\Leftarrow$ β_x قابلة للعد.

ليكن V جوار إلى النقطة x

بما أن β قاعدة إلى τ $\Leftarrow$ يوجد $B \in \beta$ بحيث أن $x \in B \subseteq V$

بما أن $x \in B$ و $B \in \beta$ $\Leftarrow$ $B \in \beta_x$ $\Leftarrow$ β_x قاعدة محلية قابلة للعد عند النقطة x .

وعليه الفضاء التبولوجي (X, τ) يحقق بديهية العد الأولى .

والمثال التالي يوضح العكس غير صحيح

لتكن X مجموعة غير قابلة للعد فان الفضاء التبولوجي المبعثر (X, τ) يحقق بديهية العد الأولى ولا يحقق بديهية العد الثانية لان $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$ قاعدة غير قابلة للعد بينما $\beta_x = \{\{x\}\}$ قاعدة محلية قابلة للعد عند النقطة $x \in X$.

مبرهنة(6.4.3)

1. صفة بديهية العد الأولى صفة وراثية
2. صفة بديهية العد الثانية صفة وراثية

البرهان :

ليكن (Y, τ_Y) فضاء جزئيا من الفضاء التبولوجي (X, τ)

1. نفرض (X, τ) يحقق بديهية العد الأولى. يجب أن نبرهن (Y, τ_Y) يحقق بديهية العد الأولى.

ليكن $y \in Y$

بما أن $Y \subseteq X \Leftarrow y \in X$

بما أن (X,τ) يحقق بديهية العد الأولى.

$\Leftarrow$ (X,τ) يمتلك قاعدة محلية β_y عند النقطة x و قابلة للعد

$\beta_y^* = \{A \cap Y : A \in \beta_y\}$ قاعدة محلية عند النقطة x بالنسبة للتبولوجي τ_Y وقابلة للعد

$\Leftarrow$ (Y,τ_Y) يحقق بديهية العد الأولى.

2. نفرض (X,τ) يحقق بديهية العد الثانية . يجب أن نبرهن (Y,τ_Y) يحقق بديهية العد الثانية .

$\Leftarrow$ (X,τ) يمتلك قاعدة β قابلة للعد $\Leftarrow$ $\beta^* = \{B \cap Y : B \in \beta\}$ قاعدة إلى τ_Y

بما أن β قابلة للعد فان β^* قابلة للعد . وعليه توجد قاعدة قابلة للعد β^* إلى τ_Y

$\Leftarrow$ (Y,τ_Y) يحقق بديهية العد الثانية .

مبرهنة(7.4.3)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا يحقق بديهية العد الأولى فانه توجد قاعدة محلية متناقصة عند كل $x \in X$.

البرهان :

ليكن $x \in X$

بما أن (X,τ) يحقق بديهية العد الأولى.

$\Leftarrow$ (X,τ) يمتلك قاعدة محلية β_x عند النقطة x و قابلة للعد

بما أن β_x قابلة للعد $\Leftarrow$ $\beta_x = \{A_n : n \in \Lambda \subseteq \mathbb{N}\}$

نضع $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ $\Leftarrow$ $B_{n+1} \subseteq B_n$ لكل $n \in \Lambda$

ليكن V جوار إلى النقطة x

بما أن β_x قاعدة محلية عند النقطة x $\Leftarrow$ يوجد $k \in \Lambda$ بحيث أن $A_k \subseteq V$

بما أن $B_k \subseteq A_k$ $\Leftarrow$ $B_k \subseteq V$

$\Leftarrow$ $\beta_x^* = \{B_n : n \in \Lambda \subseteq \mathbb{N}\}$ قاعدة محلية متناقصة عند النقطة x

مبرهنة(8.4.3)

1.صفة بديهية العد الأولى صفة تبولوجية

2. صفة بديهية العد الثانية صفة تبولوجية

البرهان :

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجيا بحيث إن $X \cong Y$

$\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f : X \to Y$. يجب أن نبرهن على أن

1. (X,τ_1) يحقق بديهية العد الأولى إذا وفقط إذا كان الفضاء (Y,τ_2) يحقق بديهية العد الأولى .

نفرض (X,τ_1) يحقق بديهية العد الأولى . ليكن $y \in Y$

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

بما أن الدالة f شاملة فانه يوجد $x \in X$ بحيث أن $f(x) = y$

بما أن (X, τ_1) يحقق بديهية العد الأولى فانه يمتلك قاعدة محلية β_x عند النقطة x وقابلة للعد

يجب أن نبرهن $\beta_y = \{f(A) : A \in \beta_x\}$ قاعدة محلية عند النقطة y وقابلة للعد

من الواضح ان $\beta_y = \{f(A) : A \in \beta_x\}$ قابلة للعد لان β_x قابلة للعد

ليكن U جوار إلى النقطة y، فانع توجد مجموعة مفتوحة G في Y بحيث $y \in G \subseteq U$

$x \in f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(U) \Leftarrow f(x) \in G \subseteq U$

بما أن الدالة f مستمرة فان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X وتحتوي على x

بما أن β_x قاعدة محلية عند النقطة x، فانه توجد $A \in \beta_x$ بحيث أن $x \in A \subseteq f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Leftarrow y = f(x) \in f(A) \subseteq U \Leftarrow \beta_y = \{f(A) : A \in \beta_x\}$ قاعدة محلية عند النقطة y

$\Leftarrow (Y, \tau_2)$ يحقق بديهية العد الأولى . وبالمثل نبرهن الاتجاه الأخر .

2. (X, τ_1) يحقق بديهية العد الثانية إذا وفقط إذا كان الفضاء (Y, τ_2) يحقق بديهية العد الثانية .

نفرض (X, τ_1) يحقق بديهية العد الثانية $\Leftarrow (X, \tau)$ يمتلك قاعدة β قابلة للعد

لتكن $\beta^* = \{f(B) : B \in \beta\}$ يجب أن نبرهن β^* قاعد قابلة للعد إلى (Y, τ_2)

بما أن β قابلة للعد فان β^* قابلة للعد

لتكن $G \in \tau_2$، بما أن الدالة f مستمرة فان $f^{-1}(G) \in \tau_1$

بما أن β قاعدة إلى (X, τ_1) فان $f^{-1}(G) = \cup\{B : B \in \beta\}$

$\Leftarrow f(f^{-1}(G)) = f(\cup\{B : B \in \beta\}) \Leftarrow G = \cup\{f(B) : B \in \beta\}$

$\Leftarrow (Y, \tau_2)$ يحقق بديهية العد الثانية . وبالمثل نبرهن الاتجاه الأخر.

تمارين(4.3)

1. لتكن X مجموعة غير قابلة للعد ، وليكن $x_0 \in X$ $\tau = \{A \subseteq X : (A^c$ منتهية و $x_0 \in A)$ أو $x_0 \notin A\}$
برهن على أن (X, τ) فضاء تبولوجي لا يحقق بديهية العد الأولى .
2. ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي يحقق بديهية العد الثانية ولتكن $\mathcal{F}$ عائلة جميع المجموعات المتنافية و المفتوحة في X.
برهن على أن $\mathcal{F}$ قابلة للعد .
3. ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي يحقق بديهية العد الثانية ولتكن $A \subseteq X$ مجموعة غير قابلة للعد. برهن على أن بعض نقاط المجموعة A هي نقاط تراكم إلى A (أي تنتمي إلى A').

5.3 قابلية الانفصال Separablity

تعريف (1.5.3)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه قابلا للانفصال (separable) إذا كان X يحتوي على مجموعة كثيفة قابلة للعد. بعبارة أخرى إذا وجدت مجموعة قابلة للعد $A \subseteq X$ بحيث أن $\overline{A} = X$.

مثال(2.5.3)

1. الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ يكون قابلا للانفصال
لان مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ كثيفة وقابلة للعد في $\mathbb{R}$.
2. الفضاء التبولوجي المبعثر $(\mathbb{R},\tau_D)$ غير قابل للانفصال
لان المجموعة الكثيفة في $\mathbb{R}$ هي فقط $\mathbb{R}$ (بسبب $\overline{A} = A$ لكل $A \subseteq \mathbb{R}$) وهذه المجموعة غير قابلة للعد
في الحقيقة كل فضاء تبولوجي مبعثر (X,τ) يكون غير قابل للانفصال عندما X مجموعة غير قابلة للعد.
3. الفضاء التبولوجي المبعثر (X,τ_D) قابل للانفصال إذا وفقط إذا كانت X مجموعة قابلة للعد.

مبرهنة (3.5.3)

كل فضاء تبولوجي يحقق بديهية العد الثانية يكون قابل للانفصال والعكس غير صحيح دائما

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي يحقق بديهية العد الثانية $\Leftarrow$ τ يمتلك β قاعدة قابلة للعد

لتكن $A = \{x_i \in A_i : A_i \in \beta\}$

بما أن β قابلة للعد فان A قابلة للعد

يجب أن نبرهن $\overline{A} = X$. بما أن $\overline{A} \subseteq X$ ، بقي أن نبرهن $X \subseteq \overline{A}$

ليكن $x \in X$ وليكن $G \in \tau$ بحيث أن $x \in G$

بما أن β قاعدة إلى τ $\Leftarrow$ يوجد $V \in \beta$ بحيث أن $x \in V \subseteq G$ $\Leftarrow$ $A \cap V \subseteq A \cap G$

$\Leftarrow$ $A \cap V \neq \phi$ $\Leftarrow$ $x \in \overline{A}$ $\Leftarrow$ $X \subseteq \overline{A}$ وعليه $\overline{A} = X$.

$\Leftarrow$ (X,τ) قابل للانفصال .

والمثال التالي يوضح العكس غير صحيح

لتكن X مجموعة غير قابلة للعد ، وليكن $p \in X$ وليكن $\tau_p = \{\phi\} \cup \{A \subseteq X : p \in A\}$. يجب أن نبرهن الفضاء التبولوجي (X,τ_p) قابل للانفصال ولا يحقق بديهية العد الثانية

لتكن $A = \{p\}$ فان A قابلة للعد وان $\overline{A} = X$ وعليه (X,τ_p) قابل للانفصال.

لتكن $\beta = \{\{p\},\{p,q\} : q \in X\}$ $\Leftarrow$ β قاعدة إلى τ_p ولكنها غير قابلة للعد

وعليه (X,τ_p) لا يحقق بديهية العد الثانية

نتيجة (4.5.3)

كل فضاء جزئي من فضاء تبولوجي يحقق بديهية العد الثانية يكون قابل للانفصال .

البرهان :

بما أن كل فضاء جزئي من فضاء تبولوجي يحقق بديهية العد الثانية يكون يحقق بديهية العد الثانية وعليه يكون قابل للانفصال .

ملاحظة

الفضاءات التبولوجية القابلة للانفصال ليس بالضرورة أن تحقق بديهية العد الأولى .

مبرهنة(5.5.3)

كل فضاء تبولوجي هو فضاء جزئي من فضاء تبولوجي قابل للانفصال

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $x_0 \notin X$.نعرف

$$X^* = X \cup \{x_0\}, \quad \tau^* = \{\phi\} \cup \{G^* : G^* = G \cup \{x_0\}, \quad G \in \tau\}$$

ليكن $A = \{x_0\} \quad \Leftarrow \quad A$ قابلة للعد

ليكن $x \in X^*$

أذا كانت $x = x_0 \quad \Leftarrow \quad x \in \overline{A}$ أما أذا كانت $x \neq x_0$ فان $x \in X$

ليكن V جوار إلى النقطة x في $X \quad \Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة G^* في X^* بحيث أن $x \in G^* \subset V$

$\Leftarrow \quad G^* = G \cup \{x_0\} \quad \Leftarrow \quad G^* \cap A \neq \phi \quad \Leftarrow \quad V \cap A \neq \phi \quad \Leftarrow \quad x \in \overline{A} \quad \Leftarrow \quad X^* \subset \overline{A}$

ولكن $\overline{A} \subset X^* \quad \Leftarrow \quad \overline{A} = X^* \quad \Leftarrow \quad A$ كثيفة وقابلة للعد في $X^* \quad \Leftarrow \quad X^*$ قابلة للانفصال .

مبرهنة ()

مبرهنة(6.5.3)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجيا , ولتكن $f : X \to Y$ دالة شاملة ومستمرة .إذا كانت X فضاء قابل للانفصال فأن Y فضاء قابل للانفصال ، بعبارة أخرى الصورة المستمرة لفضاء قابل للانفصال يكون قابل للانفصال .

البرهان :

بما أن (X,τ_1) قابل للانفصال $\Leftarrow$ توجد مجموعة $A \subseteq X$ قابلة للعد وكثيفة .

$\Leftarrow \quad f(A)$ قابلة للعد في Y

بما أن f شاملة $\Leftarrow \quad f(X) = Y$

بما أن $\overline{A} = X \quad \Leftarrow \quad Y = f(X) = f(\overline{A})$

بما أن f مستمرة $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \Leftarrow \quad Y \subseteq \overline{f(A)}$

بما أن $f(A) \subset Y \Leftarrow \overline{f(A)} \subset Y \quad \Leftarrow \quad \overline{f(A)} = Y \qquad f^{-1}(Y) = X = (\overline{A})$

$\Leftarrow f(A)$ مجموعة كثيفة وقابلة للعد في $Y \quad \Leftarrow \quad Y$ قابلة للانفصال

مبرهنة (7.5.3)

قابلة الانفصال صفة تبولوجية

البرهان:

ليكن (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضائيين تبولوجين متشاكلين $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f : X \to Y$

يجب أن نبرهن على أن X قابل للانفصال أذا وفقط أذا كان Y قابل للانفصال

نفرض X قابل للانفصال $\Leftarrow$ X يمتلك مجموعة جزئية كثيفة وقابلة للعد ولتكن A ، (أي أن A مجموعة كثيفة وقابلة للعد في X) $\Leftarrow$ $f(A)$ قابلة للعد في Y

بما أن f شاملة $\Leftarrow$ $f(X)=Y$

بما أن $\overline{A}=X$ $\Leftarrow$ $Y=f(X)=f(\overline{A})$

بما أن f مستمرة $f(\overline{A})\subseteq \overline{f(A)}$ $\Leftarrow$ $Y\subseteq \overline{f(A)}$

بما أن $f(A)\subset Y$ $\Leftarrow$ $\overline{f(A)}\subset Y$ $\Leftarrow$ $\overline{f(A)}=Y$ $\qquad f^{-1}(Y)=X=(\overline{A})$

$\Leftarrow$ $f(A)$ مجموعة كثيفة وقابلة للعد في Y $\Leftarrow$ Y قابلة للانفصال

وبالمثل نبرهن X قابلة للانفصال عندما Y قابلة للانفصال .

تمارين (5.3)

1. برهن على أن الفضاء التبولوجي (X,τ) المكل المنتهي قابل للانفصال ولكنه لا يحقق بديهية العد الأولى .
2. برهن على أن كل فضاء متري يكون قابل للانفصال إذا وفقط إذا كان يحقق بديهية العد الثانية يكون قابل للانفصال .
3. برهن على أن صفة قابلية الانفصال أنها ليست صفة وراثية ، بعبارة ليس كل فضاء جزئي من فضاء قابل الانفصال يكون قابل للانفصال .

4. التراص Compactness

التراص هو تعميم لبعض خواص المجموعات المقيدة والمغلقة في فضاء الأعداد الحقيقة ، حيث هناك مبرهنات تلعب دورا مهما في التحليل الرياضي مثل مبرهنة هاين - بوريل . ونظرا للأهمية البالغة في تطوير التحليل الرياضي سنقدم في هذا البند مفهوم الفضاءات المترية المتراصة وعلاقتها مع الفضاءات المترية الأخرى.

1.4 الغطاء covering

تعريف (1.1.4)

لتكن $\mathcal{F}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة من المجموعات الجزئية من المجموعة X ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن F بأنها غطاء (Covering) للمجموعة A إذا كان $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. فضلا عن ذلك إذا كانت المجموعة الدليلية Λ مجموعة منتهية فأن $\mathcal{F}$ يكون غطاء منتهياً للمجموعة A . وطبعاً إذا كانت $A=X$ فأن $\mathcal{F}$ يكون غطاء للمجموعة X إذا كان $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$.

مثال (2.1.4)

لتكن $X=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2\}$

1. العائلة $\{\{1\},\{2,3\}\}$ تمثل غطاء إلى A لأن $\{1\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\} \Rightarrow A\subseteq\{1\}\cup\{2,3\}$ وان هذا الغطاء منتهي.
2. العائلة $\{\{2\},\{4,5\}\}$ لا تمثل غطاء إلى A لأن $A\not\subseteq\{2\}\cup\{4,5\}$.
3. العائلة $\{\{1,2\},\{3,4\},\{1,3,5\}\}$ تمثل غطاء إلى A وغطاء إلى X .

مثال (3.1.4)

1. العائلة $\mathcal{F}=\{[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]:n\in\mathbb{Z}^+\}$ تمثل غطاء غير منتهي إلى المجموعة $A=(0,1)$.
2. العائلة $\mathcal{F}=\{(n,n+3):n\in\mathbb{Z}\}$ تمثل غطاء غير منتهي إلى $\mathbb{R}$.
3. العائلة $\mathcal{F}=\{(n,n+1):n\in\mathbb{Z}\}$ لا تمثل غطاء إلى $\mathbb{R}$.

تعريف (4.1.4)

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة X وليكن كل من $\mathcal{F}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ و $\mathcal{G}=\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda'}$ غطاء إلى المجموعة A . يقال عن $\mathcal{F}$ بأنه غطاء جزئي (Subcover) من $\mathcal{G}$ إذا كان لكل $\lambda\in\Lambda$ يوجد $\gamma\in\Lambda'$ بحيث $A_\lambda=B_\gamma$ ، بعبارة أخرى إذا كانت $\mathcal{F}$ عائلة جزئية من $\mathcal{G}$.

مثال (5.1.4)

كل من $\mathcal{F}=\{(n,n+3),n\in\mathbb{Z}\}$, $\mathcal{G}=\{(r,r+3):r\in\mathbb{R}\}$ غطاء إلى $\mathbb{R}$ وان $\mathcal{F}$ عائلة جزئية من $\mathcal{G}$

تعريف (6.1.4)

لتكن A مجموعة جزية من الفضاء التبولوجي (X,τ) وليكن $\mathcal{F}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء إلى المجموعة A . يقال عن $\mathcal{F}$ بأنها غطاء مفتوح (Open Cover) إذا كانت A_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda$.

مثال (7.1.4)

في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ نبرهن على أن العائلة $\mathcal{F}=\{(\frac{1}{n},2):n\in\mathbb{Z}^+\}$ تكون غطاء مفتوحا إلى المجموعة $A=(0,1)$.

الحل:

ليكن $x\in A \Leftarrow 0<x<1$

بما أن $x>0$ حسب خاصية أرخميدس . يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\frac{1}{k}<x$

بما أن $x<1 \Leftarrow x<2 \Leftarrow \frac{1}{k}<x<2 \Leftarrow x\in(\frac{1}{k},2) \Leftarrow x\in\bigcup_{n\in Z^+}(\frac{1}{n},2)$

$\Leftarrow A\subset\bigcup_{n\in Z^+}(\frac{1}{n},2) \Leftarrow \mathcal{F}$ غطاء إلى المجموعة A

بما أن $(\frac{1}{n},2)$ مجموعة مفتوحة لكل $n\in\mathbb{Z}^+ \Leftarrow \mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى A

مثال (8.1.4)

في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ كل من

$$\mathcal{F}_1=\{(-n,n):n\in\mathbb{Z}^+\},\quad \mathcal{F}_2=\{(-3n,3n):n\in\mathbb{Z}^+\},\quad \mathcal{F}_3=\{(2n-1,2n+1),(2n,2n+2):n\in\mathcal{F}^+\}$$

تكون غطاء مفتوحا إلى $\mathbb{R}$ وكذلك $\mathcal{F}_2$ غطاء جزئيا من $\mathcal{F}_1$

مثال (9.1.4)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر ولتكن $A\subseteq X$ بين على أن $\mathcal{F}=\{\{x\}:x\in A\}$ يكون غطاء مفتوحا إلى A

الحل:

بما أن $A=\bigcup_{x\in A}\{x\} \Leftarrow \mathcal{F}$ غطاء إلى المجموعة A.

بما أن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر $\Leftarrow \{x\}$ مجموعة مفتوحة في X لكل $x\in X$

$\Leftarrow \mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة A

2.4 الفضاءات المرصوصة Compact Spaces

تعريف (1.2.4)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً ولتكن $A\subseteq X$. يقال عن A بأنها مجموعة مرصوصة (Compact Set) في X إذا كان كل غطاء مفتوح إلى A يحتوي (يمتلك) غطاء جزئي منتهي . بعبارة أخرى إذا كانت $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\wedge}A_\lambda$ وكانت A_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda$ فأنه توجد $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ في Λ بحيث أن $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_{\lambda_i}$.

وبصورة خاصة يقال عن X بأنة فضاء مرصوص **(Compact Space)** إذا كان كل غطاء

مفتوح إلى X فأنه يحتوي على غطاء جزئي منتهي.

مثال (2.2.4)

في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$

1. المجموعة $A=(0,1)$ غير مرصوصة في $\mathbb{R}$.
2. المجموعة $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots,0\}$ مرصوصة في $\mathbb{R}$.
3. الفضاء $\mathbb{R}$ غير مرصوص .

الحل :

1. نأخذ $\mathcal{F}=\{(\frac{1}{n},2):n\in\mathbb{Z}^+\}$ $\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى A ولكن لا يحتوي على غطاء جزئي منته
$\Leftarrow$ A مجموعة غير مرصوصة
2. ليكن $\mathcal{F}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة A $\Leftarrow$ $A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, $A_\lambda\in\tau_u$ لكل $\lambda\in\Lambda$
بما أن $0\in A$ $\Leftarrow$ يوجد $\lambda_0\in\Lambda$ بحيث أن $0\in A_{\lambda_0}$
بما أن A_{λ_0} مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$, $0\in A_{\lambda_0}$ $\Leftarrow$ يوجد $r>0$ بحيث أن $B_r(0)=(-r,r)\subset A_{\lambda_0}$
بما أن $r>0$ فحسب خاصية أرخميدس يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث أن $\frac{1}{k}<r$ $\Leftarrow$ $-r<\frac{1}{n}<r$ لكل $n\geq k$
A_{λ_0} تحتوي على جميع عناصر A ماعدا (من المحتمل) العناصر $1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{k}$
ألان لكل من هذه العناصر $\frac{1}{i}$ حيث $i=1,2,\cdots,k-1$ يوجد A_{λ_C} بحيث أن $\frac{1}{i}\in A_{\lambda_i}$
$\Leftarrow$ $\{A_{\lambda_0},A_{\lambda_1},\dots,A_{\lambda_{K-1}}\}$ غطاء جزئي منتهي من الغطاء $\mathcal{F}$ إلى A
3. نأخذ $\mathcal{F}=\{(-n,n):n\in\mathbb{Z}^+\}$ $\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى $\mathbb{R}$
سنبرهن بطريقة التناقض على أن $\mathcal{F}$ لا يحتوي على غطاء جزئي منته
نفرض $\{G_{n_1},G_{n_2},\cdots,G_{n_k}\}$ غطاء جزئي منته إلى $\mathcal{F}$ $\Leftarrow$ $G_{n_r}=(-n_r,n_r)$ لكل $r=1,2,\dots,k$
نضع $n_0=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$ $\Leftarrow$ $n_0\notin G_{n_r}$ لكل $r=1,2,\cdots,k$
ولكن $n_0\in\mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ $\{G_{n_1},G_{n_2},\cdots,G_{n_k}\}$ ليس غطاء إلى $\mathbb{R}$. وهذا تناقض
$\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ لا يحتوي على غطاء جزئي منته وعليه $\mathbb{R}$ ليس فضاء مرصوصا

مثال (3.2.4)

كل فضاء تبولوجي متماسك يكون متراص لأن الغطاء المفتوح الوحيد إلى X هو $\{X\}$

مبرهنة (4.2.4)

كل مجموعة منتهية في فضاء تبولوجي تكون مرصوصة

البرهان:

لتكن A مجموعة منتهية في الفضاء التبولوجي (X,τ) $\Leftarrow$ $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

ليكن $\mathcal{F}=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في X

$\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$, G_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda$

بما أن $a_i\in A$ لكل $i=1,2,\cdots,n$ $\Leftarrow$ $a_i\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ لكل $i=1,2,\cdots,n$

$\Leftarrow$ لكل i توجد $\lambda_i\in\Lambda$ بحيث أن $a_i\in G_{\lambda_i}$ $\Leftarrow$ $\{G_{\lambda_1},G_{\lambda_2},\cdots,G_{\lambda_n}\}$ غطاء جزئي منته من $\mathcal{F}$ إلى A

$\Leftarrow$ A مجموعة مرصوصة .

مثال (5.2.4)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر، فأن X يكون مرصوص إذا وفقط إذا كانت X منتهية

البرهان :

نفرض (X,τ) فضاء مرصوص . سنبرهن بطريقة التناقض على أن X مجموعة منتهية

نفرض X مجموعة غير منتهية .بما أن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}=\{\{x\}:x\in X\}$ غطاء مفتوح إلى X

ولكن هذا الغطاء لا يحتوي على غطاء جزئي منتهي لأن X مجموعة غير منتهية .أذن X غير مرصوصة وهذا تناقض. إذن يجب أن تكون X منتهية

الاتجاه الآخر. نفرض X مجموعة منتهية $\Leftarrow$ X فضاء مرصوص حسب مبرهنة (4.2.4)

مثال (6.2.4)

كل فضاء تبولوجي مكمل المنتهي يكون مرصوص

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مكمل منتهي. وليكن $\mathcal{F}=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى X

$\Leftarrow$ $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$, G_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda$

$\Leftarrow$ G_λ^c مجموعة منتهية لكل $\lambda\in\Lambda$ $\Leftarrow$ $G_\lambda^c=\{a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\cdots,a_{\lambda_n}\}$

لكل $a_{\lambda_k}\in G_\lambda^c$ يوجد $G_{\lambda_k}\in\mathcal{F}$ بحيث أن $a_{\lambda_k}\in G_{\lambda_k}$ لكل $k=1,2,\cdots,n$ $\Leftarrow$ $G_\lambda^c\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}G_{\lambda_k}$

ولكن $G_\lambda\cup G_\lambda^c=X$ $\Leftarrow$ $X\subseteq G_\lambda\cup(\bigcup_{k=1}^{n}G_{\lambda_k})$

ولكن $G_\lambda\cup(\bigcup_{k=1}^{n}G_{\lambda_k})\subseteq X$ $\Leftarrow$ $X=G_\lambda\cup(\bigcup_{k=1}^{n}G_{\lambda_k})$

$G_\lambda\cup\{G_{\lambda_k}\}$ غطاء جزئي منتهي إلى X وعليه X فضاء مرصوص .

مبرهنة (7.2.4)
ليكن (Y, τ_Y) فضاء جزئياً من الفضاء التبولوجي (X, τ) ولتكن $A \subset Y$ ، فأن المجموعة A تكون مرصوصة في X إذا وفقط إذا كانت مرصوصة في Y .

البرهان :
نفرض المجموعة A مرصوصة في X
ليكن $\mathcal{G} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في Y $\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, V_λ مجموعة مفتوحة في Y لكل $\lambda \in \Lambda$

$\Leftarrow$ توجد G_λ مجموعة مفتوحة في X بحيث أن $V_\lambda = G_\lambda \cap Y$ لكل $\lambda \in \Lambda$

$\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ $\Leftarrow$ $\mathcal{F} = \{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في X

بما أن المجموعة A مرصوصة في X $\Leftarrow$ توجد $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}$

بما آن $A \subset Y$ $\Leftarrow$ $A \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}) \cap Y$ $\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\lambda_i} \cap Y)$

$\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$ $\Leftarrow$ المجموعة A مرصوصة في Y

الاتجاه الآخر : نفرض أن المجموعة A مرصوصة في Y
لتكن $\mathcal{F} = \{G_\lambda\}_{\lambda \in \lambda}$ غطاء مفتوحا إلى A في X

$\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, G_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda \in \Lambda$

$\Leftarrow$ $G_\lambda \cap Y$ مجموعة مفتوحة في Y لكل $\lambda \in \Lambda$

بما أن $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, $A \subseteq Y$ $\Leftarrow$ $A \subseteq (\bigcup_{\lambda \Lambda} G_\lambda) \cap Y$

$\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda \cap Y)$ $\Leftarrow$ $\{G_\lambda \cap Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى A في Y

بما أن المجموعة A مرصوصة في Y $\Leftarrow$ توجد $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ بحيث أن

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\lambda_i} \cap Y)$ $\Leftarrow$ $A \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_{ui}}) \cap Y$ $\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}$

$\Leftarrow$ $\{G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \cdots, G_{\lambda_n}\}$ غطاء جزئي منته من الغطاء $\mathcal{F}$ إلى A في X $\Leftarrow$ المجموعة A مرصوصة في X .

ملاحظة
استناداً إلى المبرهنة أعلاه. المجموعة الجزئية Y من الفضاء التبولوجي X تكون مرصوصة في X إذا فقط إذا كانت Y فضاء مرصوص بالنسبة للتبولوجي النسبي τ_Y على Y. وعليه التراص ليس خاصية نسبيه (Relative Property)

مبرهنة (8.2.4)

كل مجموعة مرصوصة في فضاء تبولوجي هاوزدورفي تكون مغلقة

البرهان :

لتكن A مجموعة مرصوصة في الفضاء التبولوجي الهاوزدورفي (X,τ).

يجب أن نبرهن على أن المجموعة A مغلقة في X.

لتكن $x \in A^c \Leftarrow x \notin A \Leftarrow x \neq y$ لكل $y \in A$

بما أن (X,τ) فضاء T_2 $\Leftarrow$ توجد مجموعتان مفتوحتان U_x, V_y في X بحيث أن $y \in V_y$ ، $x \in U_x$ و

$U_x \cap V_y = \phi \Leftarrow \mathcal{F} = \{V_y : y \in A\}$ غطاء مفتوح إلى A

بما أن المجموعة A مرصوصة $\Leftarrow$ يوجد $y_1, y_2, \dots, y_n \in A$ بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$

نضع $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ ، $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$

$\Leftarrow$ U مجموعة مفتوحة في X تحتوي على x وان $A \subseteq V$ ، $U \cap V = \phi$

وبسهولة يمكن إثبات $A \cap U = \phi \Leftarrow U \subseteq A^c$

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة U في X بحيث أن $x \in U \subseteq A^c$

$\Leftarrow$ A^c مجموعة مغلقة وعليه A مجموعة مفتوحة في X.

مبرهنة (9.2.4)

كل مجموعة مغلقة في فضاء تبولوجي مرصوص تكون مرصوصة

البرهان :

لتكن A مجموعة مغلقة في الفضاء التبولوجي المرصوص (X,τ).

يجب أن نبرهن على أن A مجموعة مرصوصة . ليكن $\mathcal{F} = \{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة A في X

$\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ، G_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda \in \Lambda$

بما أن A مجموعة مغلقة في $X \Leftarrow A^c$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}' = A^c \cup \{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ غطاء مفتوح إلى المجموعة $A \cup A^c$

ولكن $X = A \cup A^c \Leftarrow \mathcal{F}'$ غطاء مفتوح إلى X

بما أن X فضاء مرصوص $\Leftarrow$ يوجد $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ بحيث أن $X = A^c \cup (\bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i})$

بما أن $A \subseteq X \Leftarrow A \subseteq A^c \cup (\bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i})$

بما أن $A \cap A^c = \phi \Leftarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \Leftarrow \{G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \cdots, G_{\lambda_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من الغطاء $\mathcal{F}$ إلى A.

$\Leftarrow$ A مجموعة مرصوصة في X

ملاحظة

ليس بالضرورة أن تكون كل مجموعة مرصوصة في فضاء مرصوص تكون مرصوصة والمثال التالي يوضح ذلك

مثال (10.2.4)

لتكن $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\phi,\{a\},X\}$ ولتكن $A=\{a,b\}$

نلاحظ أن A مجموعة مرصوصة في X لأنها منتهية وكذلك لنفس السبب X فضاء مرصوص

ولكن A ليست مغلقة في X لأن $A^c=\{c\}\notin\tau$

مبرهنة(11.2.4)

كل مجموعة مرصوصة في فضاء متري تكون مغلقة ومقيدة

البرهان :

لتكن A مجموعة مرصوصة في الفضاء المتري (X,d).

بما أن كل فضاء متري هو فضاء هاوزدورفي فان A تكون مجموعة مغلقة (حسب مبرهنة 8.2.5)

يجب أن نبرهن على أن المجموعة A مقيدة في X.

ليكن $x_0\in X$ $\Leftarrow$ $\beta_n(x_0)$ مجموعة مفتوحة في X لكل $n\in\mathbb{Z}^+$

ليكن $x\in A$، نضع $d(x,x_0)=\varepsilon$ ، بما أن $x\neq x_0$ $\Leftarrow$ $d(x,x_0)>0$

باستخدام خاصية أرخميدس يوجد $k\in\mathbb{Z}^+$ بحيث $\frac{1}{k}<\varepsilon$ $\Leftarrow$ $d(x,x_0)<\frac{1}{k}$ لكل $x\neq x_0$ $\Leftarrow$ $A\subseteq\bigcup_{k\in Z^+}\beta_k(x)$

بما أن A مجموعة مرصوصة $\Leftarrow$ يوجد عدد صحيح m بحيث أن $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}\beta_i(x)$

$\Leftarrow$ $A\subseteq\beta_1(x)\subseteq\beta_2(x)\subseteq\cdots\subseteq\beta_m(x)$ $\Leftarrow$ $A\subseteq\beta_m(x)$ $\Leftarrow$ A مجموعة مقيدة في X.

ملاحظة

عكس هذه المبرهنة ليس صحيحا دائما، بعبارة أخرى، ليس ضروريا أن تكون كل مجموعة مغلقة ومقيدة في فضاء متري تكون مرصوصة.

خاصية هاين - بوريل :

يقال للفضاء المتري بأنه يحقق خاصية هاين بوريل إذا كانت كل مجموعة مقيدة ومغلقة فيه تكون مرصوصة

مثال (12.2.4)

1. الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ يحقق خاصية هاين بوريل.
2. الفضاء المتري المبعثر (X,d) لا يحقق خاصية هاين بوريل في حالة X مجموعة غير منتهية .

تعريف (13.2.4)

يقال عن عائلة من المجموعات بأنها تحقق خاصية التقاطع المنتهي (Finite Intersection Properly) إذا كان تقاطع كل عائلة جزئية منتهية منها مجموعة غير خالية

مبرهنة (14.2.4)

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون مرصوصاً إذا وفقط إذا كانت كل عائلة من مجموعات مغلقة فيه وتحقق خاصية التقاطع المنتهي فأنها غير خالية التقاطع

البرهان :

نفرض (X,τ) فضاء مرصوص

لتكن $\mathcal{F}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة من المجموعات المغلقة في X وتحقق خاصية التقاطع المنتهي

سنبرهن بطريقة التناقض . نفرض $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\phi \Leftarrow (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c=\phi^c$

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c=X \Leftarrow$ $\{A^c{}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \Leftarrow$ غطاء مفتوح إلى X

$\Leftarrow$ يوجد $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\Lambda$ بحيث أن $X=\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}^c \Leftarrow \phi=\bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ لا تحقق خاصية التقاطع المنتهي وهذا تناقض $\Leftarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\phi$

الاتجاه الأخر: نفرض كل عائلة من مجموعات مغلقة وتحقق خاصية التقاطع المنتهي فأنها غير خالية التقاطع

ليكن $\mathcal{F}=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى X

$\Leftarrow X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ ، G_λ مجموعة مفتوحة في X لكل $\lambda\in\Lambda \Leftarrow \phi=(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda^c$

$\Leftarrow$ $\{G_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة من مجموعات مغلقة في X بحيث أن $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda^c=\phi$

وعليه هذه العائلة لا تحقق خاصية التقاطع المنتهي

$\Leftarrow$ يوجد $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$ بحيث أن $\bigcap_{i=1}^{n} G_{\lambda_i}^c=\phi \Leftarrow X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}^{n} G_{\lambda_i}$

وعليه $\Leftarrow$ $\{G_{\lambda_1},G_{\lambda_2},\cdots,G_{\lambda_n}\}$ غطاء جزئي منتهي من $\mathcal{F}$ إلى X

$\Leftarrow$ (X,τ) فضاء مرصوص.

تمارين (2.4)

1. هل توجد مجموعة مرصوصة في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ بحيث A' مجموعة غير منتهية وقابلة للعد ؟
2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي منتظَم ولتكن A مجموعة مرصوصة في X فان $\overline{A}$ تكون مرصوصة أيضا في X.
3. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مرصوص محلياً ولتكن $A\subseteq X$ بحيث أن كل مجموعة مرصوصة B في X تكون $A\cap B$ مجموعة مرصوصة في X . برهن على أن A مجموعة مغلقة في X
4. برهن على أن المجموعة $A=\{x\in\mathbb{Q}:2<x^2<3\}$ مغلقة ومقيدة ولكنها ليست مرصوصة في الفضاء المتري $(\mathbb{Q},d)$ حيث $d(x,y)=|x-y|$ لكل $x,y\in\mathbb{Q}$.
5. برهن على أن كل فضاء هاوزدورفي ومرصوص يكون T_3.

3.4 التراص القابل للعد Countable Compactness

تعريف (1.3.4)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه مرصوص عدياً (Countable Compact) إذا كان كل غطاء مفتوح وقابل للعد في X يحتوي على غطاء جزئي منتهي

مبرهنة (2.3.4)

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون مرصوص عدياً إذا وفقط إذا كانت كل عائلة قابلة للعد من مجموعات مغلقة فيه وتحقق خاصية التقاطع المنتهي تكون غير خالية التقاطع

البرهان :

مشابه لبرهان مبرهنة (12.2.4)

تعريف (3.3.4)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه يمتلك خاصية بولزانو – فايشتراس (Bolzano Weierstass Property) ويرمز لها بالرمز (BWP) إذا كانت كل مجموعة غير منتهية في X تمتلك نقطة غاية

مبرهنة (4.3.4)

كل فضاء مرصوص يمتلك BWP

البرهان :

لتكن (X,τ) فضاء تبولوجي مرصوص. ولتكن A مجموعة جزئية غير منتهية في X.

يجب أن نبرهن على أن $A' \neq \phi$.

سنبرهن بطريقة التناقض . نفرض $A' = \phi$

لكل $x \in X$, يوجد مجموعة مفتوحة G_x في X بحيث أن $V_x \cap (A|\{x\}) = \phi$

نضع $\mathcal{F} = \{V_x : x \in X\} \Leftarrow \mathcal{F}$ غطاء مفتوح إلى X

بما إن X فضاء مرصوص $\Leftarrow$ يوجد $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ بحيث إن $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}$

$\Leftarrow A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}$ لكل G_{x_i} تحتوي على أكثر من $A \Leftarrow A$ تحتوي على الأكثر n من النقاط

$\Leftarrow A$ مجموعة منتهية . وهذا تناقض $\Leftarrow A' \neq \phi$

مبرهنة(5.3.4)

كل فضاء مرصوص عدياً يمتلك BWP

البرهان

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مرصوص عدياً

4.4 التراص المحلي Local Compactness

تعريف (1.4.4)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه مرصوص محلياً (Local Compactness) إذا كان لكل $x \in X$ يوجد جوار V إلى x بحيث إن $\overline{V}$ مجموعة مرصوصة في X (أي أن لكل نقطة من نقاط X تمتلك على الأقل جوار انغلاقه مجموعة مرصوصة في X)

مبرهنة (2.4.4)

كل فضاء تبولوجي مرصوص يكون مرصوص محلياً والعكس غير صحيح دائماً

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا مرصوصا.

ليكن $x \in X$ نأخذ $V = X$. بما أن X مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow X$ جوار إلى النقطة x

بما إن X مجموعة مغلقة في $X \Leftarrow \overline{X} = X$

بما إن X فضاء مرصوص $\Leftarrow \overline{X}$ مرصوص $\Leftarrow X$ جوار إلى النقطة $x \in X$ وان $\overline{X}$ مرصوص

$\Leftarrow X$ فضاء مرصوص محلياً

والمثال التالي يوضح العكس غير صحيح

مثال (3.4.4)

الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ غير مرصوص(راجع المثال 2.2.5) ولكنه مرصوص محلياً.

لأنة لكل $x \in \mathbb{R}$ نأخذ $V = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ و $\varepsilon > 0$

$\Leftarrow V$ جوار إلى النقطة $x \Leftarrow \overline{V} = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ مجموعة مرصوصة في $\mathbb{R}$ لأنها مغلقة ومقيدة

$\Leftarrow (\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء مرصوص محلياً

مثال (4.4.4)

كل فضاء تبولوجي متماسك يكون مرصوص محلياً

الحل :

لأن كل فضاء تبولوجي متماسك يكون مرصوص وعليه يكون مرصوص محلياً

مثال (5.4.4)

برهن على إن كل فضاء تبولوجي مبعثر يكون مرصوص محلياً

الحل

نفرض (X,τ_D) فضاء تبولوجي مبعثر

ليكن $x \in X \Leftarrow \{x\}$ مجموعة مفتوحة في $X \Leftarrow \{x\}$ جوار إلى x

بما أن $\{x\}$ مجموعة مغلقة في $X \Leftarrow \overline{\{x\}} = \{x\}$

بما أن $\{x\}$ مجموعة منتهية $\Leftarrow \{x\}$ مجموعة مرصوصة $\Leftarrow \overline{\{x\}}$ مجموعة مرصوصة في X

وعليه (X,τ_D) مرصوص محلياً

مبرهنة (6.4.4)

كل فضاء جزئي مغلق في فضاء تبولوجي مرصوص محلياً يكون مرصوص محلياً

البرهان :

ليكن (Y,τ_Y) فضاءً جزئياً مغلقاً من الفضاء التبولوجي المرصوص محلياً (X,τ)

لتكن $x\in Y$

بما أن $Y\subseteq X \Leftarrow x\in X$

بما إن X فضاء مرصوص محلياً $\Leftarrow$ يوجد جوار مفتوح V إلى x في X بحيث أن $\overline{V}$ مجموعة مرصوصة في X

$\Leftarrow$ $V\cap Y$ جوار مفتوح إلى x في Y بحيث أن $\overline{V\cap Y}\subset\overline{V}$

بما إن $\overline{V\cap Y}$ مجموعة جزئية مغلقة من مجموعة مرصوصة $\overline{V}$ $\Leftarrow$ $\overline{V\cap Y}$ مجموعة مرصوصة

بما إن Y مجموعة مغلقة في X $\Leftarrow$ $\overline{(V\cap Y)}_Y=\overline{V\cap Y}$

وعليه لكل نقطة من نقاط Y جوار انغلاقه مرصوص

مبرهنة (7.4.4)

كل فضاء تبولوجي هاوزدورفي يكون مرصوص محلياً إذا وفقط إذا كانت كل نقطة من نقاط X تكون نقطة داخلية لمجموعة مرصوصة في X. بعبارة أخرى إذا وفقط إذا كانت لكل $x\in X$ توجد مجموعة مرصوصة A في X وان $x\in A^{\circ}$

البرهان :

نفرض X فضاء مرصوص محلياً

ليكن $x\in X$ $\Leftarrow$ يوجد جوار V إلى x بحيث أن $\overline{V}$ مجموعة مرصوصة

بما إن $x\in V\subset\overline{V}$ $\Leftarrow$ $\overline{V}$ جوار إلى النقطة x $\Leftarrow$ $x\in\left(\overline{V}\right)^{\circ}$

الاتجاه الآخر. نفرض لكل نقطة من نقاط X تكون نقطة داخلية لمجموعة مرصوصة في X .

ليكن $x\in X$ $\Leftarrow$ توجد مجموعة مرصوصة A في X بحيث أن $x\in A^{\circ}$ $\Leftarrow$ A جوار إلى x في X

بما إن X فضاء هاوزدورفي ، A مجموعة مرصوصة X $\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة في X

$\Leftarrow$ $A=\overline{A}$ $\Leftarrow$ $\overline{A}$ مجموعة مرصوصة في X $\Leftarrow$ X فضاء مرصوص محلياً.

تمارين (4.4)

1. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي هاوزدورفي مرصوص محلياً ولتكن A,B مجموعتين متنافيتين مرصوصتين في X .
   برهن على أن A,B لهما جوارين متنافيتين انغلاقها مجموعتين مرصوصتين
2. برهن على أن كل فضاء جزئي مفتوح في فضاء تبولوجي هاوزدورفي مرصوص محلياً يكون مرصوص محلياً.
3. برهن على أن كل فضاء هاوزدورفي ومرصوص محليا يكون منتظم.
4. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي منتظم ومرصوص محلياً لكل $x\in X$ ، نعرف

$$\beta(x)=\{V\subseteq X : x \text{ مجموعة مغلقة، مرصوصة وجوار إلى } V\}$$

برهن على أن $\beta(x)$ قاعدة محلية عند النقطة x.

5.4 الاستمرارية والتراص Continuity and Compactness

مبرهنة (1.5.4)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءً تبولوجياً , ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت X فضاء مرصوصا فأن $f(X)$ تكون مجموعة مرصوصة في Y ، بعبارة أخرى الصورة المستمرة لفضاء مرصوص تكون مجموعة مرصوصة.

البرهان :

لتكن $\mathcal{F}=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ غطاء مفتوح إلى $f(X)$ في Y $\Leftarrow$ $f(X)\subseteq\bigcup_{\lambda\cup\Lambda}G_\lambda$, $G_\lambda\in\tau_2$ لكل $\lambda\in\Lambda$

$$X\subseteq f^{-1}(f(X))\subseteq f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(G_\lambda)$$

بما أن $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(G_\lambda)\subseteq X$ $\Leftarrow$ $X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(G_\lambda)$

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(G_\lambda)$ مجموعة مفتوحة في X **لكل** $\lambda\in\Lambda$ وعليه $\{f^{-1}(G_\lambda)\}$ غطاء مفتوح إلى X .

بما أن X فضاء مرصوص $\Leftarrow$ يوجد $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$ بحيث أن $X=\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(G_{\lambda_i})$

$\Leftarrow$ $X=f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i})$ $\Leftarrow$ $f(X)=f(f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}))\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\lambda_i}$ $\Leftarrow$ $f(X)$ مجموعة مرصوصة في Y.

نتيجة (2.5.4)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءً تبولوجياً , ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت A مجموعة مرصوصة في X فأن $f(A)$ تكون مجموعة مرصوصة في Y

البرهان :

نعرف الدالة $f:A\to Y$ بالصيغة $f_A(x)=f(x)$ لكل $x\in A$ ،(أي أن f_A قصر f على A)

$\Leftarrow$ f مستمرة بما أن (A,τ_A) فضاء جزئي مرصوص في X $\Leftarrow$ $f(A)$ مجموعة مرصوصة في Y

ملاحظة

ليس بالضرورة أن تكون الصورة العكسية المستمرة لمجموعة مرصوصة تكون مجموعة مرصوصة. المثال التالي يوضح ذلك

مثال (3.5.4)

ليكن $(\mathbb{R},\tau_u)$ فضاء تبولوجيا اعتياديا ولتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرفة بالصيغة $f(x)=2$ لكل $x\in\mathbb{R}$

.نلاحظ أن الدالة f مستمرة لأنها ثابتة والمجموعة $A=\{1,2,3\}$ مرصوصة في $\mathbb{R}$ لأنها منتهية. ولكن $f^{-1}(A)=\mathbb{R}$ ليست مرصوصة

مبرهنة (4.5.4)

التراص صفة تبولوجية

البرهان :

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجياً بحيث أن $X \cong Y$ يجب أن نبرهن X فضاء مرصوص إذا وفقط إذا كان Y فضاء مرصوص

بما إن $X \cong Y$ ⇐ يوجد تشاكل تبولوجي $f: X \to Y$

نفرض X فضاء مرصوص

بما أن الدالة f مستمرة ⇐ $f(X)$ مجموعة مرصوصة في Y

بما أن الدالة f شاملة ⇐ $f(X)=Y$ ⇐ Y فضاء مرصوص

الاتجاه الآخر : نفرض Y فضاء مرصوص

بما أن الدالة $f^{-1}: Y \to X$ مستمرة ⇐ $f^{-1}(Y)=X$ فضاء مرصوص

مبرهنة (5.5.4)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجياً ولتكن $f: X \to Y$ دالة تقابلية مستمرة . إذا كان X فضاء مرصوص وكان Y فضاء هاوزدورفي فأن f يكون تشاكل تبولوجي

البرهان :

يكفي أن نبرهن الدالة f مغلقة . لتكن A مجموعة مغلقة في X

بما ان X فضاء مرصوص ⇐ المجموعة A مرصوصة

بما أن الدالة f مستمرة ⇐ $f(A)$ مجموعة مرصوصة في Y

بما أن الفضاء Y هاوزدورفي ⇐ $f(A)$ مجموعة مغلقة في Y

الدالة f مغلقة وعليه الدالة f تشاكل تبولوجي

مبرهنة (6.5.4)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاء تبولوجيا ولتكن $f: X \to Y$ دالة شاملة مفتوحة ومستمرة. إذا كان X فضاء مرصوص محلياً وكان Y فضاء هاوزدورفي فأن Y يكون أيضا مرصوص محلياً

البرهان

لتكن $y \in Y$

بما أن الدالة f شاملة ⇐ يوجد $x \in X$ بحيث أن $f(x)=y$

بما إن X فضاء مرصوص محلياً ⇐ توجد مجموعة مفتوحة V إلى x بحيث إن $\bar{V}$ مجموعة مرصوصة

بما أن $x \in V \subset \bar{V} \Leftarrow y=f(x) \in f(v) \subset f(\bar{V})$

بما أن الدالة f مفتوحة ⇐ $f(V)$ مجموعة مفتوحة في Y ⇐ $f(\bar{V})$ جوار إلى y

بما أن الدالة f مستمرة , $\bar{V}$ مجموعة مرصوصة في X ⇐ $f(\bar{V})$ مجموعة مرصوصة في Y. بما أن Y فضاء هاوزدورفي ⇐ $f(\bar{V})$ مجموعة مغلقة في X ⇐ $f(\bar{V}) = \overline{f(\bar{V})}$

$\Leftarrow$ $\overline{f(\overline{V})}$ مجموعة مرصوصة في Y $\Leftarrow$ لكل $y \in Y$ يوجد جوار $f(\overline{V})$ إلى y بحيث أن
$\overline{f(\overline{V})}$ مجموعة مرصوصة في Y $\Leftarrow$ Y فضاء مرصوص محلياً

تعريف (6.5.4)

لتكن X مجموعة غير خالية . يقال عن الدالة $f: X \to \mathbb{R}$ بأنها مقيدة (Bounded) إذا كان $f(X)$ مجموعة مقيدة في $\mathbb{R}$

بما أن $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ وعليه فأن الدالة $f: X \to \mathbb{R}$ تكون مقيدة إذا وجد عدد حقيقي موجب M (أي أن $M > 0$) بحيث أن $|f(x)| < M$ لكل $x \in X$

مبرهنة (7.5.4)

ليكن (X, τ) فضاءً مرصوصاً ولتكن $f: X \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة فأن

1. الدالة f تكون مقيدة
2. إذا كانت $\alpha = \inf\{f(x) : x \in X\}$ ، $\beta = \sup\{f(x) : x \in X\}$ فأنه يوجد $a, b \in X$ بحيث أن $f(a) = \alpha$ $f(b) = \beta$

البرهان:

بما أن X فضاء مرصوص و الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f(X)$ مجموعة مرصوصة في R
بما أن كل مجموعة مرصوصة في R تكون مغلقة ومقيدة (مبرهنة هاين ـ بوريل)
$\Leftarrow$ $f(X)$ تكون مقيدة
بما أن $f(X)$ مقيدة $\Leftarrow$ يوجد $\alpha, \beta \in \Re$ وكذلك بما أن $f(X)$ مغلقة $\Leftarrow$ $\alpha, \beta \in f(X)$
نختار $a \in f^{-1}(\{\alpha\})$, $b \in f^{-1}(\{\beta\})$ $\Leftarrow$ $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$

مبرهنة(8.5.4)

ليكن كل من $(X, d_1), (Y, d_2)$ فضاءً مترياً ولتكن $f: X \to Y$ دالة مستمرة. إذا كان X فضاء مرصوصا فأن f مستمرة بانتظام .

البرهان :

ليكن $\varepsilon > 0$: بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ لكل $p \in X$ ، يوجد $\delta_p > 0$ بحيث أن لكل $x \in X$

$$d_1(x, p) < \delta_p \quad \text{يؤدي إلى} \quad d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

العائلة $\{\beta_{\frac{1}{2}\delta_p}(p) : p \in X\}$ غطاء مفتوح إلى X ، بما أن X فضاءً مرصوصَ $\Leftarrow$ توجد $p_1, p_2, \cdots, p_n \in X$ بحيث أن $X = \bigcup_{i=1}^{n} \beta_{\frac{1}{2}\delta_{p_i}}(p_i)$: نضع $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{p_1}, \cdots, \delta_{p_n}\}$ $\Leftarrow$ $\delta > 0$

ليكن $x, y \in X$ بحيث أن $d_1(x, y) < \delta$ $\Leftarrow$ يوجد $k \in Z^+$ ، $1 \le k \le n$ بحيث أن $x \in \beta_{\frac{1}{2}\delta_{p_k}}(p_k)$

وعليه $d_1(x, p_k) < \frac{1}{2}\delta_{p_k}$ وكذلك $d_1(y, p_k) \le d_1(y, x) + d_1(x, p_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{p_k} \le \frac{1}{2}\delta_{p_k}$

$$d_2(f(x),f(y)) \le d_2(f(x),f(p_k)) + d_2(f(p_k),f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وعليه لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث أن لكل $x, y \in X$

$d_1(x,y) < \delta$ يؤدي إلى $d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$

$\Leftarrow$ f مستمرة بانتظام .

نتيجة(9.5.4)

ليكن $(\mathbb{R},d_u)$ فضاء متريا اعتياديا. إذا كانت الدالة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ مستمرة فأنها مستمرة بانتظام.

تمارين (5.4)

1. ليكن كل من $(X,d_1),(Y,d_2),(Z,d_3)$ فضاءَ متريا َ بحيث (Y,d_2) فضاء مرصوصا ولتكن $g:Y \to Z$ دالة تقابلية برهن على أن الدالة $f:X \to Y$ مستمرة بانتظام إذا كانت الدالة $g \circ f$ دالة مستمرة بانتظام .

5. الترابط Connectedness

مفهوم الترابط من المفاهيم المهمة في الفضاءات التبولوجية و له دور فعال في التحليل الرياضي ، حيث له إسهامات فاعلة تعرف بالتبولوجيا الجبرية ويعود الفضل إلى لينز **(Lennes)** عام 1911 وهاوزدورف **(Hausdorff)** عام 1914 في تطوير مفهوم المجموعة المترابطة والمركبات المترابطة الى شكلها الحالي . أيضا ادخل هان **(Hahn)** عام 1914 مفهوم الفضاءات المترابطة محليا . ولذلك سوف نقدم في هذه المحاضرة مفهوم المجموعات المنفصلة، المجموعات المترابطة في الفضاءات المترية و المبرهنات المكافئة للترابط، الاستمرارية و الترابط.

1.5 المجموعات المنفصلة Separated Sets

تعريف (1.1.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً , وليكن كل من A, A_1, A_2 مجموعة جزئية من المجموعة X . يقال عن المجموعتين A_1, A_2 بأنها فصل أو تفريق **(Separation**) إلى المجموعة A إذا تحققت الشروط الآتية:

1. $A_1 \neq \phi, \quad A_2 \neq \phi$
2. $A = A_1 \bigcup A_2$
3. كل من A_1, A_2 لا تحتوي على نقطة غاية **(Limit point**) للأخرى . والشرط (3) يكافئ الشرط الآتي

$$A_1 \bigcap \overline{A_2} = \phi, \quad \overline{A_1} \bigcap A_2 = \phi$$

ويكافئ أيضا الشرط $\left(A_1 \bigcap \overline{A_2}\right) \bigcup \left(\overline{A_1} \cap A_2\right) = \phi$.

ويسمى هذا الشرط بشرط هاوزدورف - لينز للفصل (**Hausdorff-Lennes Separation Condition**).

ومثل هاتين المجموعتين (أي أن A_1, A_2) يقال عنهما إنهما منفصلتان أو مفترقتان **(Separated)**

مثال (2.1.5)

في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R}, \tau_u)$

1. المجموعتان $A_1 = (-\infty, 0), \quad A_2 = (0, \infty)$ متنافيتان لأن $A_1 \bigcap A_2 = \phi$ ولكنهما غير منفصلتان لأن $\overline{A_1} \bigcap A_2 = (-\infty, 0] \bigcap (0, \infty) = \{0\} \neq \phi$
2. المجموعتان $B_1 = (2,3), \quad B_2 = (3,4)$ منفصلتان لأن $B_1 \neq \phi, \quad B_2 \neq \phi$ وان

$$B_1 \bigcap \overline{B_2} = (2,3) \bigcap [3,4] = \phi, \quad \overline{B_1} \bigcap B_2 = [2,3] \bigcap (3,4) = \phi$$

مبرهنة (3.1.5)

ليكن (Y, τ_Y) فضاءً جزئياً من الفضاء التبولوجي (X, τ) ولتكن $A, B \subseteq Y$ فأن المجموعتان A, B منفصلتان بالنسبة للتبولوجي τ_Y إذا وفقط إذا كانت منفصلتان بالنسبة للتبولوجي τ

البرهان :

$$(\overline{A_Y} \cap B) \cup (A \cap \overline{B_Y}) = \phi \quad \Leftrightarrow \quad ((\overline{A} \cap Y) \cap B) \cup (A \cap (\overline{B} \cap Y)) = \phi$$

$$\Leftrightarrow \quad (\overline{A} \cap (Y \cap B)) \cup ((A \cap Y) \cap \overline{B}) = \phi \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \phi$$

مبرهنة (4.1.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A,B,C,D \subseteq X$ بحيث أن $C \subseteq A, \quad D \subseteq B$, إذا كانت A,B منفصلتان فأن C,D منفصلتان

البرهان:

بما أن $C \subseteq A, \quad D \subseteq B \quad \Leftarrow \quad \overline{C} \subseteq \overline{A}, \quad \overline{D} \subseteq \overline{B}$

بما أن $A \cap \overline{B} = \phi, \quad \overline{A} \cap B = \phi \quad \Leftarrow \quad C \cap \overline{D} = \phi, \quad \overline{C} \cap D = \phi \quad \Leftarrow$ C,D منفصلتان

مبرهنة (5.1.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $A,B \subseteq X$

1. إذا كانت كل من A,B مجموعة مغلقة في X فأن A,B منفصلتان إذا وفقط إذا كانت $A \cap B = \phi$
2. إذا كانت كل من A,B مجموعة مفتوحة في X فأن A,BA منفصلتان إذا وفقط إذا كانت $A \cap B = \phi$

البرهان :

1. نفرض A,B منفصلتان $\Leftarrow$ من التعريف نستنتج أن $A \cap B = \phi$

الاتجاه الآخر. نفرض $A \cap B = \phi$

بما أن كل من A,B مغلقة $\Leftarrow \quad \overline{A} = A, \quad \overline{B} = B$

$$A \cap \overline{B} = A \cap B = \phi, \quad \overline{A} \cap B = A \cap B = \phi$$

$\Leftarrow$ A,B منفصلتان

2. نفرض A,B منفصلتان $\Leftarrow$ من التعريف نستنتج أن $A \cap B = \phi$

الاتجاه الآخر. نفرض $A \cap B = \phi$

بما أن كل من A,B مجموعة مفتوحة في X $\Leftarrow$ كل من A^c, B^c مجموعة مغلقة في X

$\Leftarrow \quad \overline{A^c} = A^c, \quad \overline{B^c} = B^c$

بما أن $A \cap B = \phi \Leftarrow \quad A \subset B^c, \quad B \subset A^c$

$\Leftarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B^c} = B^c, \quad \overline{B} \subset \overline{A^c} = A^c \quad \Leftarrow \quad \overline{A} \cap B = \phi, \quad \overline{B} \cap A = \phi$

$\Leftarrow$ A,B منفصلتان

مبرهنة (6.1.5)

ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً ولتكن $A,B \subseteq X$ بحيث أن $A \cap B = \phi$ فأن A,B منفصلتان إذا وفقط إذا كانت كل من A,B مفتوحة ومغلقة في الفضاء الجزئي $Y = A \cup B$

البرهان :

نفرض A,B مجموعتان منفصلتان في $X \quad \Leftarrow \quad A \cap \overline{B} = \phi, \quad \overline{A} \cap B = \phi$

$$\overline{A_Y} = \overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup \phi = A$$

$\Leftarrow$ A مغلقة في Y وبالمثل نبرهن المجموعة B مغلقة في Y

بما أن $A \cap B = \phi, \quad A \cup B = Y$

$\Leftarrow \quad B = A_Y{}^c \Leftarrow A_Y{}^c$ مجموعة مغلقة في $Y \Leftarrow A$ مفتوحة في Y
وبالمثل نبرهن B مجموعة مفتوحة في Y.
الاتجاه الآخر. نفرض كل من A,B مجموعة مفتوحة و مغلقة في Y

$$A = \overline{A_Y} = \overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup (\overline{A} \cap B)$$

بما أن $A \cap B = \phi \Leftarrow \overline{A} \cap B = \phi$ وبالمثل نبرهن $A \cap \overline{B} = \phi$
$\Leftarrow$ المجموعتان A,B منفصلتان .

تمارين (1.5)

1. في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$. إذا كانت $A=(0,1),\quad B=(1,2),\quad C=[1,2]$ برهن على أن A,B مجموعتان منفصلتان. ولكن المجموعتين A,C ليستا منفصلتين
2. ليكن (X,τ) فضاءَ تبولوجياً ولتكن $A,B \subseteq X$. إذا كان كل من A,B مجموعة مفتوحة أو كل منها مجموعة مغلقة فأن المجموعتين $A|B,\quad B|A$ منفصلتان . برهن ذلك.
3. ليكن (X,τ) فضاءَ تبولوجيا , ولتكن $A,B \subseteq X$ بحيث أن $A \cup B = X$. إذا كانت A^c,B^c مجموعتين نفصلتين. برهن على أن $\overline{C} = \left(\overline{C \cap A} \cap A\right) \cup \left(\overline{C \cap B} \cap B\right)$ لكل $C \subset X$.

2.5 المجموعات المترابطة Connected Sets

حدسيا الفضاء التبولوجي مترابط إذا كان "قطعة واحدة" ولكن كيف يجب تفسير " قطعة" تبولوجيا ؟ من المعقول أن تكون المجموعة الجزئية المفتوحة أو المغلقة من "قطعة " مفتوحة او مغلقة على التوالي من كامل الفضاء X. من خلال مبرهنات سابقة يجب أن نتوقع أن " قطعة" هي مجموعة جزئية مفتوحة ومغلقة في X. والتعريف التالي يبين لنا هذا المفهوم .

تعريف (1.2.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجياً ولتكن $A \subseteq X$ يقال عن المجموعة A بأنها غير مرتبطة **(Disconnected)** إذا كانت A تساوي اتحاد مجموعتين منفصلتين. بعبارة أخرى إذا وجدت مجموعتين A_1, A_2 بحيث أن $A_1 \neq \phi, A_2 \neq \phi$ وان $A = A_1 \cup A_2,\quad \overline{A_1} \cap A_2 = \phi,\quad A_1 \cap \overline{A_2} = \phi$. ويقال عن المجموعة A بأنها مترابطة (Connected) إذا لم تكن غير مترابطة. ويقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه غير مترابط إذا كانت المجموعة X غير مترابطة.
يتضح من التعريف مباشرة إن كلاً من المجموعة الخالية والمجموعة الأحادية هي مجموعة مترابطة

مبرهنة (2.2.5)

ليكن (Y,τ_Y) فضاءَ جزئياَ من الفضاء التبولوجي (X,τ) ولتكن $A \subset Y$ فأن المجموعة A تكون مترابطة بالنسبة إلى τ_Y إذا وفقط إذا كانت مترابطة بالنسبة إلى τ

البرهان :

مباشرة من المبرهنة (3.1.5)

مبرهنة (3.2.5)

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون غير مترابط إذا وفقط إذا توجد مجموعة جزئية فعلية غير خالية A من X بحيث أن A مفتوحة ومغلقة في X

البرهان:

نفرض الفضاء التبولوجي (X,τ) غير مترابط

$\Leftarrow$ توجد مجموعتين غير خاليتين A,B في X بحيث أن $A\cap\overline{B}=\phi$

$A\cup B=X,\quad \overline{A}\cap B=\phi$

بما أن $A\cap B=\phi\Leftarrow A\subset\overline{A}$

بما أن $A\cup B=X\quad A\cap B=\phi,\Leftarrow A=B^c$ و B مجموعة غير خالية

$\Leftarrow A$ مجموعة جزئية فعلية غير خالية من X

بما أن $A\cup B\subset A\cup\overline{B}\Leftarrow B\subset\overline{B}$

بما أن $X\subset A\cup\overline{B}\Leftarrow A\cup B=X$ ولكن $A\cup\overline{B}\subset X\quad\Leftarrow A\cup\overline{B}=X$

بما أن $A\cap\overline{B}=\phi\quad A\cup\overline{B}=X,\Leftarrow A=\left(\overline{B}\right)^c$ وبالمثل نبرهن $B=\left(\overline{A}\right)^c$

بما أن كل من $\overline{A},\ \overline{B}$ مجموعة مغلقة في $X\Leftarrow$ كل من A,B مجموعة مفتوحة في X

بما أن $A=B^c\Leftarrow A$ مجموعة مغلقة في X وعليه A مجموعة جزئية فعلية غير خالية مفتوحة ومغلقة في X

الاتجاه الآخر. لتكن A مجموعة جزئية فعلية غير خالية مفتوحة ومغلقة في X يجب أن نبرهن على أن X غير مترابط

نفرض $B=A^c\Leftarrow\quad B$ مجموعة جزئية غير خالية في X وبسهولة يمكن إثبات

$A\cup B=X,\quad \overline{A}\cap B=\phi,\quad A\cap\overline{B}=\phi$

$\Leftarrow$ الفضاء X غير مترابط

نتيجة (4.2.5)

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون مترابط إذا وفقط إذا كانت المجموعة X هي فقط المجموعة الجزئية غير الخالية من X والتي تكون مغلقة ومفتوحة في X .

نتيجة (5.2.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي ولتكن $Y\subset X$ فأن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) يكون غير مترابط إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية فعلية غير خالية A في Y بحيث تكون مفتوحة ومغلقة في Y, وبعبارة أخرى إذا وفقط إذا توجد مجموعة مفتوحة G في X ومجموعة مغلقة F في X بحيث أن $A=G\cap Y,\quad A=F\cap Y$.

مثال(6.2.5)

1. الفضاء التبولوجي المبعثر (X,τ) يكون غير مترابط إذا كانت X تحتوي على أكثر من عنصر. لان كل مجموعة جزئية فعلية غير خالية من X تكون مغلقة ومفتوحة.
2. الفضاء التبولوجي المتماسك (X,τ) يكون مترابط . لان المجموعة X هي فقط المجموعة غير الخالية المفتوحة

والمغلقة .

3. ليكن $X=\{a,b,c,d\}$ ، $\tau=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},X\}$

نلاحظ أن المجموعات المغلقة في X هي $X,\{b,c,d\},\{c,d\},\{d\},\phi$

لا توجد مجموعة جزئية فعلية غير خالية من X تكون مفتوحة ومغلقة فان X مترابط .

4. ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، $\tau=\{\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\},X\}$

نلاحظ أن X غير مترابط لان المجموعة $\{a\}$ مجموعة جزئية فعلية غير خالية مفتوحة ومغلقة في X

وإذا كانت $A=\{b,d,e\}$ فان A مجموعة مترابط في X. لان $\tau_A=\{\phi,\{d\},A\}$ وعليه المجموعة A هي المجموعة الوحيدة المفتوحة والمغلقة في A

مثال(7.2.5)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (X,τ_2) فضاء تبولوجيا بحيث أن $\tau_1\subseteq\tau_2$

1. إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ_1) غير مترابط فان الفضاء التبولوجي (X,τ_2) غير مترابط أيضا.
2. إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ_2) مترابط فان الفضاء التبولوجي (X,τ_1) مترابط أيضا.

البرهان :

1. بما أن (X,τ_1) غير مترابط فانه توجد مجموعة جزئية فعلية غير خالية A في X بحيث تكون مفتوحة ومغلقة بالنسبة للتبولوجي τ_1 $\Leftarrow$ $A,A^c\in\tau_1$

بما أن $\tau_1\subseteq\tau_2$ $\Leftarrow$ $A,A^c\in\tau_2$ وعليه A مجموعة مفتوحة ومغلقة في X بالنسبة للتبولوجي τ_2

$\Leftarrow$ (X,τ_2) غير مترابط .

2. سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض (X,τ_1) غير مترابط .

باستخدام (1) يكون (X,τ_2) غير مترابط وهذا تناقض .

مبرهنة(8.2.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا . فان العبارات الآتية متكافئة

1. X فضاء غير مترابط
2. X يساوي اتحاد مجموعتين غير خاليتين متنافيين مفتوحتين في X .
3. X يساوي اتحاد مجموعتين غير خاليتين متنافيين مغلقتين في X .

البرهان :

$(1)\Rightarrow(2)$

بما أن X فضاء غير مترابط $\Leftarrow$ توجد مجموعة جزئية فعلية غير خالية A من X بحيث أن A مفتوحة ومغلقة في X .

نضع $B=A^c$ $\Leftarrow$ B مجموعة مفتوحة في X وان $A\cap B=\phi$ وكذلك $A\cup B=X$ وعليه X يساوي اتحاد مجموعتين غير خاليتين متنافيين مفتوحتين في X .

$(2)\Rightarrow(3)$

نفرض A,B مجموعتين غير خاليتين متنافيين مفتوحتين في X وكذلك $A\cup B=X$.

$\Leftarrow$ A^c,B^c مجموعتين مغلقتين في X وان

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = X^c = \phi$ وكذلك $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \phi^c = X$

$(3) \Leftarrow (1)$

نفرض A,B مجموعتين غير خاليتين متنافيين مغلقتين في X وكذلك $A \cup B = X$.

$\Leftarrow A = B^c \Leftarrow A$ مجموعة مفتوحة في X

$\Leftarrow A$ مجموعة مفتوحة ومغلقة في X .

بما أن $B \neq \phi \Leftarrow A$ مجموعة جزئية فعلية في $X \Leftarrow X$ فضاء غير مترابط.

مبرهنة(9.2.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A \subseteq X$ فان المجموعة A تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا توجد مجموعتين غير خاليتين G و H مفتوحتين (مغلقتين) في X بحيث أن

1. $A \cap G \neq \phi$ ، $A \cap H \neq \phi$
2. $A \subseteq G \cup H$ ، $G \cap H \subseteq A^c$

البرهان:

المجموعة A تكون غير مترابطة إذا وفقط إذا توجد مجموعتان غير خاليتين G و H مفتوحتان (مغلقتان) في X بحيث أن $G \cup H = X$

$\Leftarrow G \cap A \neq \phi,\ H \cap A \neq \phi,\ (G \cap A) \cap (H \cap A) = \phi,\ (G \cap A) \cup (H \cap A) = A$

الآن :

$$A \subseteq G \cup H \quad \Leftrightarrow \quad (G \cup H) \cap A = A \quad \Leftrightarrow \quad (G \cap A) \cup (H \cap A) = A$$

$$G \cap H \subseteq A^c \quad \Leftrightarrow \quad (G \cap H) \cap A = \phi \quad \Leftrightarrow \quad (G \cap A) \cap (H \cap A) = \phi$$

مبرهنة (10.2.5)

الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون مترابط إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية فعلية A غير خالية من X فان $\partial(A) \neq \phi$.

البرهان :

نفرض كل مجموعة جزئية فعلية غير خالية A من X بحيث أن $\partial(A) \neq \phi$. يجب أن نبرهن أن X فضاء مترابط .

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض الفضاء X غير مترابط $\Leftarrow$ باستخدام مبرهنة (8.6.2) توجد مجموعة جزئية فعلية A غير خالية من X بحيث ان A مغلقة ومفتوحة في $X \Leftarrow A = \text{int}(A) = \overline{A}$

ولكن $\partial(A) = \overline{A} \setminus \text{int}(A) \Leftarrow \partial(A) = \phi$ وهذا تناقض $\Leftarrow X$ فضاء مترابط .

الاتجاه الأخر : نفرض X مترابط . سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض وجود مجموعة جزئية فعلية غير خالية A من X بحيث أن $\partial(A) = \phi$.

$\overline{A} = \text{int}(A) \cup \partial(A) = A \cup \partial(\overline{A}) \Leftarrow \overline{A} = \text{int}(A) = A \Leftarrow A$ مجموعة جزئية فعلية غير خالية مفتوحة ومغلقة في $X \Leftarrow X$ فضاء غير مترابط وهذا تناقض.

مبرهنة (11.2.5)

لتكن A مجموعة مترابطة في الفضاء التبولوجي (X,τ) بحيث أن $A \subseteq A_1 \cup A_2$ ، وان A_1 ، A_2 مجموعتين منفصلتين ، فان $A \subseteq A_1$ أو $A \subseteq A_2$

البرهان :

بما أن A_1 ، A_2 منفصلتين فان $A_1 \cap \overline{A_2} = \phi, \quad \overline{A_1} \cap A_2 = \phi$

بما أن $A \subseteq A_1 \cup A_2 \quad \Leftarrow \quad A = A \cap (A_1 \cup A_2) = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_1)$

يجب أن نبرهن $A \cap A_1 = \phi$ أو $A \cap A_2 = \phi$

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض $A \cap A_1 \neq \phi$ و $A \cap A_2 \neq \phi$

$$(A \cap A_1) \cap \overline{(A \cap A_2)} \subseteq (A \cap A_1) \cap (\overline{A} \cap \overline{A_2}) = (A \cap \overline{A}) \cap (A_1 \cap \overline{A_2}) = (A \cap \overline{A}) \cap \phi = \phi$$

وبالمثل نبرهن $\overline{(A \cap A_1)} \cap (A \cap A_2) = \phi$ وعليه المجموعتين $A \cap A_1$ ، $A \cap A_2$ منفصلتين

$\Leftarrow$ A تساوي اتحاد مجموعتين منفصلتين $\Leftarrow$ A مجموعة مترابطة وهذا تناقض .

وعليه أما $A \cap A_1 = \phi$ أو $A \cap A_2 = \phi$

إذا كانت $A \cap A_1 = \phi$ فان $A = A \cap A_2 \quad \Leftarrow \quad A \subseteq A_2$

أو إذا كانت $A \cap A_2 = \phi$ فان $A = A \cap A_1 \quad \Leftarrow \quad A \subseteq A_1$

نتيجة (12.2.5)

لتكن A مجموعة مترابطة في الفضاء التبولوجي (X,τ) بحيث أن $A \subseteq A_1 \cup A_2$ ، وان A_1 ، A_2 مجموعتين متنافيتين مفتوحتين(مغلقتين) ، فان A_1 ، A_2 منفصلتين

مبرهنة(13.2.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن A مجموعة مترابطة في X. إذا كانت B مجموعة جزئية في X بحيث أن $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ فان B مجموعة مترابطة في X

البرهان :

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض أن المجموعة B غير مترابطة

$\Leftarrow$ B تساوي اتحاد مجموعتين منفصلتين ، أي يوجد $B_1, B_2 \in X$ بحيث أن

$B_1 \neq \phi, \quad B_2 \neq \phi$ ، $B_1 \cup B_2 = B$ ، $B_1 \cap \overline{B_2} = \phi, \quad \overline{B_1} \cap B_2 = \phi$

بما أن $A \subseteq B \quad \Leftarrow \quad A \subseteq B_1 \cup B_2$. باستخدام المبرهنة (11.2.5) نحصل على $A \subseteq B_1$ أو $A \subseteq B_2$

نفرض أن $A \subseteq B_1 \quad \Leftarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{B_1} \quad \Leftarrow \quad \overline{A} \cap B_2 \subseteq \overline{B_1} \cap B_2 = \phi \quad \Leftarrow \quad \overline{A} \cap B_2 = \phi$.

وكذلك $B_1 \cup B_2 = B \subseteq \overline{A} \quad \Leftarrow \quad B_2 \subseteq B \subseteq A \quad \Leftarrow \quad \overline{A} \cap B_2 = B_2 \quad \Leftarrow \quad B_2 = \phi$

وهذا تناقض لان $B_2 \neq \phi$ وعليه B يجب أن تكن مترابطة

نتيجة(14.2.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن A مجموعة مترابطة في X فان $\overline{A}$ تكون أيضا مجموعة مترابطة في X .

مبرهنة (15.2.5)

لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ ، فان A مجموعة مترابطة إذا وفقط إذا كانت A فترة .

البرهان :

لتكن A مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}$. إذا كانت A مجموعة خالية أو أحادية ينتهي البرهان .

أما إذا كانت A تحتوي على الأقل عنصرين. سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض أن A ليست فترة

اذن يوجد $a,b \in A$ ، $p \notin A$ بحيث $a<p<b$

ليكن $G=(p,\infty)\cap A \quad \Leftarrow \quad G\subseteq A$

بما أن $b\in G \quad \Leftarrow \quad G\neq\phi$

بما أن $a\notin G, \quad a\in A \quad \Leftarrow$ G مجموعة جزئية فعلية من A .

بما أن (p,∞) مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ فان G مجموعة مفتوحة في A

وبالمثل إذا كانت $H=(-\infty,p)\cap A$ فان H مجموعة جزئية فعلية مفتوحة في A

وبسهولة إثبات $\overline{G}\cap H=\phi, \quad G\cap\overline{H}=\phi, \quad G\cup H=A \quad \Leftarrow$ A مجموعة غير مترابطة

وهذا تناقض $\Leftarrow$ A فترة في $\mathbb{R}$

الاتجاه الأخر : نفرض A فترة في $\mathbb{R}$

سنبرهن بطريقة التناقض : نفرض أن المجموعة A غير مترابطة

اذن توجد مجموعتين متنافيتين غير خاليتين M,N مغلقتين في A بحيث $A=M\cup N$

ليكن $a\in M, \quad b\in N$

بما أن $M\cap N=\phi$ فان $a\neq b$ وعليه أما $a<b$ أو $b<a$

دون فقدان في العمومية ، نفرض $a<b$

بما أن A فترة في $\mathbb{R}$، وان $a,b\in A$ ، نحصل على $[a,b]\subseteq A=M\cup N$

ليكن $p=\sup\{x : x\in[a,b]\cap M\}$

بما ان $[a,b]$ مجموعة مغلقة فان $p\in[a,b]$ ، أي ان $a\le p\le b$

لكل $\varepsilon>0$ يوجد $x\in[a,b]\cap M$ بحيث ان $p-\varepsilon<x\le p$ وهذا يعني كل جوار إلى p يحتوي نقطة من $[a,b]\cap M$

وبالتالي $p\in M$ أو $p\in M'$ ولكن M مغلقة فان $p\in M$.

مرة أخرى بما أن $b\in N$ ، نحصل على $b\neq p \quad \Leftarrow \quad p<b$ ، وأكثر من ذلك تعريف p يبين $p+\varepsilon\in N$ لكل $\varepsilon>0$ بحيث أن $p+\varepsilon\le b$. وهذا يعني كل جوار إلى p يحتوي نقطة من N تختلف عن p وعليه $p\in N'$ ولكن N مغلقة فان $p\in N$

وبالتالي $p\in M\cap N$ وهذا تناقض لان $M\cap N=\phi$. يجب أن تكون A مترابطة

نتيجة (16.2.5)

الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ مترابط .

مثال(17.2.5)

في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$

1. مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ غير مترابطة لأنه لو أخذنا $G=(-\infty,\frac{1}{2})$ و $H=(\frac{1}{2},\infty)$ فان
(أ) $G\neq\phi$ ، $H\neq\phi$ و $G\cap H=\phi$
(ب) كل من G و H مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$
(ج) $\mathbb{N}\subseteq G\cup H$.

2. مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ غير مترابطة لأنه لو أخذنا $G=(-\infty,\frac{1}{3})$ و $H=(\frac{1}{2},\infty)$ فان
(أ) $G\neq\phi$ ، $H\neq\phi$ و $G\cap H=\phi$
(ب) كل من G و H مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$
(ج) $\mathbb{Z}\subseteq G\cup H$.

3. مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ غير مترابطة لأنه لو أخذنا $G=(-\infty,\sqrt{3})$ و $H=(\sqrt{3},\infty)$ فان
(أ) $G\neq\phi$ ، $H\neq\phi$ و $G\cap H=\phi$
(ب) كل من G و H مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$
(ج) $\mathbb{Q}\subseteq G\cup H$.

الاستمرارية والترابط Continuity and Connectedness

مبرهنة(18.2.5)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءً تبولوجيا , ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة. إذا كانت X فضاء مترابط فأن $f(X)$ تكون مجموعة مترابطة في Y ، بعبارة أخرى الصورة المستمرة لفضاء مترابط تكون مجموعة مترابطة.

البرهان:

سنبرهن بطريقة التناقض. نفرض $f(X)$ مجموعة غير مترابطة في Y $\Leftarrow$ توجد مجموعتان مفتوحتان G_1,G_2 بحيث أن

1. $G_1\cap f(X)\neq\phi,\quad G_2\cap f(X)\neq\phi$
2. $(G_1\cap f(X))\cap(G_2\cap f(X))=\phi$
3. $(G_1\cap f(X))\cup(G_2\cap f(X))=f(X)$

$(G_1\cap f(X))\cap(G_2\cap f(X))=\phi \Rightarrow (G_1\cap G_2)\cap f(X)=\phi$

$\Rightarrow f^{-1}((G_1\cap G_2)\cap f(X))=f^{-1}(\phi)=\phi \Rightarrow f^{-1}(G_1)\cap f^{-1}(G_2)\cap f(X)=\phi$

$\Rightarrow f^{-1}(G_1)\cap f^{-1}(G_2)=\phi$

وكذلك

$(G_1\cap f(X))\cup(G_2\cap f(X))=f(X) \Rightarrow (G_1\cup(G_2)\cap f(X)=f(X)$

$\Rightarrow f^{-1}((G_1\cup G_2)\cap f(X))=f^{-1}(f(X))=X \Rightarrow f^{-1}(G_1\cup(G_2)\cap f^{-1}f(X))=X$

$\Rightarrow f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)\cap X=X \Rightarrow f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)=X$.

بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(G_1),\ f^{-1}(G_2)$ مجموعات مفتوحة وغير خالية في X

$\Leftarrow$ X غير مترابط ، وهذا تناقض $\Leftarrow$ $f(X)$ مجموعة مترابطة في Y.

نتيجة(19.2.5)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجيا , ولتكن $f:X\to Y$ دالة شاملة ومستمرة .إذا كانت X مترابط فأن Y يكون مترابط في Y

نتيجة(20.2.5)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجيا , ولتكن $f:X\to Y$ دالة مستمرة .إذا كانت A مجموعة مترابطة في X فأن $f(A)$ تكون مجموعة مترابطة في Y

مبرهنة(21.2.5)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجياَ بحيث أن $X\cong Y$, فان X فضاء مترابط إذا وفقط إذا كان Y فضاء مترابط.

البرهان :

بما إن $X\cong Y$ $\Leftarrow$ يوجد تشاكل تبولوجي $f:X\to Y$

نفرض X فضاء مترابط ، بما أن الدالة f مستمرة $\Leftarrow$ $f(X)$ مجموعة مترابطة في Y

بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow$ $f(X)=Y$ $\Leftarrow$ Y فضاء مترابط

الاتجاه الآخر : نفرض Y فضاء مترابط

بما أن الدالة $f^{-1}:Y\to X$ مستمرة $\Leftarrow$ $f^{-1}(Y)=X$ فضاء مترابط

تمارين(2.5)

1. برهن على أن كل مجموعة منتهية في فضاء تبولوجي (X,τ) تكون غير مترابطة.
2. هل أن تقاطع المجموعات المترابطة في الفضاءات التبولوجية تكون مجموعة مترابطة.
3. هل أن المجموعة $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\in\mathbb{Q}\}$ مترابطة في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$.
4. برهن على أن كل مجموعة مترابطة في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ تكون فترة.
5. لتكن كل من $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ دالة وليكن $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=f(x)\}$ ، $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-g(x)\}$ برهن على أن $A\cup B$ غير مترابطة في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$.
6. لتكن A مجموعة مترابطة في الفضاء التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$. برهن على لكل $a,b\in A$ يوجد $c\in A$ يقع بين a,b.
7. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا ولتكن $A\subseteq X$. برهن على ان A مجموعة مترابطة إذا كانت كل نقطتين في A محتواة في مجموعة جزئية مترابطة من A.
8. ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ وليكن $\tau=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},X\}$. برهن على أن (X,τ) فضاء غير مترابط .
9. برعن على أن الفضاء التبولوجي المكل المنتهي (X,τ) يكون مترابط إذا كانت X غير منتهية ويكون غير مترابط

عندما X منتهية .

10. لتكن A مجموعة مترابطة في الفضاء التبولوجي X . إذا كانت B,C مجموعتين منفصلتين في X بحيث أن $A'=B\cup C$. برهن على أن كل من $A\cup B$ ، $A\cup C$ مجموعة مترابطة.
11. لتكن A مجموعة جزئية في الفضاء التبولوجي المكل المنتهي (X,τ) . برهن على أن $\overline{A}$ مترابطة إذا وفقط إذا كانت A لا تساوي مجموعتين غير خاليتين B,C بحيث أن $\overline{B}\cap\overline{C}=\phi$
12. لتكن A,B مجموعتين متنافيتين مترابطتين في الفضاء التبولوجي (X,τ) . برهن على أن $A\cup B$ مجموعة مترابطة .
13. لتكن كل من A,B مجموعة مترابطة في الفضاء التبولوجي (X,τ) . بين أي من العبارات التالية صحيحة أم لا ؟ مع البرهان
    1. A^c مجموعة مترابطة
    2. $A\cup B$ مجموعة مترابطة
    3. $A\cap B$ مجموعة مترابطة
14. لتكن $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ عائلة من المجموعات المترابطة في الفضاء التبولوجي (X,τ) بحيث ان $A_\alpha\cap A_\beta\neq\phi$ لكل $\alpha\neq\beta$ فان $A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ تكون مترابطة
15. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا مترابطا . برهن على أن إذا كانت $f:X\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة فان $f(X)$ فترة .
16. ليكن $(\{0,1\},\tau_D)$ فضاء تبولوجي مبعثر . برهن على ان الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون مترابط إذا وفقط إذا توجد دالة شاملة ومستمرة $f:X\to\{0,1\}$.
17. ليكن $(\{0,1\},\tau_D)$ فضاء تبولوجي مبعثر . برهن على ان الفضاء التبولوجي (X,τ) يكون مترابط إذا وفقط إذا كانت كل دالة مستمرة $f:X\to\{0,1\}$ تكون ثابتة .

6.5 المجموعات المركبة Component Sets

إذا لم يكن الفضاء التبولوجي مترابطا ، فيمكن أن يتحلل إلى مجوعات متنافية من أعظم فضاء جزئي مترابط . يجب أن نبين أن هذا ممكن دائما .

تعريف(1.3.5)

يقال عن أعظم فضاء جزئي مترابط Y من الفضاء التبولوجي X بأنه احد مركبات (Component) الفضاء .
وهكذا Y مركبة في X إذا وفقط إذا كان Y مترابط وان Y ليست محتواة في فضاء جزئي مترابط اكبر منه .
مركبة المجموعة الجزئية Y من X هي مركبة في Y بالنسبة للتبولوجي النسبي ، بعبارة أخرى المجموعة $A\subseteq X$ تكون مركبة إذا كانت A أعظم مجموعة جزئية مترابطة .

ملاحظة

بما أن المجموعات الأحادية في الفضاءات التبولوجية تكون مترابطة ، فمن الواضح أن المجموعات المركبة تكون غير خالية .

مثال(2.3.5)

1. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مترابط فان مركبات X هي فقط المجموعة X ، وعليه الفضاء

التبولوجي الاعتيادي $(\mathbb{R},\tau_u)$ له مركبة وحيدة هي $\mathbb{R}$.

2. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر فان المجموعات المركبة في X هي فقط المجموعات الأحادية .

3. ليكن $X=\{a,b,c,d,e\}$ ، $\tau=\{\phi,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b,c,d,e\},X\}$ فان المجموعات المركبة في X هي $\{a\}$ ، $\{b,c,d,e\}$.

مبرهنة (3.3.5)

كل مجموعة مركبة في الفضاء التبولوجي (X,τ) تكون مغلقة

البرهان :

لتكن A مجموعة مركبة في X

اذن A مجموعة مترابطة $\Leftarrow$ $\overline{A}$ مجموعة مترابطة

بما أن A أعظم مجموعة مترابطة $\Leftarrow$ $\overline{A}\subseteq A$

ولكن $A\subseteq\overline{A}$ $\Leftarrow$ $\overline{A}=A$ $\Leftarrow$ A مجموعة مغلقة .

مبرهنة (4.3.5)

في الفضاء التبولوجي (X,τ)

1. كل نقطة في X تكون محتواة في مجموعة مركبة واحدة فقط في X
2. المجموعات المركبة في X تشكل تجزئة إلى X
3. كل مجموعة مترابطة في X تكون محتواة في مجوعة مركبة في X
4. كل مجموعة مترابط مفتوحة ومغلقة في X تكون مركبة

البرهان :

1. لتكن $x\in X$ ، ولتكن $\{A_\lambda\}$ عائلة من المجموعات المترابطة التي تحتوي x .

بما أن $\{x\}$ مجموعة مترابطة $\Leftarrow$ $\{x\}\in\{A_\lambda\}$ $\Leftarrow$ $\{A_\lambda\}\neq\phi$

بما أن $x\in A_\lambda$ لكل $\lambda\in\Lambda$ $\Leftarrow$ $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\neq\phi$ فان $A_x=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ مجموعة مترابطة (لماذا ؟)

A_x مجموعة مترابطة تحوي على x .

لتكن B مجموعة مترابطة بحيث أن $A_x\subseteq B$. فان $x\in B$ وعليه $B\in\{A_\lambda\}$

$\Leftarrow$ $B\subseteq A_x$ $\Leftarrow$ $A_x=B$ وعليه A_x مجموعة مركبة تحتوي على x .

يجب أن نبرهن على أن A_x هي المجموعة الوحيدة المركبة في X والتي تحتوي على x.

لتكن B_x مجموعة مركبة أخرى في X والتي تحتوي على x.

فان $B_x\in\{A_\lambda\}$ $\Leftarrow$ $B_x\subseteq A_x$ ، ولكن B_x أعظم مجموعة مركبة في X $\Leftarrow$ $B_x=A_x$.

2. لتكن $\mathcal{F}=\{A_x:x\in X\}$ حيث A_x معرفة في (1) .

يجب أن نبرهن أن $\mathcal{F}$ تحتوي على جميع المجموعات المركبة في X

باستخدام أن كل $A_x\in\mathcal{F}$ مجموعة مركبة في X .

إذا كانت A مجموعة مركبة في X ، فان A غير خالية تحتوي بعض النقاط $x_0\in X$

نظرية 3: مناقشة 1: عدد وحدات 3:

باستخدام (1) نحصل على أن $A = A_{x_0} \Leftarrow A \in \mathcal{F}$

يجب أن نبرهن على أن $\mathcal{F}$ تجزئة إلى X

واضح أن $X = \bigcup_{x \in X} A_x$ بقي أن نبرهن $A_x \cap A_y = \phi$ بحيث أن $A_x \neq A_y$

نفرض $A_x \cap A_y \neq \phi \Leftarrow$ يوجد $r \in A_x \cap A_y \Leftarrow r \in A_x$ و $r \in A_y$

بما آن A_x ، A_y مجموعات مترابطة تحتوي على r و A_r مجموعة مركبة تحتوي r ،

نحصل على $A_x \subseteq A_r$ و $A_y \subseteq A_r$ ولكن A_x ، A_y مجموعات مركبة وعليه $A_x = A_r = A_y$

وبالتالي $A_x \cap A_y = \phi$ اذن $\mathcal{F}$ تجزئة إلى X.

3. لتكن A مجموعة مترابطة في X . إذا كانت $A = \phi$ فان A محتواة في كل مجموعة مركبة .
أما إذا كانت $A \neq \phi$ ، فان A تحتوي على الأقل عنصر واحد وليكن x وعليه $A \subseteq A_x$ حيث A_x معرفة في (1) .

4. لتكن A مجموعة مترابطة مفتوحة ومغلقة في X
لتكن B مجوعة غير خالية مترابطة في X بحيث أن $A \subseteq B$

يجب أن نبرهن $B = A$

نفرض $B \neq A$

بما أن المجموعة A مفتوحة ومغلقة في X فان A مفتوحة ومغلقة في B

$B \neq A$ ، $A \neq \phi$ و A مفتوحة ومغلقة في B فان B غير مترابطة . وهذا تناقض فان $B = A$

اذن المجموعة A مركبة .

تمارين(3.5)

1. اوجد المجموعات المركبة في الفضاء التبولوجي المكل المنتهي
2. هل المجموعة المركبة في الفضاء التبولوجي تكون مفتوحة .
3. برهن على أن المجموعات المركبة غي الفضاء التبولوجي تكون متنافية .
4. ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي بحيث أن X تحتوي على عدد منتهي من المجموعات المركبة .
5. برهن على أن كل مجموعة مركبة في X تكون مجموعة مفتوحة ومغلقة في X .

4.5 الفضاءات غير المرتبطة كليا Totally Disconnected Spaces

تعريف(1.4.5)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X, τ) بأنه غير مترابط كليا (Totally Disconnected) إذا كان لكل $x, y \in X$ ، $x \neq y$ يوجد مجموعة غير مترابطة $A \cup B$ في X بحيث أن $x \in A$ ، $y \in B$.

من التعريف مباشرة نحصل على كل فضاء غير مترابط كليا يكون هاوزدورف

ملاحظة

كل فضاء أحادي (يحتوي نقطة واحدة) يكون غير مترابط كليا . وهكذا يكون الفضاء الأحادي مترابط وغير مترابط كليا .

مثال(2.4.5)
1. كل فضاء تبولوجي مبعثر يكون غير مترابط كليا
2. الفضاء التبولوجي $(\mathbb{Q},\tau_u)$ غير مترابط كليا حيث τ_u التبولوجي الاعتيادي على $\mathbb{Q}$

الحل:
1. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر
وليكن $x,y \in X$ بحيث $x \neq y$ ، فان كل من $A=\{x\}$ ، $B=A^c$ مجموعة غير خالية مفتوحة في X
وان $x \in A$ ، $y \in B$ و $A \cup B = X$ غير مترابطة .
2. ليكن $x,y \in \mathbb{Q}$ بحيث $x \neq y$
إذا كان $x<y$، فان يوجد $p \in \mathbb{Q}^c$ بحيث ان $x<p<y$
$\Leftarrow$ $(-\infty,p),\ \ (p,\infty)$ مجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}$
نضع $B=(p,\infty)\cap\mathbb{Q},\ \ A=(-\infty,p)\cap\mathbb{Q}$ $\Leftarrow$ A,B مجموعات مفتوحة في $\mathbb{Q}$ وان
$A\cup B=((-\infty,p)\cap\mathbb{Q})\cup((p,\infty)\cap\mathbb{Q})=\mathbb{Q},\ \ A\cap B=\phi$
$\Leftarrow$ $A\cup B$ مجموعة غير مترابطة في $\mathbb{Q}$ وان $x\in A$ ، $y \in B$ وعليه $\mathbb{Q}$ غير مترابط كليا.

مبرهنة(3.4.5)
المجموعات المركبة في الفضاء التبولوجية غير المترابطة كليا تكون مجموعات أحادية .

البرهان :
ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي غير مترابط كليا.
يكفي أن نبرهن كل مجموعة جزئية من X والتي تحتوي على أكثر من عنصر غير مترابطة
لتكن S مجموعة جزئية من X تحتوي على الأقل عنصرين
ليكن $x,y \in S$ بحيث $x \neq y$ $\Leftarrow$ $x,y \in X$
بما آن X غير مترابط كليا $\Leftarrow$ يوجد مجموعة غير مترابطة $A\cup B$ في X بحيث أن $x\in A$ ، $y \in B$.
ليكن $H=B\cap S,\ \ G=A\cap S$ فان $H\neq\phi,\ \ G\neq\phi$ لآن $x\in G$ ، $y\in H$.
$$G\cap H=(A\cap S)\cap(B\cap S)=(A\cap B)\cap S=\phi\cap S=\phi$$
وكذلك
$$G\cup H=(A\cap S)\cup(B\cap S)=(A\cup B)\cap S=X\cap S=S$$
وعليه S مجموعة غير مترابطة . وبالتالي المجموعات الأحادية في X فقط مجموعات مترابطة
وبالنتيجة فقط المجموعات الأحادية تكون مركبة .

مبرهنة(4.4.5)
ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي هاوزدورف. إذا كان X يمتلك قاعدة مفتوحة β مجموعاتها مغلقة أيضا.
فان X غير مترابط كليا .

البرهان :
ليكن $x,y \in X$ بحيث $x \neq y$

بما أن X هاوزدورف ⇐ توجد مجموعة مفتوحة G بحيث أن $x \in G$ ، $y \notin G$

اذن يوجد $B \in \beta$ بحيث $x \in B \subseteq G$ ⇐ B مجموعة مفتوحة ومغلقة

⇐ B^c مجموعة مفتوحة ومغلقة بحيث $y \in B^c$ و $x \notin B$

نضع $A = B^c$ ⇐ $A \cap B = \phi$, $A \cup B = X$

⇐ $A \cup B$ مجموعة غير مترابطة في X بحيث أن $x \in A$ ، $y \in B$

⇐ X غير مترابط كليا .

5.5 الفضاءات المترابطة محليا Locally Connected Spaces

تعريف(1.5.5)

يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) بأنه مترابط محليا (Locally Connected) عند النقطة $p \in X$ إذا كان كل مجموعة مفتوحة G تحتوي x توجد مجموعة مفتوحة مترابطة G^* بحيث أن $x \in G^* \subseteq G$ بعبارة أخرى عائلة كل المجموعة المفتوحة المترابطة التي تحتوي x تشكل قاعدة محلية عند النقطة x.
ويقال عن الفضاء التبولوجي بأنه مترابط محليا إذا كان مترابط محليا لكل نقطة من نقاطه.

مثال(2.5.5)

كل فضاء تبولوجي مبعثر يكون مترابط محليا

الحل :

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مبعثر و ليكن $x \in X$ ولتكن G مجموعة مفتوحة في X بحيث أن $x \in G$

نضع $G^* = \{x\}$ ⇐ G^* مجموعة مفتوحة ومترابطة في X وكذلك $x \in G^* \subseteq G$

⇐ X مترابط محلية .

ملاحظة

المثال أعلاه بين الفضاء المترابط محليا ليس بالضرورة أن يكون مترابط .

مبرهنة(3.5.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي مترابط محليا، Y مجموعة جزئية مفتوحة في X فان الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) يكون مترابط محليا .

البرهان :

لتكن $y \in Y$ ، G مجموعة مفتوحة في Y وتحتوي على y

اذن توجد مجموعة U مفتوحة في X بحيث أن $U \cap Y \subseteq G$

بما أن Y مجموعة مفتوحة في X ⇐ $U \cap Y$ مجموعة مفتوحة في X

وعليه G مجموعة مفتوحة في X وتحتوي النقطة y

بما أن X مترابط محليا فانه توجد مجموعة مفتوحة مترابطة G^* في X بحيث أن $y \in G^* \subseteq G$

وألآن $V = G^* \cap Y \subseteq G \cap Y = G$ حيث أن V مجموعة مفتوحة مترابط في Y تحتوي على النقطة Y

وان $y \in V \subseteq G$ ، فان (Y,τ_Y) مترابط محليا .

مبرهنة(4.5.5)

كل مجموعة مركبة في فضاء مترابط محليا تكون مجموعة مفتوحة .

البرهان :

ليكن (X,τ) فضاء مترابط محليا ولتكن A مجموعة مركبة في X ولتكن $x\in A$

بما أن X مترابط محليا و X مجموعة مفتوحة في X و $x\in X$

$\Leftarrow$ توجد مجموعة مفتوحة مترابطة G^* بحيث أن $x\in G^*\subseteq X$

بما أن A مجموعة مركبة ، فان $G^*\subseteq A$ $\Leftarrow$ $x\in G^*\subseteq A$

$\Leftarrow$ A مجموعة مفتوحة .

مبرهنة(5.5.5)

ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي فان العبارات الآتية متكافئة

1. X مترابط محليا .
2. مركبة أي مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة.
3. المركبات المترابطة تشكل قاعدة للفضاء X

البرهان :

$(1)\Leftarrow(2)$

نفرض أن الفضاء X مترابط محليا .

ليكن Y مجموعة مفتوحة في X .باستخدام المبرهنة (3.5.6) يكون (Y,τ_Y) فضاء مترابط محليا وباستخدام المبرهنة (4.5.6) تكون مركبة Y مجموعة مفتوحة في X

$(2)\Leftarrow(3)$

نفرض أن G مجموعة مفتوحة في X وان مركبات G مفتوحة في X وحيث المركبات مترابطة فهي عبارة عن اتحاد من المجموعات المفتوحة وبالتالي فهي قاعدة للفضاء X .

$(3)\Leftarrow(1)$

ليكن V جوار مفتوح للنقطة $p\in X$ ، من (3) نحصل على ان V هي عبارة عن اتحاد من المجموعات المفتوحة المترابطة وبالتالي فان X مترابط محليا.

مبرهنة(6.5.5)

ليكن كل من (X,τ_1) ، (Y,τ_2) فضاءَ تبولوجيا , ولتكن $f:X\to Y$ دالة شاملة ومستمرة ومفتوحة .إذا كانت X فضاء مترابط محليا فأن Y فضاء مترابط محليا.

البرهان:

ليكن $y\in Y$ ، G مجموعة مفتوحة في Y وتحتوي على y .

بما أن الدالة f شاملة $\Leftarrow$ يوجد $x\in X$ بحيث أن $f(x)=y$

$\Leftarrow$ $f(x)\in G$ $\Leftarrow$ $x\in f^{-1}(G)$

بما أن الدالة f مستمرة فان $f^{-1}(G)$ مجموعة مفتوحة في X .

بما أن الفضاء X مترابط محليا فان توجد مجموعة مفتوحة مترابطة G^* بحيث أن $x\in G^*\subseteq f^{-1}(G)$

$\Leftarrow \quad f(x) \in f(G^*) \subseteq f(f^{-1}(G)) \quad \Leftarrow \quad y \in f(G^*) \subseteq G$

بما أن G^* مجموعة مفتوحة في X وان الدالة f مفتوحة فان $f(G^*)$ مجموعة مفتوحة في Y .

بما أن G^* مجموعة مترابطة في X وان الدالة f مستمرة فان $f(G^*)$ مجموعة مترابطة في Y .

اذن $f(G^*)$ مجموعة مفتوحة ومترابطة في Y وان $y \in f(G^*) \subseteq G$.

$\Leftarrow$ Y فضاء مترابط محليا .

تمارين(5.5)

1. ليكن $Y = (a,b) \cup (c,d)$ حيث $a \le b \le c \le d$ فان Y فضاء مترابط محليا و غير مترابط بالنسبة للتبولوجي الاعتيادي على $\mathbb{R}$.
2. ليكن $Y = A \cup B$ حيث $A = \{(0,y) : y \in [-1,1]\}$ ، $B = \{(x,y) : x \in (0,1], \quad y = \sin\frac{1}{x}\}$ فان Y فضاء مترابط وغير مترابط محليا بالنسبة للتبولوجي الاعتيادي على $\mathbb{R}^2$.
3. برهن على : إذا كان الفضاء التبولوجي (X,τ) مترابط محليا فان كل مجموعة مفتوحة في X تكون مترابطة محليا .
4. برهن على أن كل فضاء جزئي مترابط من فضاء مترابط محليا X يكون مترابط محليا إذا كان $X = \mathbb{R}$
5. ليكن (X,τ) فضاء مترابط محليا ولتكن A مجموعة مركبة في الفضاء الجزئي Y من X .
   برهن على أن $\partial(A) \subseteq \partial(Y)$