

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية Differential Equations

تتضمن المعادلات التفاضلية من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية ولناخذ على سبيل المثال جسم يقع على محور السينات ولنفرض أنه يقع في الموقع x بعد زمن t فإن

$$V = \frac{\text{تغير المسافة}}{\text{تغير الزمن}} = \frac{dx}{dt}$$

حيث a هو التسارع

$$a = \frac{\text{تغير السرعة}}{\text{تغير الزمن}} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F = m \cdot a \quad \text{وحسب قانون نيوتن الثاني}$$

$$F = m \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad *$$

إذا كانت F دالة بالنسبة للزمن أو المسافة فإن

المعادلة *

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

تمثل معادلة تفاضلية

نفاذ من الطبيعة تؤدي إلى معادلات تفاضلية:

- (١) عمليات انحصار الجليد .
- (٢) حركة الجسم المعاق بالزلازل .
- (٣) التذبذب البسيط .
- (٤) حركة الجسم في المستوى .
- (٥) خلوص المجال المغناطيسي .

٣١٦

تعريف

المعادلة التفاضلية: هي أي معادلة (ليست متعادلة)

مكونة من حوال جبرية أو حوال مسامية أو معاً

وتحتوي مقادير أو مشتقات

أو هي علاقة بين حالة غير معروفة ومشتقاتها من المتغيرات

المستقلة وتقسّم المعادلات التفاضلية إلى قسمين:

(١) المعادلات التفاضلية الاعتيادية:

Ordinary differential Equation.

وهي المعادلات التي تحتوي على متغير مستقل واحد .
مثال:

$$y'' + y' = 5$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 5 \quad , \quad y = y(x)$$

(متغير مستقل)

(٢) المعادلات التفاضلية الجزئية:

Partial differential equation

وهي المعادلات التي تحتوي على أكثر من متغير مستقل واحد .

مثال

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

$$F = F(x, y, z)$$

Order of P. Differential equation.

هذه رتبة اعداد مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية

Degree of D. Eq

هذه درجة (انس) اعداد مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية بعد جعل جميع اسس المشتقات صحيحة.

Ex:- $y'' + 3y = x^2$ أختلعة
رتبة الثانية الدرجة الاولى

Ex:- $(3x + 2y)^2 (y')' = 1$ رتبة الاولى الدرجة الاولى

Ex:- $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = K \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = K^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ ترتيب المخرجين

الرتبة الثانية الدرجة الثانية

Ex:- $x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 2z$

الرتبة الاولى الدرجة الاولى

$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2 = 0$

الرتبة الثانية
درجة ثانية

حل المعادلة التفاضلية:

Solution of differential equation.

هو إيجاد علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية ويتميز بما يلي:

(1) خالية من المشتقات.

(2) معرف على فترة معينة.

(3) تحقق المعادلة التفاضلية (بحولها إلى متطابقة)

ويسمى هندسياً فنحن نكامل المعادلة التفاضلية.

المطابقة: تعني الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

أثبت أن:

$$y = x \ln x - x \quad , x > 0$$

هو حل المعادلة التفاضلية

$$x \frac{dy}{dx} = x + y$$

$$y = x \ln x - x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 + \ln x \cdot 1 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x$$

بالقوف في المعادلة التفاضلية $dy = \ln x \cdot dx$

$$x \cdot \ln x = x + y$$

$$x \ln x = \cancel{x} + x \ln x - \cancel{x}$$

$$x \ln x = x \ln x$$

هناك ثلاثة أنواع من الحلول للمعادلات التفاضلية
 (1) الحل العام للمعادلة التفاضلية: General Solution
 هو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت بقدر رتبة
 المعادلة.

(2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: Particular Solution
 هو الحل الناتج من مجموعة الحل العام بعد القويض من
 الثوابت الاختيارية بعتم عددية معينة.
 مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = x dx$$

$$\int dy = \int x dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + c$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

ثابتة c

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

(3) الحل المنفرد (الشاذ) للمعادلة التفاضلية:

Singular Solution.

هو الحل الذي لا يمكن استنتاجه من مجموعة الحل
 العام مهما اعطينا الثوابت الاختيارية للقيم.
 كمن عتم

الخميس: ١٠/٤/٢٠١٩

حل المعادلة التفاضلية

$$2y' = 3y^{\frac{1}{3}}$$

$$2 \frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$2dy = 3y^{\frac{1}{3}} dx \Rightarrow \frac{2}{y^{\frac{1}{3}}} dy = 3dx$$

$$\int 2y^{-\frac{1}{3}} dy = \int 3dx$$

$$2y^{\frac{2}{3}} = 3x + C$$

$$3y^{\frac{2}{3}} = 3x + C$$

$$y^{\frac{2}{3}} = x + \frac{C}{3}$$

$$y^{\frac{2}{3}} = x + C_1$$

$$C_1 = \frac{C}{3}$$

$$y^2 = (x + C_1)^3$$

الحل العام للمعادلة

فإذا كانت النقطة المغطاة $(1, 2\sqrt{2})$ فاحل الخاص

$$(2\sqrt{2})^2 = (1 + C_1)^3$$

$$8 = (1 + C_1)^3$$

$$2 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y^2 = (x + 1)^3$$

الحل الخاص

فلا خلاف ان عندما $y=0$ تحقق المعادلة التفاضلية -

:- $y=0$ حلاً خاصاً

:- $y=0$ لا يمكن استنتاجه من مجموعة الحل العام مررها اعطينا C_1 من ضمن

:- تشمل الحل $y=0$ بالحل المنفرد .

تكوين المعادلة التفاضلية من مجموعة الحل العام .

يمكن ايجاد المعادلة التفاضلية اذا علمت مجموعة الحل العام
وذلك بملاحظة العلاقة بين عدد الثوابت الاختيارية
في مجموعة الحل العام ورتبة المعادلة التفاضلية .

مثال

جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو

$$y = C_1 X + C_2 X^3 \quad \text{--- (1)}$$

حيث ان C_1 و C_2 ثوابت اختيارية .
الاستغناء عن عدد الثوابت

نلاحظ ان المعادلة (1) تحتوي على ثابتين اختياريين
ولهذا نشق مرتين .

$$y' = C_1 + 3C_2 X^2 \quad \text{--- (2)}$$

$$y'' = 6C_2 X \quad \text{--- (3)}$$

$$C_2 = \frac{1}{6X} y'' \quad \text{--- (4)}$$

بمقابلة (4) في المعادلة (2) نحصل على

$$y' = C_1 + 3 \frac{1}{6X} y'' X^2$$

$$y' = C_1 + \frac{1}{2} y'' x$$

$$C_1 = y' - \frac{1}{2} x y'' \quad \text{--- (5)}$$

بتعويض المعادلة (4) في المعادلة (1) نحصل على

$$y = (y' - \frac{1}{2} x y'') x + \frac{1}{6} y'' x^3$$

$$y = y' x - \frac{1}{2} x^2 y'' + \frac{1}{6} x^3 y''$$

$$y = y' x - \frac{1}{6} x^2 y''$$

$$y = x y' - \frac{1}{3} x^2 y'' \quad \text{المعادلة المطلوبة}$$

مثال: كون المعادلة التفاضلية من مجموعة الحل العام التابع لها

$$y = A e^x - x \quad \text{--- (1)}$$

حيث A ثابت اختياري. أوجد طريقة حل المعادلة التفاضلية

$$y' = A e^x - 1$$

$$y - y' = 1 - x$$

$$A e^x = y' + 1$$

$$y = y' + 1 - x$$

$$A = \frac{y' + 1}{e^x} \quad \text{--- (2)}$$

بتعويض (2) في (1) نحصل على

$$y = \frac{y' + 1}{e^x} \cdot e^x - x$$

$$y = y' + 1 - x$$

$$y - y' - 1 + x = 0$$

المعادلة التفاضلية
الخطية

$$y = A e^x - x$$

$$y' + 1 - x = A e^x - x$$

$$y' + 1 - x = \frac{y' + 1}{e^x} \cdot e^x - x$$

$$y' + 1 - x = y' + 1 - x$$

مثال

جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y = A e^x \cos(3x + B)$$

حيث A, B ثوابت اختيارية.

$$y = A e^x \cos(3x + B)$$

$$y = A e^x (-3 \sin(3x + B) + \cos(3x + B) \cdot A e^x$$

$$y' = -3 A e^x \sin(3x + B) + A e^x \cos(3x + B) \quad \text{--- (1)}$$

$$y'' = -3 A e^x \cos(3x + B) \cdot 3 + \sin(3x + B) \cdot (-3 A e^x$$

$$+ A e^x (-\sin(3x + B) \cdot 3) + \cos(3x + B) \cdot A e^x$$

$$y'' = -9 A e^x \cos(3x + B) - 3 A e^x \sin(3x + B)$$

$$- 3 A e^x \sin(3x + B) + A e^x \cos(3x + B)$$

$$y'' = -8Ae^x \cos(3x+B) - 6Ae^x \sin(3x+B) \quad \text{--- ②}$$

نضرب ① بـ -2

$$-2y' = 6Ae^x \sin(3x+B) - 2Ae^x \cos(3x+B)$$

$$y'' = -8Ae^x \cos(3x+B) - 6Ae^x \sin(3x+B)$$

$$-2y' + y'' = -10Ae^x \cos(3x+B)$$

$$y'' - 2y' = -10Ae^x \cos(3x+B)$$

$$y'' - 2y' = -10y$$

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

الحالة العامة

جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو:

$$y = Ae^{bx} \quad \text{--- ①}$$

حيث A, B ثابتان اختياريتان.

$$y = abe^{bx}$$

$$y'' = ab^2 e^{bx}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{abe^{bx}}{ab^2 e^{bx}} = \frac{1}{b} \quad \text{--- ②}$$

$$\frac{y'}{y''} = \frac{a b e^{bx}}{a b^2 e^{bx}} = \frac{1}{b} \quad (3)$$

المعادلة (2) تؤدي إلى المعادلة (3)

$$\frac{y}{y'} = \frac{y'}{y''}$$

$$y y'' = (y')^2$$

$$y y'' - (y')^2 = 0$$

نشأت بعد عدد التوابيع
الفصل الثالث

طرق إيجاد الحل للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى
والدرجة الأولى

نكتب المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى
كما يلي

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0$$

أو

$$g(x, y) + h(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

حيث أن f دالة h و g التفاضلية x و y ويكون
خالية من y'

على الرغم من بساطة المعادلة (1) إلا أنه لا توجد طريقة عامة للتحل وعلى ذلك تنقسم المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والدرجة الأولى والتي يمكن إيجاد حلها بطريقة مباشرة إلى عدة أنواع.

- (1) المعادلات التي تتفصل متغيراتها.
- (2) المعادلات التفاضلية من النوع المتجانس.
- (3) المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية.
- (4) معادلات التفاضلية التامة.
- (5) المعادلات التفاضلية الخطية.
- (6) معادلة بيرنولي.

(1) المعادلات التفاضلية التي تتفصل متغيراتها:
أسهل الحالات لهذا النوع من المعادلات يمكن وضعها بالشكل التالي

$$F_1(x) dx + F_2(y) dy = 0$$

ويمكن إيجاد حلها بأجراء التكامل المباشر عليها
أي

$$\int F_1(x) dx + \int F_2(y) dy = C$$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{x^3}{(y+1)^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \quad (y+1)^2 dx$$

$$x^3 dx + (y+1)^2 dy = 0$$

بأجراء التكامل الطرفين

$$\int x^3 dx + \int (y+1)^2 dy = C$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{(y+1)^3}{3} = C$$

حل المعادلة التفاضلية

$$x dy - (1+x)y dx = 0$$

تفصل المتغيرات

$$\frac{dy}{y} - \frac{(1+x)}{x} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = \int 0$$

$$\ln y - (\ln x + x) = C$$

$$\ln y - \ln x - x = C$$

حل المعادلة التفاضلية

$$(\sin x + \cos x) dy + (\cos x - \sin x) dx = 0$$

المعادلة قابلة للفصل

$$\frac{(\sin x + \cos x) dy}{(\sin x + \cos x)} + \frac{(\cos x - \sin x) dx}{(\sin x + \cos x)} = 0$$

$$\int \frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)} dy + \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int 0$$

$$\int dy + \int \frac{(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)} dx = \int 0$$

$$y + \ln |\sin x + \cos x| = C$$

حل //

حالة //

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{1+e^x}$$

أوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{1+e^x}$$

نم اوجد الحل الخاص عند النقطة $x=0, y=1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{1+e^x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{1+e^x}$$

$$(1+e^x) dy = e^{x+y} dx$$

$$(1+e^x) dy = e^x \cdot e^y dx$$

نقسم على $(1+e^x)$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$-e^{-y} = \ln(1+e^x) + \ln C$$

$$-e^{-y} = \ln(1+e^x) + \ln C$$

نقسم على e^{-y}

$$-e^{-y} = \ln(1+e^x) + \ln C$$

الحل الخاص عند النقطة $x=0, y=1$

$$-e^{-1} = \ln(1+e^0) + \ln C$$

$$-e^{-1} = \ln(1+1) + \ln C$$

$$-e^{-1} = \ln 2 + \ln c$$

$$-e^{-1} = \ln 2 + \ln c$$

$$\ln c = -e^{-1} - \ln 2$$

بقوة بأكبر الكمال

$$-e^{-y} = \ln |1 + e^x| - e^{-1} - \ln 2$$

أكبر الكمال

هذا هو الحل النهائي التالي

$$(x+1) \frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$$

$$(x+1) dy = x(y^2 + 1) dx$$

(x+1)(y^2+1) من أجل

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{x}{x+1} dx$$

$$\frac{x+1}{x+1} \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{x+1}$$

20/1

$$\tan^{-1} y = \int \frac{(x+1-1)}{x+1} dx$$

-1

$$\tan^{-1} y = \int \frac{(x+1)}{(x+1)} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\tan^{-1} y = x - \ln |x+1| + c$$

هذا هو الحل النهائي

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) dx = x - \ln |x+1|$$

١) المعادلات التفاضلية من النوع المتجانس :-
 يقال للدالة $F(x, y)$ بانها متجانسة ومن الدرجة n
 اذا كفتي الشرط التالي

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y)$$

مثال :-

٢) سن هنا اذا كانت الدالة التالية متجانسة و $n > 1$ درجة
 المتجانس

$$F(x, y) = 7x^2 + 8xy - 9y^2$$

اذا

$$F(tx, ty) = 7(tx)^2 + 8(tx)(ty) - 9(ty)^2$$

$$= 7t^2x^2 + 8t^2xy - 9t^2y^2$$

$$= t^2 (7x^2 + 8xy - 9y^2)$$

$$= t^2 F(x, y)$$

$$\therefore F(tx, ty) = t^2 F(x, y)$$

الـ دالة متجانسة ومن الدرجة الثانية .

ملاحظة :-

كل دالة بـ x و y تكون متجانسة ومن
 الدرجة n اذا كانت

$$F(x, y) = \frac{y}{x}$$

حيث

$$F(tx, ty) = \frac{ty}{tx} = t^0 F(x, y)$$

حل الـ ١٢

أذكر درجة التجانس أولاً

$$F(x, y) = \frac{x-y}{y} + \tan \frac{y}{x} + \ln \left| \frac{2x+1}{y} \right| + 8$$

$$F(x, y) = \frac{x-y}{y} + \tan \frac{y}{x} + \ln \left| \frac{2x}{y} + 1 \right| + 8$$

$$F(tx, ty) = \frac{tx-ty}{ty} + \tan \frac{ty}{tx} + \ln \left| \frac{2tx}{ty} + 1 \right| + 8$$

$$F(tx, ty) = \frac{t(x-y)}{ty} + \tan \frac{y}{x} + \ln \left| \frac{2x}{y} + 1 \right| + 8$$

$$F(tx, ty) = \frac{x-y}{y} + \tan \frac{y}{x} + \ln \left| \frac{2x}{y} + 1 \right| + 8$$

$$F(tx, ty) = t^0 \frac{(x-y)}{y} + t^0 \tan \frac{y}{x} + t^0 \ln \left| \frac{2x}{y} + 1 \right| + 8$$

$$F(tx, ty) = t^0 F(x, y)$$

∴ درجة التجانس صفر

∴ $t^0 = 1$ فما يسو 3

ملاحظة:

كل دالة ليست بميغزة $\frac{y}{x}$ و $\frac{x}{y}$ وتكون على حد مطلق تكون غير متجانسة.
مثال:

$$F(x, y) = x^2 + 2xy + 5$$

$$F(tx, ty) = t^2 x^2 + 2t^2 xy + 5$$

: الدالة غير متجانسة $\neq t^n F(x, y)$

جميع الدوال المتساوية إذا لم تكن بميغزة $\frac{y}{x}$ و $\frac{x}{y}$ تكون غير متجانسة.
مثال:

$$F(x, y) = e^{x+y} + \cos y$$

$$F(tx, ty) = e^{tx+ty} + \cos ty$$

$\neq t^n F(x, y)$

: الدالة غير متجانسة

نحو بحال المعادلة التفاضلية

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

بأنها متجانسة إذا كانت كل من M و N متجانسين ومن نفس الدرجة

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$x dy = (x+y) dx$$

$$(x+y) dx - x dy = 0$$

$$M(x,y) = x+y$$

$$\begin{aligned} M(tx,ty) &= tx + ty \\ &= t(x+y) \\ &= tM(x,y) \end{aligned}$$

$$N(x,y) = -x$$

$$N(tx,ty) = -tx = t(-x) = tN(x,y)$$

∴ المعادلة M متجانسة ومن الدرجة الأولى

N متجانسة ومن الدرجة الأولى

∴ M و N متجانسين ومن نفس الدرجة

∴ المعادلة التفاضلية متجانسة

$$\text{let } y = v x \Rightarrow v = \frac{y}{x}$$

$$dy = v dx + x dv$$

نعوض في المعادلة التفاضلية

$$(x + vx) dx - x(v dx + x dv) = 0$$

$$x dx + \cancel{vx dx} - \cancel{vx dx} - x^2 dv = 0$$

$$\int x dx - \int x^2 dv = \int 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int dv = \int 0$$

$$\ln x - v = c$$

$$\ln x - \frac{y}{x} = c \quad \text{الحل العام للمعادلة}$$

مثال حل المعادلة التفاضلية التالية :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2xy + y^2) dx - 2x^2 dy = 0$$

ثم أوجد الحل الخاص عند النقطة $(x, y) = (e, e)$

$$M(x, y) = (2xy + y^2)$$

$$M(tx, ty) = 2txty + t^2y^2 = t^2(2xy + y^2) = t^2 M(x, y)$$

$$N(x, y) = -2x^2$$

$$N(tx, ty) = -2t^2x^2 = t^2(-2x^2) = t^2 N(x, y)$$

M متجانسة ومن الدرجة الثانية

N متجانسة ومن الدرجة الثانية

M و N متجانستين ومن نفس الدرجة

$\therefore$ المعادلة التفاضلية متجانسة

$$\text{let } y = vx \Rightarrow v = \frac{y}{x}$$

$$dy = v dx + x dv$$

$$(2xvx + v^2x^2) dx - 2x^2(v dx + x dv) = 0$$

$$(2vx^2 + v^2x^2) dx - 2x^2(v dx + x dv) = 0$$

$$2VX^2 dx + \int X^2 dX - 2X^3 dV - 2X^3 dV = 0$$

$$\int X^2 dX - 2X^3 dV = 0 \quad \text{بالقسمة على } X^3 V^2$$

$$\int \frac{dX}{X} - \int \frac{2}{V^2} dV = 0$$

$$\ln X + \frac{2}{V} = C$$

$$\ln X + \frac{2}{\frac{y}{x}} = C$$

$$\ln X + \frac{2X}{y} = C \quad \text{الحل العام للمعادلة}$$

الحل الخاص عند النقطة (e, e)

$$\ln e + \frac{2e}{e} = C$$

$$\ln e + 2 = C$$

$$1 + 2 = C \Rightarrow C = 3 \quad \text{نقوم بتأجيل الحل العام}$$

$$\ln X + \frac{2X}{y} = 3 \quad \text{الحل الخاص للمعادلة}$$

أوجد. اكمل المعادلة التفاضلية

$$(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

$$M(x, y) = x^2 + y^2$$

$$M(tx, ty) = t^2 x^2 + t^2 y^2 = t^2 (x^2 + y^2) = t^2 M(x, y)$$

$$N(x, y) = -2xy$$

$$N(tx, ty) = -2xtyt = t^2(-2xy) = t^2 N(x, y)$$

M متجانسة من الدرجة الثانية

N متجانسة من الدرجة الثانية

M و N متجانسان من نفس الدرجة

$\therefore$ المعادلة التفاضلية متجانسة

$$\text{let } y = v x \Rightarrow v = \frac{y}{x}$$

$$dy = v dx + x dv$$

$$(x^2 + v^2 x^2) dx - 2xvx(v dx + x dv) = 0$$

$$x^2 dx + v^2 x^2 dx - 2x^2 v dx - 2x^3 v dv = 0$$

$$x^2 dx - x^2 v^2 dx - 2x^3 v dv = 0$$

$$x^2 (1 - v^2) dx - 2x^3 v dv = 0 \quad \times x^3 (1 - v^2)$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2v}{(1-v^2)} dv = 0$$

$$\ln x + \ln |1 - v^2| = \ln c$$

$$x(1 - v^2) = c$$

$$X \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = c$$

الحالة العامة

$$y=0, x=2$$

$$2(1-0) = c$$

$$c=2$$

$$X(1-y^2) = 2$$

الحالة الخاصة (المعادلة)

$$2) \underbrace{(3\theta + 2r)}_{M(\theta, r)} d\theta + \underbrace{(2\theta - 4r)}_{N(\theta, r)} dr = 0$$

$$M(\theta, r) = 3\theta + 2r$$

$$M(t\theta, tr) = 3t\theta + 2tr = t(3\theta + 2r) = t M(\theta, r)$$

$$N(\theta, r) = 2\theta - 4r$$

$$N(t\theta, tr) = 2t\theta - 4tr = t(2\theta - 4r) = t N(\theta, r)$$

M متجانسة من الدرجة الأولى

N متجانسة من الدرجة الأولى

$\therefore$ المعادلة القابلة للتجانس

$$\text{let } r = v\theta \Rightarrow v = \frac{r}{\theta}$$

$$dr = v d\theta + \theta dv$$

$$(3\theta + 2v\theta) d\theta + (2\theta - 4v\theta)(v d\theta + \theta dv) = 0$$

$$3\theta d\theta + 2v\theta d\theta + 2\theta^2 v dv - 4v^2 \theta d\theta - 4v\theta^2 dv = 0$$

$$3\theta d\theta + 4v\theta d\theta + 2\theta^2 dv - 4v^2 \theta d\theta - 4v\theta^2 dv = 0$$

$$(3\theta + 4v\theta - 4v^2\theta)d\theta + (\theta^2 - 4v\theta^2)dv = 0$$

$$\theta(3 + 4v - 4v^2)d\theta + \theta^2(1 - 4v)dv = 0 \quad \therefore \theta^2(3 + 4v - 4v^2)$$

$$\frac{d\theta}{\theta} + \frac{1 - 4v}{(3 + 4v - 4v^2)} = 0$$

$$\ln \theta + \frac{1}{2} \ln(3 + 4v - 4v^2) = \ln c$$

$$\theta(3 + 4v - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = c$$

$$\theta(3 + \frac{4v}{\theta} - \frac{4v^2}{\theta^2})^{\frac{1}{2}} = c$$

(1,1) satisfies (2,1)

$$\theta(3 + 4 - 4) = c$$

$$c = \sqrt{3}$$

$$\theta(3 + \frac{4v}{\theta} - \frac{4v^2}{\theta^2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{or } (2,1)$$

$$xy' = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right)$$

$$x \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right)$$

$$x dy = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right) dx$$

$$y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right) dx - x dy = 0$$

$$M(x, y) = y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right)$$

$$M(tx, ty) = ty \cos\left(\ln \frac{ty}{tx}\right)$$

$$= t M(x, y)$$

$$N(x, y) = -x$$

$$N(tx, ty) = -tx = t(-x) = t N(x, y)$$

M متجانسة من الدرجة الأولى

N متجانسة من الدرجة الأولى

M, N متجانستان ومن الدرجة الأولى

الخاصة القابلة للتجانس

$$\text{let } y = xv$$

$$dy = x dv + v dx$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$Vx \cos(\ln \frac{Vx}{x}) dx - x(v dx + x dv) = 0$$

$$Vx \cos(\ln v) - xv dx - x^2 dv = 0$$

$$xv (\cos(\ln v) - 1) dx - x^2 dv = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dv}{v(\cos(\ln v) - 1)} = 0$$

$$\therefore \int \frac{dv}{v(\cos(\ln x) - 1)} = \int \frac{dt}{\cos t - 1} \cdot \frac{\cos t + 1}{\cos t + 1}$$

$$= \int \frac{(\cos t + 1)}{(\cos^2 t - 1)} dt = \int \frac{(\cos t + 1)}{-\sin^2 t} dx$$

$$= - \int \cos t \sin^{-2} t dt - \int \csc^2 t dt$$

$$= - \frac{\sin^{-1} t}{-1} + \cot t$$

$$= \sin^{-1} t + \cot t$$

$$\text{let } t = \ln v$$

$$dt = \frac{1}{v} dv$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dv}{v(\cos(\ln v) - 1)} = 0$$

$$\ln x - \sin^{-1} t - \cot t = c$$

$$\ln x - \sin^{-1} \ln u - \cot \ln u = C$$

تعاريف (1-2)

برهنت ان كل معادله هيا حل للمعادلة التفاضلية
للمعادلة (4) هي A, B, C ثوابت

$$1) y'' + 4y = 0, y = A \sin 2x + B \cos 2x$$

$$y' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

$$y'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

$$\therefore y'' + 4y = 0$$

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 4(A \sin 2x + B \cos 2x) = 0$$

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 4A \sin 2x + 4B \cos 2x = 0$$

$$0 = 0$$

$$1) x y' + y + x^4 y^4 e^x = 0, y = x^3 (3e^x + C), y \neq 0$$

$$-3y^{-4} y' = x^3 (3e^x) + (3e^x + C) \cdot 3x^2$$

$$y' = 3x^3 e^x + 3x^2 (3e^x + C)$$

$$-3y^{-4}$$

$$y' = \cancel{3} [x^3 e^x + x^2 (3e^x + c)] - \cancel{3} y^4$$

$$y' = -x^3 e^x - x^2 (3e^x + c)$$

$$y^3 = x^3 (3e^x + c) \quad \times y^4$$

$$y = x^3 y^4 (3e^x + c)$$

نقوم بالاشتقاق

$$x \cdot [-x^3 e^x - x^2 (3e^x + c)] + x^3 y^4 (3e^x + c)$$

$$+ x^4 y^4 e^x = 0$$

$$- x^4 e^x y^4 - x^3 y^4 (e^x + c) + x^3 y^4 (3e^x + c)$$

$$+ x^4 e^x y^4 = 0$$

$$0 = 0$$

$$3) \quad 2y'^2 - xy' + y = 3, \quad \begin{cases} y = ct + 3 \\ x = 2t + c \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = c, \quad \frac{dx}{dt} = 2 \quad y = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = c \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}c$$

$$2 \cdot \frac{1}{4}c^2 - x \cdot \frac{1}{2}c + y = 3$$

$$\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}c(2t + c) + ct + 3 = 3$$

$$\frac{1}{2}c^2 - ct - \frac{1}{2}c^2 + ct + 3 = 3$$

قسم بالـ c $3-3$ $y = e^{cx}$

نقسم المعادلة التفاضلية $y'' + 5y' + 6y = 0$ بالـ e^{cx} ~~نقسم المعادلة~~

$$\begin{aligned} y &= e^{cx} \\ y' &= c \cdot e^{cx} \\ y'' &= c^2 \cdot e^{cx} \end{aligned}$$

التحقق

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x} \\ y' &= -2e^{-2x}, \quad y'' = 4e^{-2x} \\ 4e^{-2x} - 10e^{-2x} + 6e^{-2x} &= 0 \\ y &= e^{-3x} \\ y' &= -3e^{-3x}, \quad y'' = 9e^{-3x} \\ 9e^{-3x} - 15e^{-3x} + 6e^{-3x} &= 0 \end{aligned}$$

$$c^2 \cdot e^{cx} + 5c e^{cx} + 6e^{cx} = 0$$

$$e^{cx} (c^2 + 5c + 6) = 0 \quad \therefore e^{cx}$$

$$e^{cx} = (c^2 + 5c + 6) = 0$$

$$(c + 3)(c + 2) = 0$$

$$c = 3$$

$$c = 2$$

$$\therefore y = e^{-2x}$$

$$y = e^{-3x}$$

جد مجموعة الحل العام والحل المنفرد من معادلة التفاضلية

$$y'' = 4y$$

الحل المنفرد هو $y = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = (4y)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = 2y^{\frac{1}{2}} dx \quad \therefore y^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{\frac{1}{2}} dy = 2 dx$$

$$\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 2x + C$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = 2x + c \quad \times 2$$

$$y^{\frac{1}{2}} = x + \frac{c}{2}, \quad \text{let } c_1 = \frac{c}{2}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = x + c_1$$

$$y = (x + c_1)^2$$

٣- المعادلات التفاضلية ذات المتغيرات الكمية :-
المسألة العامة للمعادلات التفاضلية ذات المتغيرات
الكمية هي

$$(ax + by + c)dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)dy = 0 \quad (1)$$

حيث $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ ثوابت و x, y متغيرات

$$ax + by + c = 0$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

تتمثل معادلتان خط مستقيم
بمواقع بسيطة يمكن تحويلها إلى إحدى الصورتين
السابقتين (مفعول مختارين أو متجانسات).

١٢) إذا كانت المستقيمان متقاطعين في نقطة ولكن
عند (h, k) نغير

$$X = x_1 + h \Rightarrow dX = dx_1$$

$$y = y_1 + k \Rightarrow dy = dy_1$$

وبذلك تتحول المعادلة (١) إلى معادلة متجانسة
ب x_1 و y_1

حل المعادلات التفاضلية التالية

$$(2X - 3y + 4) dX + (3X - 2y + 1) dy = 0$$

$$2X - 3y + 4 = 0 \quad \text{--- ①} \quad * 3$$

$$3X - 2y + 1 = 0 \quad \text{--- ②} \quad * 2$$

$$m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$m_2 = -\frac{3}{2}$$

المعادلة
الخطية

$$6X - 9y + 12 = 0$$

$$+ 6X + 4y + 2 = 0$$

$$-5y + 10 = 0 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

بالعوض في ① ينتج

$$2X - 6 + 4 = 0$$

$$2X - 2 = 0 \Rightarrow 2X = 2 \Rightarrow X = 1$$

$\therefore (h, k) = (1, 2)$ نقطة مركز التماثل

$$X = X_1 + h \Rightarrow X = X_1 + 1$$

$$dX = dX_1$$

تغييرات

$$y = y_1 + k \Rightarrow y = y_1 + 2$$

$$dy = dy_1$$

$$[2(X_1 + 1) - 3(y_1 + 2) + 4] dX_1 + [3(X_1 + 1) - 2(y_1 + 2) + 1] dy_1 = 0$$

$$(2X_1 + 2 - 3y_1 - 6 + 4) dX_1 + [3X_1 + 3 - 2y_1 - 4 + 1] dy_1 = 0$$

$$(2X_1 - 3y_1) dX_1 + (3X_1 - 2y_1) dy_1 = 0$$

$$\text{let } y_1 = v x_1 \Rightarrow dy_1 = v dx_1 + x_1 dv$$

$$(2x_1 - 3v x_1) dx_1 + (3x_1 - 2v x_1)(v dx_1 + x_1 dv) = 0$$

$$x_1(2 - 3v) dx_1 + (3x_1 - 2v x_1)v dx_1 + (3x_1 - 2v x_1)x_1 dv = 0$$

$$x_1(2 - 3v) dx_1 + x_1^2(3v - 2v^2) dx_1 + x_1^2(3 - 2v) dv = 0$$

$$x_1(2 - 3v + 3v - 2v^2) dx_1 + x_1^2(3 - 2v) dv = 0$$

$$x_1(2 - 2v^2) dx_1 + x_1^2(3 - 2v) dv = 0$$

$$2x_1(1 - v^2) dx_1 + x_1^2(3 - 2v) dv = 0$$

$$\frac{2 dx_1}{x_1} + \frac{(3 - 2v)}{(1 - v^2)} dv = 0$$

partial fraction decomposition

$$\frac{2 dx_1}{x_1} + \frac{(3 - 2v)}{1 - v^2} dv = 0$$

$$= \frac{A}{(1 - v)} + \frac{B}{(1 + v)}$$

$$\frac{2 dx_1}{x_1} + \frac{3}{1 - v^2} dv + \frac{-2v}{(1 - v^2)} dv$$

$$2 \ln |x_1| + 3 \tanh^{-1} v + \ln |1 - v^2|$$

$$3 - 2v = A(1 + v) + B(1 - v)$$

$$3 - 2v = A + Av + B - Bv$$

$$A - B = 3$$

$$A + B = 3$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$A - B = -2 \Rightarrow \frac{1}{2} - B = -2 \Rightarrow B = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\int \frac{3-2v}{(1-v^2)} = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-v} dv + \int \frac{\frac{5}{2}}{1+v} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|1-v| + \frac{5}{2} \ln|1+v|$$

$$\int \frac{2 dx_1}{x_1} + \int \frac{(3-2v)}{1-v^2} dv = 0$$

$$2 \ln x_1 - \frac{1}{2} \ln|1-v| + \frac{5}{2} \ln|1+v|$$

$$2 \ln x_1 - \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{y_1}{x_1} \right| + \frac{5}{2} \ln \left| 1 + \frac{y_1}{x_1} \right| = \ln c$$

$$X = x_1 + 1 \Rightarrow x_1 = X - 1$$

$$y = y_1 + 2 \Rightarrow y_1 = y - 2$$

$$2 \ln |X-1| - \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{y-2}{X-1} \right| + \frac{5}{2} \ln \left| 1 + \frac{y-2}{X-1} \right| = \ln c$$

$\rightarrow \ln \left| \frac{X-1}{X-1} \right|$

(ب) إذا كانت المستقيمان متوازيان أي أن حيد المقسم
النول يساوي حيد المقسم الثاني. أي أن
المحدد يساوي صفر

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{a}{b}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

أي

عند ذلك نحذف أن

$$Z = ax + by \quad \text{or} \quad Z = \alpha x + \beta y$$

$$dZ = a dx + b dy$$

$$dy = \frac{1}{b} (dZ - a dx)$$

وبذلك تتحول المعادلة (١) إلى معادلة تنفصل متغيراتها
بـ X و Z ثم نحل المعادلات.

حالة المعادلة التفاضلية التالية:

$$(2x + y + 1) dx + (4x + 2y + 5) dy = 0$$

$$2x + y + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$4x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\therefore m_1 = m_2 \Rightarrow \text{المستقيمان متوازيان}$$

نفساً

$$z = 2x + y$$

$$dz = 2dx + dy$$

$$\Rightarrow dy = dz - 2dx$$

بالقوة في المعادلة الأصلية نحصل على

$$(z+1)dx + (2z+5)(dz-2dx) = 0$$

$$(z+1)dx + (2z+5)dz - 2(2z+5)dx = 0$$

$$(z+1-4z-10)dx + (2z+5)dz = 0$$

$$(-3z-9)dx + (2z+5)dz = 0$$

$$dx + \frac{2z+5}{-3z-9} dz = 0$$

$$\int dx - \frac{1}{3} \int \frac{2z+5}{z+3} dz = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ z+3 \overline{) 2z+5} \\ \underline{+2z+6} \\ -1 \end{array}$$

$$\int dx - \frac{1}{3} \int \left(2 - \frac{1}{z+3}\right) dz = 0$$

$$x - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \ln|z+3| = \ln c$$

$$x - \frac{2}{3}(2x+y) + \frac{1}{3} \ln|2x+y+3| = \ln c$$

الكل

حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$(2x - 3y - 1)dx + [6(2x - 3y) - 1]dy = 0$$

$$2x - 3y - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$12x - 18y - 1 = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}$$

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ المستقيمان متوازيان

$$Z = 2x - 3y \Rightarrow dZ = 2dx - 3dy$$
$$dy = \frac{1}{3}(2dx - dZ)$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$(Z - 1)dx + (6Z - 1) \cdot \frac{1}{3}(2dx - dZ) = 0$$

$$(Z - 1)dx + \frac{2}{3}(6Z - 1)dx - \frac{1}{3}(6Z - 1)dZ = 0$$

$$3(Z - 1)dx + 2(6Z - 1)dx - (6Z - 1)dZ = 0$$

$$(3Z - 3 + 12Z - 2)dx - (6Z - 1)dZ = 0$$

$$(15Z - 5)dx - (6Z - 1)dZ = 0$$

$$dx - \frac{(6Z - 1)}{15Z - 5} dZ = 0$$

$$\int dx - \frac{1}{5} \int \frac{6Z - 1}{3Z - 1} dZ = 0$$

$$\int dx - \frac{1}{5} \int \left(2 + \frac{1}{3z-1}\right) dz = \frac{3z-1}{6z-1}$$

$$x - \frac{2}{5}z - \frac{1}{15} \ln|3z-1| = \ln c$$

$$x - \frac{2}{5}(2x-3y) - \frac{1}{15} \ln|3(2x-3y)-1| = \ln c$$

$$x - \frac{2}{5}(2x-3y) - \frac{1}{15} \ln|6x-9y-1| = \ln c$$

الكل في

من المعادلة التفاضلية التالية:

$$(2x+3y-1)dx = 4(x+1)dy$$

$$(2x+3y-1)dx - 4(x+1)dy = 0$$

$$2x+3y-1=0 \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$-4x-4=0 \Rightarrow m_2 = -\frac{4}{0}$$

من المعادلة ② $m_1 \neq m_2$ ∴

من المعادلة ②

$$-4x-4=0 \Rightarrow -4x=4 \Rightarrow x=-1$$

بالعوض في المعادلة ①

$$-2+3y-1=0$$

$$3y-3=0 \Rightarrow 3y=3 \Rightarrow y=1$$

$$\therefore (h, k) = (-1, 1)$$

$$X = X_1 + h \Rightarrow X = X_1 - 1$$

$$dX = dX_1$$

$$y = y_1 + k \Rightarrow y = y_1 + 1$$

$$dy = dy_1$$

بالقوة في المعادلة الأصلية نحصل على

$$[2(X_1 - 1) + 3(y_1 + 1) - 1]dX_1 - 4(X_1 - 1 + 1)dy_1 = 0$$

$$[2X_1 - 2 + 3y_1 + 3 - 1]dX_1 - 4X_1 dy_1 = 0$$

$$(2X_1 + 3y_1)dX_1 - 4X_1 dy_1 = 0$$

M, N متجانستان وحيث $\frac{dy_1}{dX_1} = \frac{N}{M}$
 $\therefore$ المعادلة التفاضلية متجانسة

$$\text{let } y_1 = vX_1 \Rightarrow dy_1 = v dX_1 + X_1 dv$$

بالقوة في المعادلة

$$(2X_1 + 3vX_1)dX_1 - 4X_1(v dX_1 + X_1 dv) = 0$$

$$(2X_1 + 3vX_1)dX - 4X_1 v dX_1 - 4X_1^2 dv = 0$$

$$(2X_1 + 3vX_1 - 4X_1 v)dX_1 - 4X_1^2 dv = 0$$

$$(2X_1 - vX_1)dX_1 - 4X_1^2 dv = 0$$

$$X_1(2 - v)dX_1 - 4X_1^2 dv = 0$$

$$\frac{dx_1}{x_1} - \frac{4dv}{2-v} = 0$$

$$x = x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = x + 1$$

$$y = y_1 + 1 \Rightarrow y_1 = y - 1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} - \int \frac{4dv}{2-v} = 0$$

$$v = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\ln x_1 + 4 \ln |2-v| = \ln c$$

$$\ln |x+1| + 4 \ln \left| 2 - \frac{y_1}{x_1} \right| = \ln c$$

$$\ln |x+1| + 4 \ln \left| 2 - \frac{y-1}{x+1} \right| = \ln c \quad \text{الحل العام}$$

المعادلة التفاضلية التامة :-

لتكن $F(x, y)$ دالة في المتغيرات x و y يمكن التفاضل

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \quad \text{--- ①}$$

بالتفاضل التام للدالة $F(x, y)$ وإذا ساوى الطرف اليمين للمعادلة (1) بالمضروب

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \quad \text{--- ②}$$

فإن المعادلة ② تمثل معادلة تفاضلية تامة وحلها العام هو

$$F(x, y) = c$$

الحل العام حيث c ثابت اختياري

جد التفاضل التام للدالة

$$F(x, y) = xy + x - y - 3$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

عندما نشق x $\nearrow$

يعتبر y ثابتاً
بالنسبة لـ x

$\nearrow$

عندما نشق y
يعتبر x ثابتاً
بالنسبة لـ y

$$dF = y dx + dx + x dy - dy \quad \text{التفاضل التام}$$

$$(y+1)dx + (x-1)dy = 0 \quad \leftarrow \text{معادلة تفاضلية} \\ \text{تامة}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{dy}{y+1} = 0$$

$$\ln|x-1| + \ln|y+1| = \ln c$$

$$(x-1)(y+1) = c \quad \text{الحل العام}$$

ملاحظة: حالة عدم تساوي التفاضل التام وعندها نساوي الطرفين الأيمن
التفاضل التام بالاشتراك مع المعادلة التفاضلية خاصة

حسبنا:

ان الشرط الضروري والكافي لكي تكون المعادلة القابلة

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

كامنة هو

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

لديجاد الحله العام هنالك طريقتين:

الطريقة الأولى: $\int M(x,y)dx = F(x,y)$

$$\int N(x,y)dy = g(x,y)$$

مع ملاحظة ان هه شكل للحدود المتكامله

الحله العام: $F(x,y) + g(x,y) = c$

الطريقة الثاني:

بمقارنه المعادله

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

مع القابله التام

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} = \int M(x,y) , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y)$$

نكامل حاله نسبة لـ x فنفصل دالة بالنسبة لـ y

والعلك صحيح

$$f(x, y) = \int N(x, y) dy + \phi(x) \quad *$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \phi'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\int \phi'(y) dy = ? \Rightarrow \phi'(y) = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dy + \phi'(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\int \phi'(x) dx = ? \Rightarrow \phi'(x) = ?$$

ثم نستخدم هذه النتائج في المثال

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$(xy^2 - y)dx + (x^2y - x)dy = 0$$

(1)

$$M(x, y) = xy^2 - y, N(x, y) = x^2y - x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \therefore \text{المعادلة قابلة للفصل}$$

$$F(x, y) = \int (xy^2 - y) dx = \frac{x^2 y^2}{2} - xy$$

$$g(x, y) = \int N(x, y) dy = \int (x^2 y - x) dy$$

$$= \frac{x^2 y^2}{2} - xy$$

حده مستطيل $\square$ $\rightarrow$ $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ و $\frac{\partial F}{\partial y} = N$

$$F(x, y) + g(x, y) = c$$

$$\frac{x^2 y^2}{2} - xy = c$$

الحل العام

طريقة ثانية لحال السؤال

$$2) F(x, y) = \int M(x, y) dx + \phi(y)$$

$$g(x, y) = \int N(x, y) dy + \phi(x)$$

$$F(x, y) = \int (xy^2 - y) dx + \phi(y)$$

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} - xy + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 y - x + \phi'(y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

$$= N(x, y) = x^2 y - x$$

$$\cancel{x^2 y} - \cancel{x} + \phi'(y) = \cancel{x^2 y} - \cancel{x}$$

$$\int \phi'(y) dy = \int 0 dy$$

$$\phi(y) = c$$

بالقوة في المعادلة $dz = dx dy$

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2} - xy + c$$

التحقق

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$= x^2 y dx - y dx + x^2 y dy - x dy$$

$$= (x^2 y - y) dx + (x^2 y - x) dy = 0$$

لأن $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ $\Rightarrow$ المعادلة قابلة للتكامل $\Rightarrow$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

$$y^3 \sin 2x dx - 3y^2 \cos^2 x dy = 0$$

$$M(x, y) = y^3 \sin 2x, \quad N(x, y) = -3y^2 \cos^2 x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \sin 2x$$

$$= 6y^2 \sin x \cos x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6y^2 \cos x \sin x$$

النتيجة هي المعادلة التامة

النتيجة $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

لذلك المعادلة قابلة للتكامل

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx$$

$$F(x, y) = \int y^3 \sin 2x = \int 2y^3 \sin x \cos x$$

$$F(x, y) = 2y^3 \frac{\sin^2 x}{2} = y^3 \sin^2 x = -y^3 \cos^2 x$$

$$g(x, y) = \int v(x, y) dy$$

$$g(x, y) = \int -3y^2 \cos^2 x dy$$

$$g(x, y) = -y^3 \cos^2 x$$

$$F(x, y) + g(x, y) = C$$

$$-y^3 \cos^2 x = C$$

$$-y^3 - 2 \cos x \sin x - 3y^2 \cos^2 x$$

$$-y^3 \sin 2x dx - 3y^2 \cos^2 x dy = 0$$

العوامل المتكاملة : Integrating Factors

عند ضرب طرفي معادلي تفاضلي غير تام بمعامل ما وتحويله إلى تام سيصل هذا المعامل بمعامل المتكامل لذلك المعادلة

يمكن إيجاد عامل التكامل للمعادلة التفاضلية

$$M dx + N dy = 0$$

في الحالات الآتية

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N f(x)$$

إذا كانت

حيث عامل التكامل هو

$$M = e^{\int f(x) dx}$$

إذا كانت

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = M f(y)$$

حيث عامل التكامل هو

$$M = e^{-\int f(y) dy}$$

(١) إذا كانت $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = N \cdot \frac{K}{x}$

فإن معادلات التكامل هو

$$M = x^K$$

(٢) إذا كانت $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = M \cdot \frac{K}{y}$

فإن معادلات التكامل هو

$$M = y^{-K}$$

مثال: حل معادلات التفاضل العادية التالية باستخدام كل الطرق

$$(2y - 4x^2)dx + xdy = 0$$

$$M(x, y) = 2y - 4x^2, N(x, y) = x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow \text{المعادلة غير قابلة}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N f(x)$$

$$\boxed{1 \cdot \frac{x}{x} = x \cdot \frac{f}{x} = N(x, y) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow K=1, M=x^K=x}$$

$$2 - 1 = x f(x)$$

$$1 = x f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

$$M = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x = x$$

$$M = x$$

$\therefore$ الحل العام هو

بفرض المعادلة (المجهولة) X ينحصر

$$X(2y - 4x^2)dx + x^2 dy = 0$$

$$(2xy - 4x^3)dx + x^2 dy = 0$$

$$M_1(x, y) = 2xy - 4x^3, N_1(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \Rightarrow \text{المعادلة قابلة للتكامل}$$

$$f(x, y) = \int M_1(x, y) dx = \int (2xy - 4x^3) dx$$

$$f(x, y) = x^2 y - x^4$$

$$g(x, y) = \int N_1(x, y) dy = \int x^2 dy = x^2 y$$

$$F(x, y) + g(x, y) = c$$

$$x^2 y - x^4 = c$$

الكل المعاد

مثال: احل معادلة تفاضلية التامة

$$(3xy^3 + 4y)dx + (3x^2y^2 + 2x)dy = 0$$

$$M(x,y) = 3xy^3 + 4y, \quad N(x,y) = 3x^2y^2 + 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 9xy^2 + 4, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{المعادلة غير تامة}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 9xy^2 + 4 - (6xy^2 + 2)$$

$$= 9xy^2 + 4 - 6xy^2 - 2$$

$$= (3xy^2 + 2) \left(\frac{x}{x}\right) \quad \text{الانقسام}$$

N و M

$$= (3x^2y^2 + 2x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N(x,y) \cdot \frac{1}{x} \quad \text{نضرب المعادلة في الكسور}$$

$$M = x^k - x^1 = x \quad k=1$$

$$M = x$$

نضرب المعادلة في الكسور بعامل x منتج

$$x(3xy^3 + 4y)dx + x(3x^2y^2 + 2x)dy = 0$$

$$(3x^2y^3 + 4xy)dx + (3x^3y^2 + 2x^2)dy = 0$$

$$M_1(x, y) = 3x^2y^3 + 4xy, N_1(x, y) = 3x^3y^2 + 2x^2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 9x^2y^2 + 4x, \frac{\partial N_1}{\partial x} = 9x^2y^2 + 4x$$

$$\therefore \frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \text{إذن قابل}.$$

$$F(x, y) = \int M_1(x, y) dx = \int (3x^2y^3 + 4xy) dx$$

$$= x^3y^3 + 2x^2y$$

$$g(x, y) = \int N_1(x, y) dy = \int (3x^3y^2 + 2x^2) dy$$

$$g(x, y) = x^3y^3 + 2x^2y$$

$$F(x, y) + g(x, y) = C$$

$$x^3y^3 + 2x^2y = C \quad \text{الكل معاً}$$

مثال ١: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(2xy^2 - 2y)dx + (3x^2y - 4x)dy = 0$$

$$M(x,y) = 2xy^2 - 2y, \quad N(x,y) = 3x^2y - 4x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 4$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{المعادلة غير قابلة}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy - 2 - (6xy - 4)$$

$$= 4xy - 2 - 6xy + 4$$

$$= (-2xy + 2) \left(\frac{-y}{-y} \right)$$

$$= (2xy^2 - 2y) \left(\frac{-1}{y} \right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = M(x,y) \left(\frac{-1}{y} \right)$$

$$k = -1$$

$$M = y^{-k} = y^{-(-1)} = y^1 = y$$

$$M = y$$

عند الكسالة هو
في هذه الحالة المعادلة التفاضلية قابلة للحل وبتنوع

$$(2xy^3 - 2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4xy)dy = 0$$

$$M_1(x, y) = 2xy^3 - 2y^2, \quad N_1(x, y) = 3x^2y^2 - 4xy$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 6xy^2 - 4y, \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} = 6xy^2 - 4y$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \Rightarrow \text{exakt}$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int M_1(x, y) dx = \int (2xy^3 - 2y^2) dx \\ &= x^2y^3 - 2xy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int N_1(x, y) dy = \int (3x^2y^2 - 4xy) dy \\ &= x^2y^3 - 2xy^2 \end{aligned}$$

$$F(x, y) + g(x, y) = c$$

$$x^2y^3 - 2xy^2 = c$$

(٥) المعادلات التفاضلية الخطية :
 أي معادلة تفاضلية مهما كانت (تسمى) تكون خطية إذا كانت الدالة وجميع المشتقات التي تظهر فيها من الدرجة الأولى وغير مضروبة ببعضها وبشيء آخر (المعادلة)

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

إن المعادلة العامة لمعادلة خطية من الرتبة الأولى هي

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

حيث $P(x)$ و $Q(x)$ دالتان مستمرتان بـ x فقط

لحل المعادلة (1) نضرب طرفي المعادلة (1) بعامل التكامل

ملاحظه :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1) \text{ المعادلة العامة للمعادلة الخطية}$$

عامل التكامل هو

$$M(x) = e^{\int P(x) dx}$$

والحل العام هو

$$y M(x) = \int M(x) Q(x) dx + C$$

حيث C ثابت التكامل

(٢) حد تنحس المجهولات ~~في~~ فنظر المعادلة (2) بالصورة

$$\frac{dx}{dy} + g(y)x = h(y)$$

التالي

$$M(y) = \int g(y) dy$$

فان عامل التكامل هو

$$X M(y) = \int M(y) h(y) dy + c$$

والحد العام هو

مع c ثابت اختياري

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = x^2 - 3$$

$$M(x) = \int P(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x = x$$

$$y M(x) = \int M(x) Q(x) dx + c$$

$$xy = \int x(x^2 - 3) dx + c$$

$$xy = \int (x^3 - 3x) dx + c$$

$$xy = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + c$$

$$y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x + c x^{-1}$$

هذا هو الحل

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1 \quad \text{%. } \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot y = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \tan x \cdot y = \sec x$$

$$P(x) = \tan x, \quad Q(x) = \sec x$$

$$\begin{aligned} M(x) &= e^{\int \tan x dx} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{-\ln \cos x} \\ &= e^{\ln(\cos x)^{-1}} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$M(x) y = \int M(x) Q(x) dx + C$$

$$\frac{1}{\cos x} \cdot y = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sec x \cdot dx + C$$

$$\frac{1}{\cos x} \cdot y = \int \sec^2 x \cdot dx + C$$

$$\frac{1}{\cos x} y = \tan x + C$$

$$y = \sin x + C \cos x \quad \text{. } \text{الاجابة}$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y \frac{dx}{dy} + 2x = y^3$$

نكتبها بالشكل التالي

$$y dx + 2x dy = y^3 dy$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y} x = y^2$$

$$\frac{dx}{dy} + g(y)X = h(y)$$

$$g(y) = \frac{2}{y}, \quad h(y) = y^2$$

$$M(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

$$M(y) = y^2$$

$$M(y)X = \int M(y) \cdot h(y) dy + C$$

$$y^2 X = \int y^2 \cdot y^2 dy + C$$

$$y^2 X = \int y^4 dy + C$$

$$y^2 X = \frac{1}{5} y^5 + C$$

$$X = \frac{1}{5} y^3 + C y^{-2}$$

الحل العام

٦. معادلة برنولي:

الصيغة العامة لمعادلة برنولي هي:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 1$$

حيث $n \neq 1$ ، $P(x)$ و $Q(x)$ دالتان بـ x فقط
وأيضاً تكون الصيغة العامة بالصورة التالية

$$\frac{dx}{dy} + q(y)x = h(y)x^n, \quad n \neq 1$$

حيث $q(y)$ و $h(y)$ دالتان بـ y فقط

كل المعادلات (١) نحولها إلى معادلة خطية وذلك
بضرب جميع حدودها بـ y^{-n}

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (2)$$

واستعمال التفرقة
تتحول المعادلة إلى معادلة خطية بالنسبة لـ Z يمكن
حلها بالطرق العادية.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$$

بالضرب بـ ١ - نحصل على

$$\frac{dy}{dx} - xy = -y^3 e^{-x^2}$$

بالضرب بـ y^{-3} نحصل على

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - x y^{-2} = -e^{-x^2} \quad (*)$$

$$\text{let } z = y^{-2}$$

$$z = y^{1-n} = y^{1-3} = y^{-2}$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

$$n=3$$

$$-\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} - xz = -e^{x^2} \quad \text{بالقوة 2 في الطرفين}$$

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{x^2}$$

$$M(x) = \int 2x dx = x^2$$

$$M(x) \cdot z = \int M(x) Q(x) dx + C$$

$$e^{x^2} z = \int 2e^{x^2} \cdot e^{x^2} dx + C$$

$$e^{x^2} z = \int 2 dx + C$$

$$e^{x^2} z = 2x + C$$

$$z = 2x e^{-x^2} + C e^{-x^2}$$

$$y^{-2} = 2x e^{-x^2} + C e^{-x^2}$$

الكل في الكل

... $\Rightarrow$... $\frac{dx}{dy} - 2xy = 6x^3 y^2 e^{-2y^2}$ $x \frac{dx}{dy}$

$\frac{dx}{dy} - 2xy = 6x^3 y^2 e^{-2y^2}$ $x^{-3} \rightarrow$...

$$x^{-3} \frac{dx}{dy} - 2x^{-2} y = 6y^2 e^{-2y^2} \quad (*)$$

let $z = x^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -2x^{-3} \frac{dx}{dy}$

$$-\frac{1}{2} \frac{dz}{dy} = x^{-3} \frac{dx}{dy}$$

... $\frac{dz}{dy} - 2zy = 6y^2 e^{-2y^2}$...

$$\frac{dz}{dy} + 4zy = -12y^2 e^{-2y^2}$$

$$M(y) = \int 4y dy = 2y^2$$

$$M(y)z = \int e^{2y^2} (-12y^2 e^{-2y^2}) dy + c$$

$$e^{2y^2} z = \int -12y^2 dy + c$$

$$e^{2y^2} z = -4y^3 + c$$

$$Z = -4y^3 e^{-2y^2} + C e^{-2y^2}$$

$$Z = x^{-2}$$

$$x^{-2} = -4y^3 e^{-2y^2} + C e^{-2y^2} \quad \text{الحل العام}$$

المعادلات التفاضلية الزمنية :-

تتعدد المعادلات التفاضلية الزمنية على متغير مستقل واحد ومتغيرات معتمدة بغير عدد المعادلات وتختلف تحويل هذه المعادلات إلى معادلات واحدة بمتغير مستقل واحد ومتغير معتمد واحد كما لمعادلات السابقة .

الدرجة العامة لهذه الأنواع من المعادلات هي :-

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \text{①}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, t) \quad \text{②}$$

حيث t هو المتغير المستقل و x و y هي المتغيرات المعتمدة

نعالج المعادلة ① بالطرق السابقة لأنها بمتغيرين ونعوض الناتج في المعادلة ② فتصبح معادلة بمتغيرين ونحلها بالطرق السابقة ويكون الجواب النهائي بدرجة المعادلة الوسيطة .

مثال حل المعادلتين التفاضليتين:

$$\frac{dx}{dt} + X = e^t \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{dy}{dt} = X \quad \text{--- ②}$$

$$\frac{dx}{dt} + X = e^t \quad \text{--- ①}$$

$$\frac{dx}{dt} + P(t)X = Q(t), \quad P(t)=1, \quad Q(t)=e^t$$

$$M(t) = \int dt = e^t$$

$$M(t)X = \int M(t)Q(t) dt + C$$

$$e^t X = \int e^t \cdot e^t dt + C$$

$$X e^t = \int e^{2t} dt + C$$

$$X e^t = \frac{1}{2} e^{2t} + C$$

$$X = \frac{1}{2} e^t + C e^{-t} \quad \text{--- ③}$$

بموجب ③ في ② ينتج

$$\frac{dy}{dt} = X \quad \text{--- ②} \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} e^t + C e^{-t}$$

$$dy = \left(\frac{1}{2} e^t + C e^{-t} \right) dt$$

$$y = \frac{1}{2} e^t - c e^{-t} + C_1 \quad (4)$$

المعادلة (3) و (4) تظهر أن الحل العام

مثال حل معادلتين التفاضل:

$$\frac{dx}{dt} + y = x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y \quad (2)$$

حل المعادلة (2)

$$\frac{dy}{dt} = 3y \Rightarrow dy = 3y dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3 dt$$

$$\ln y = 3t + c$$

$$y = e^{3t+c} = e^{3t} \cdot e^c$$

$$e^c = A$$

$$\therefore y = A e^{3t} \quad (3)$$

بالقود في (1) نضع

$$\frac{dx}{dt} + A e^{3t} = x$$

$$\frac{dx}{dt} - x = -A e^{3t}$$

$$P(t) = -1, \quad Q(t) = -A e^{3t}$$

$$M(t) = \int -dt = -t$$

$$N(t) = e^{-t}$$

$$M(t)X = \int M(t) Q(t) dt + C$$

$$Xe^{-t} = \int -A e^{3t} \cdot e^{-t} dt + C$$

$$Xe^{-t} = -A \int e^{2t} dt + C$$

$$Xe^{-t} = -\frac{1}{2} A e^{2t} + C$$

$$X = -\frac{1}{2} A e^{3t} + C e^t \quad (4)$$

ننظر معادلة (3) ونلاحظ ان الحد العام (4) هو الحل الخاص.

تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية
الدرجة الثانية للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

المتغير مستقل

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

ويمكن ايجاد الحل للمعادلات من الرتبة الثانية وذلك بتحويل
الحل لمعادلات حث الرتبة الاولى وحسب نوعيتها.

(1) اذا لم يظهر المتغير المعتمد (y) في المعادلة (لا عندئذٍ

$$y' = P$$

نحذف

$$y'' = P' = \frac{dP}{dx}$$

وبذلك تصبح المعادلة (1) بالمتغير

$$G(X, P, P') = 0$$

وهذه معادلة من الرتبة الاولى في P نحلها معاملة

X و P ثم نرجع $P = \frac{dy}{dx}$ ونحلها معاملة X و y

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$xy'' = y'$$

$$\text{let } y' = p$$

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

$$x \cdot \frac{dp}{dx} = p$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln C \quad \text{أو } p = xC$$

$$p = xC, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = xC$$

$$\int dy = \int xC dx$$

$$y = \frac{1}{2} x^2 C + C_1$$

الحل العام

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$x^2 y'' - y'^2 - 2xy' = 0$$

$$\text{let } y' = P, \quad y'' = P' = \frac{dP}{dx}$$

$$x^2 \frac{dP}{dx} - P^2 - 2XP = 0 \quad \text{y. } x^2$$

$$\frac{dP}{dx} - \frac{P^2}{x^2} - \frac{2}{x} P = 0$$

$$\frac{dP}{dx} - \frac{2}{x} P = \frac{P^2}{x^2} \quad * P^{-2}$$

$$P^{-2} \frac{dP}{dx} - \frac{2}{x} P^{-1} = \frac{1}{x^2} \quad (*)$$

$$\text{let } Z = P^{-1}, \quad \frac{dZ}{dx} = -P^{-2} \frac{dP}{dx}$$

$$-\frac{dZ}{dx} = P^{-2} \frac{dP}{dx}$$

بالفصل (*)

$$-\frac{dZ}{dx} - \frac{2}{x} Z = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dZ}{dx} + \frac{2}{x} Z = -\frac{1}{x^2}$$

$$M(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x = \ln x^2 = x^2$$

$$X^2 Z = \int -\frac{1}{X^2} \cdot X^2 dx + c$$

$$X^2 Z = -X + c$$

$$Z = -\frac{1}{X} + c X^{-2}$$

$$P' = -\frac{1}{X} + \frac{c}{X^2}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{-X+c}{X^2}$$

$$P = \frac{X^2}{-X+c} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{X^2}{-X+c}$$

$$(-X+c)dy = X^2 dx$$

$$dy = \left(\frac{X^2}{-X+c} \right) dx$$

$$\int dy = \int \left[(-X-c) + \frac{c^2}{c-X} \right] dx$$

$$\begin{array}{r} -X-c \\ -X+c \overline{) X^2} \\ \underline{-X^2 + cX} \\ -cX \\ \underline{-cX + c^2} \\ c^2 \end{array}$$

$$y = -\frac{1}{2} X^2 - cX - c^2 \ln|c-X| + C_1$$

ملاحظه

در صورتی که

$$\int dy = \int \frac{X^2}{-(X-c)} dx$$

$$\int dy = - \int \frac{X^2 - c^2 + c^2}{X-c} dx = - \int \left[\frac{X^2 - c^2}{X-c} + \frac{c^2}{X-c} \right] dx$$

$$= - \int \frac{(X-c)(X+c)}{(X-c)} + \frac{c^2}{X-c} dx$$

$$y = - \left(\frac{1}{2} X^2 + cX + c^2 \ln|X-c| + C_1 \right)$$

(5) إذا لم يتغير المتغير المستقل X في المعادلة (1) عندئذ نقول

$$y' = P, \quad y'' = P' = \frac{dP}{dX} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dX} = P \frac{dP}{dy}$$

وبذلك تصبح المعادلة (1) بالصيغة

$$E(y, P, P \frac{dP}{dy}) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بمتغير مستقل y

ومتغير متبدا P نحلها من أجل y و P وبعد ذلك

نقول عن $P = \frac{dy}{dX}$ ونحلها من أجل X و y

2018

صفحة

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + y'^2 = 0$$

$$\text{let } y' = P, \quad y'' = P \cdot \frac{dP}{dy}$$

نقول في المعادلة الأصلية نحلها على

$$yP \frac{dP}{dy} + P^2 = 0$$

$$P(y \frac{dP}{dy} + P) = 0$$

$$\text{إذا افترضنا } P = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dX} = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow y = c$$

$$y \frac{dP}{dy} + P = 0$$

$$y \frac{dP}{dy} = -P$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\ln P + \ln y = \ln c$$

$$Py = c$$

$$P = \frac{c}{y}, \quad P = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{y}$$

$$\int y dy = \int c dx$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + c_1$$

ممكن ان يكون

في بعض الحالات *

$$yy' + y'^2 = 0$$

$$y \cdot P \frac{dP}{dy} + P^2 = 0$$

$$y \cdot P \frac{dP}{dy} = -P^2 \Rightarrow \frac{dP}{dy} = -\frac{P}{y}$$

$$y dP = -P dy$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int -\frac{dy}{y}$$

$$\ln P = -\ln y + \ln c$$

$$P = y^{-1} \cdot c = \frac{c}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{y} \Rightarrow y dy = c dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = cx + c_1$$

ممكن ان يكون

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$$yy'' + y'^3 = 0$$

let $y' = P$, $y'' = P \cdot \frac{dP}{dy}$

بالقودين في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$yP \frac{dP}{dy} + P^3 = 0$$

$$P(y \frac{dP}{dy} + P^2) = 0$$

الحال المتفرع: $P = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = C$

$$y \frac{dP}{dy} + P^2 = 0$$

$$y \frac{dP}{dy} = -P^2$$

$$y dP = -P^2 dy$$

$$\frac{dP}{P^2} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dP}{P^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int P^{-2} dP + \int \frac{dy}{y} = \int 0$$

$$\frac{P^{-1}}{-1} + \ln y = C$$

$$-\frac{1}{P} + \ln y = C$$

$$\frac{1}{p} = \ln y - c$$

$$\frac{dx}{dy} = \ln y - c$$

Subst dy , $u = \ln y$, $du = \frac{1}{y} dy$

Subst $dy = y \ln y - \int y \cdot \frac{1}{y} dy$
 $= y \ln y - y + c$ الحل العام

$$\int dx = (\ln y - c) dy$$

$$x = y \ln y - y - cy + c_1$$
 الحل العام

ملاحظة:
 يمكن معالجة بعض المعادلات التفاضلية الخاصة ومرتبة
 الثالثة الرتبة الثانية وذلك بغيرته
 $y''' = q \Rightarrow y''' = q' = \frac{dq}{dx}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية:

$$x y''' - 2 y'' = 0$$

let $y'' = q$, $y''' = \frac{dq}{dx}$

بالقوة في المعادلة الاربعة حد

$$x \frac{dq}{dx} - 2q = 0$$

$$\frac{dq}{q} - \frac{2}{x} dx = 0$$

$$\ln q - \ln x^2 = \ln c$$

$$\ln \frac{y}{x^2} = \ln c$$

$$\frac{y}{x^2} = c$$

$$y = cx^2$$

$$\int y'' = \int cx^2$$

$$y' = \frac{1}{3} cx^3 + c_1$$

$$y = \frac{1}{12} cx^4 + c_1 x + c_2$$

الحل العام

حالة ٢ :-

بالنسبة للمعادلة التفاضلية التي لا تظهر فيها x أو y
من الأسهل حلها باعتبار أن y غير موجودة

مثال :- حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$y''' - y'' = 1$$

$$\text{let } q = y'', \quad y''' = \frac{dq}{dx}$$

بالقود في المعادلة اللاحقة نجد على

$$\frac{dq}{dx} - q = 1$$

$$\frac{dq}{dx} = 1 + q$$

$$\frac{dq}{1+q} = dx$$

$$\ln|1+y| = x + c$$

بالتكامل

$$1+y = e^{x+c}$$

$$1+y = e^x \cdot e^c, \quad e^c = C_1$$

$$1+y = C_1 e^x$$

$$y = C_1 e^x - 1$$

$$y' = C_1 e^x - 1$$

$$y' = C_1 e^x - x + C_2$$

$$y = C_1 e^x - \frac{1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

أو

$$\frac{dy}{dx} - y = 1, \quad P(x) = -1, \quad Q(x) = 1$$

$$M(x) = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$$

$$M(x)y' - M(x)y = \int M(x)Q(x)dx + c$$

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = \int e^{-x} \cdot 1 dx + c$$

$$e^{-x}y = -e^{-x} + c$$

$$y = -1 + ce^x$$

$$y' = -1 + ce^x$$

$$y' = ce^x - x + C_1$$

$$y = ce^x - \frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ولكن عن طريق التفاضل

الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة n

$$P^n + a_1(x, y) P^{n-1} + a_{n-1}(x, y) P + a_n(x, y) = 0 \quad (1)$$

$$n = 2, 3, 4, \dots, \quad P = \frac{dy}{dx}$$

تتضمن المعادلات التفاضلية القابلة للحل من هذا النوع إلى ثلاثة أقسام من حيث طرق حلها

1) معادلات قابلة للحل بالنسبة لـ P :-

إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية (1) بالصورة

$$(P - Q_1(x, y)) (P - Q_2(x, y)) \dots (P - Q_n(x, y)) = 0 \quad (2)$$

حيث كل قوس بعد مساواته بالصفر يؤلف معادلة

تفاضلية يجرى حلها باحدى الطرق السابقة ولتعتبر

حلول هذه المعادلات هي

$$g_1(x, y, C) = 0, \quad g_2(x, y, C) = 0, \quad \dots, \quad g_n(x, y, C) = 0$$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو حاصل ضرب هذه الحلول

$$g_1(x, y, C) g_2(x, y, C) \dots g_n(x, y, C) = 0$$

حالات خاصة :-

1) ثابت التفاضل C في معادلات الاقواس المفروضة

هو متشعب لأن المعادلة التفاضلية لا من الرتبة الأولى

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y^2 P^2 - 3xyP + 2x^2 = 0$$

$$(yP - 2x)(yP - x) = 0$$

$$yP - 2x = 0, \quad yP - x = 0$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0, \quad y \cdot \frac{dy}{dx} - x = 0$$

$$y dy - 2x dx = 0, \quad y dy - x dx = 0$$

$$\frac{1}{2} y^2 - x^2 + C = 0, \quad \frac{1}{2} y^2 - \frac{x^2}{2} + C = 0$$

$$(y^2 - 2x^2 + C_1) = 0, \quad (y^2 - x^2 + C_1) = 0$$

$$(y^2 - 2x^2 + C_1)(y^2 - x^2 + C_1) = 0 \quad \text{الحل العام}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$P^2 + PX + yP + Xy = 0$$

بالعزج

$$P(P+X) + y(P+X) = 0$$

$$(P+X)(P+y) = 0$$

$$P+X = 0 \quad \text{or} \quad P+y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + X = 0, \quad \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$dy + Xdx = 0, \quad \frac{dy}{y} + dx = 0$$

$$y + \frac{X^2}{2} + C = 0, \quad \ln y + X + C = 0$$

$$(y + \frac{X^2}{2} + C)(\ln y + X + C) = 0 \quad \text{26/11/11}$$

$$(P - 2X)^2 = 2P - 6X \Rightarrow P^2 - 4PX + 4X^2 = 2P - 6X \therefore \text{26/11/11}$$

$$P^2 - 4PX - 2P + 4X^2 + 6X = 0 \Rightarrow P^2 - P(4X + 2) + 4X^2 + 6X = 0$$

$$A=1, B=-(2+4X), C=4X^2+6X$$

$$P = \frac{(2+4X) \pm \sqrt{(2+4X)^2 - 4(1)(4X^2+6X)}}{2(1)}$$

$$P = \frac{2(1+2X) \pm \sqrt{4-8X}}{2} = \frac{2(1+2X) \pm 2\sqrt{1-2X}}{2}$$

$$P = 1+2X \pm \sqrt{1-2X}$$

$$P = 2X+1+\sqrt{1-2X} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2X+1+\sqrt{1-2X} \Rightarrow dy = (2X+1+\sqrt{1-2X})dx$$

$$y = (\cancel{X^2} + X - \frac{1}{2}(1-2X)^{\frac{3}{2}}) + C = 0$$

$$y - X^2 - X + \frac{1}{3}(1-2X)^{\frac{3}{2}} + C = 0$$

$$P = 2X+1-\sqrt{1-2X} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2X+1-\sqrt{1-2X}$$

$$dy - (2X+1-\sqrt{1-2X})dx = 0$$

$$y - (X^2 + X + \frac{1}{3}(1-2X)^{\frac{3}{2}}) + C = 0$$

$$y - X^2 - X - \frac{1}{3}(1-2X)^{\frac{3}{2}} + C = 0$$

$$3y - 3X^2 - 3X - (1-2X)^{\frac{3}{2}} + C = 0$$

$$(3y - 3X^2 - 3X + \frac{1}{3}(1-2X)^{\frac{3}{2}} + C_1)(3y - 3X^2 - 3X + \frac{1}{3}(1-2X)^{\frac{3}{2}} + C_1) = 0$$

26/11/11

٢) معادلات تفاضلية خالية من x بالاشتراك مع y

١) إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية $F(x, y, P) = 0$

من أجل y أي أن $y = f(x, P)$

تفاضل y بالاشتراك مع x ونفوق عن $P = \frac{dy}{dx}$

فتصبح خالية من y وتكون بدلالة $(x, P, \frac{dP}{dx})$ ثم نحلها عن أجل P بدلالة x ونكتب

هذا الحل هو $\phi(x, P, C) = 0$ ٣

وبحذف الوسط P بين المعادلتين ٢ و ٣ نحصل على

علاقة ب (x, y, C) وهو الحل المطلوب.

ملاحظة:

في بعض الأحيان يكون من الصعب حذف الوسط P ولذا

نعتبر عن كل x من x من y من P ونعتبره

حلاً للمعادلة.

ملاحظة:

قد تظهر حلول إضافية زائدة مثل هذه الحلول تسمى

بالحلول المتفردة.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y = P^2 - PX + \frac{X^2}{2} \Rightarrow P^2 - PX + \frac{X^2}{2} - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2P \frac{dP}{dX} - (P + X \frac{dP}{dX}) + X$$

$$\frac{dy}{dx} = 2P \frac{dP}{dX} - (P + X \frac{dP}{dX}) + X$$

$$P = 2P \frac{dP}{dX} - P - X \frac{dP}{dX} + X$$

$$2P \frac{dP}{dX} - P - X \frac{dP}{dX} + X - P = 0$$

$$\frac{dP}{dX} (2P - X) - 2P + X = 0$$

$$\frac{dP}{dX} (2P - X) - (2P - X) = 0$$

$$(2P - X) \left(\frac{dP}{dX} - 1 \right) = 0$$

إذاً $2P - X = 0 \Rightarrow 2P = X \Rightarrow P = \frac{1}{2} X$
 بالقوانين في المعادلة الأصلية نجد أن

$$y = \frac{1}{4} X^2 - \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{2} X^2$$

$$y = \frac{1}{4} X^2 \quad \text{الحل المقترح}$$

$$\frac{dP}{dX} - 1 = 0$$

$$dP - dX = 0$$

$$P - X = C \Rightarrow P = X + C$$

بالقوانين في المعادلة الأصلية نجد أن
 كل المعادلات

$$y = (X + C)^2 - (X + C)X + \frac{X^2}{2}$$

$$5PX + 5X^2 + P^2 - y = 0$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y = 5PX + 5X^2 + P^2$$

$$\frac{dy}{dX} = 5P + X \cdot 5 \frac{dP}{dX} + 10X + 2P \frac{dP}{dX}$$

$$P = 5P + 5X \frac{dP}{dX} + 10X + 2P \frac{dP}{dX}$$

$$5P + 5X \frac{dP}{dX} + 10X + 2P \frac{dP}{dX} - P = 0$$

$$4P + \frac{dP}{dX} (5X + 2P) + 10X = 0$$

$$2(2P + 5X) + \frac{dP}{dX} (5X + 2P) = 0$$

$$(2P + 5X) \left(2 + \frac{dP}{dX} \right) = 0$$

١٢١

$$2P + 5X = 0 \Rightarrow 2P = -5X \Rightarrow P = -\frac{5}{2}X$$

بالقوة ٢ من المعادلة الأولى نجد أنه

$$Y = 5 \left(-\frac{5}{2}X \right) X + 5X^2 + \left(-\frac{5}{2}X \right)^2 \quad \text{كل المربع}$$

١٢٢

$$2 + \frac{dP}{dX} = 0$$

$$2dX + dP = 0$$

$$2X + P = C \Rightarrow P = C - 2X$$

بالقوة ٢ من المعادلة الأولى نجد أنه

$$Y = 5(C - 2X)X + 5X^2 + (C - 2X)^2 \quad \text{كل المعام}$$

(٤) معادلات خبايا لـ X بالنسبة لـ y

اذا امكن كتابة المعادلة الخبايية ① $F(x, y, P) = 0$

حيث X اجزاء ② $X = \zeta(y, P)$

تخالف X بالنسبة لـ y ونعوض عن $\frac{1}{P} = \frac{dx}{dy}$

فتصبح حالة من X وتكون بدلالة $(y, P, \frac{dP}{dy})$
ثم نحلها حيث P بدلالة y وليكن هذا الحل g

$$\psi(y, P, C) = 0 \quad \text{③}$$

ولاحظ ان C هو دالة على الحد العام للمعادلة ① حيث P

من المعادلة ② و ③ اذا كانت C ممكنة والآن نعتبر

كل من X و y متغيرين بدلالة P

$$PX = y + P^3$$

حالة المعادلة الخبايية

تعتبر المعادلة خبايا لـ X بالنسبة لـ y بدلالة P

$$X = \frac{y}{P} + P^2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P \cdot 1 - y \frac{dP}{dy}}{P^2} + 2P \frac{dP}{dy}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P} - \frac{y}{P^2} \frac{dP}{dy} + 2P \frac{dP}{dy}$$

$$\frac{1}{P} - \frac{y}{P^2} \frac{dP}{dy} + 2P \frac{dP}{dy} - \frac{1}{P} = 0$$

$$-\frac{y}{P^2} \frac{dP}{dy} + 2P \frac{dP}{dy} = 0$$

$$\frac{dP}{dy} (2P - \frac{y}{P^2}) = 0$$

حلقة حذان في قوس

$$1 - (p+y) \frac{dp}{dy} = 0$$

ثلاثة حدود في فصل متغيرات
اربعة حدود في فصل بالتجزئة

$$\frac{dp}{dy} (2p - \frac{y}{p^2}) = 0$$

$$2p - \frac{y}{p^2} = 0$$

$$2p = \frac{y}{p^2}$$

$$2p^3 = y \Rightarrow p^3 = \frac{1}{2} y \Rightarrow p = (\frac{1}{2} y)^{\frac{1}{3}}$$

بالقوة في المعادلة الأصلية عند ذلك

$$(\frac{1}{2} y)^{\frac{1}{3}} x = y + \frac{1}{2} y$$

الحل المتخرج

$$2) \frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow dp = 0 \Rightarrow p = c$$

بالقوة في المعادلة الأصلية عند ذلك

$$cx = y + c^3$$

الحل العام

حل المعادلة التفاضلية التامة

$$4px - 2y = p^3 y^2$$

$$4px = p^3 y^2 + 2y$$

$$x = \frac{p^2 y^2}{4} + \frac{y}{2p}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4} (p^2 \cdot 2y + y^2 \cdot 2p \cdot \frac{dp}{dy}) + \frac{1}{2} (\frac{p \cdot 1 - y \cdot \frac{dp}{dy}}{p^2})$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} p^2 y + \frac{1}{2} y^2 p \frac{dp}{dy} + \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2} \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{2} p^2 y + \frac{1}{2} y^2 p \frac{dp}{dy} + \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2} \frac{dp}{dy} - \frac{1}{p} = 0$$

$$-\frac{1}{2p} + \frac{1}{2} p^2 y + \frac{1}{2} y^2 p \frac{dp}{dy} - \frac{y}{2p^2} \frac{dp}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(P^2 y - \frac{1}{P} \right) + \frac{y}{2P} \frac{dP}{dy} \left(P^2 y - \frac{1}{P} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(P^2 y - \frac{1}{P} \right) \left(1 + \frac{y}{P} \frac{dP}{dy} \right) = 0$$

$$\left(P^2 y - \frac{1}{P} \right) \left(1 + \frac{y}{P} \frac{dP}{dy} \right) = 0$$

$$P^2 y - \frac{1}{P} = 0 \Rightarrow P^2 y = \frac{1}{P} \Rightarrow P^3 y = 1$$

$$P^3 = \frac{1}{y} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{y} \right)^{\frac{1}{3}}$$

بالقوة على العلاقة $y^2 = \frac{1}{P^3}$

$$4x \left(\frac{1}{y} \right)^{\frac{1}{3}} - 2y = \left(\frac{1}{y} \right)^{\frac{1}{3}} y^2$$

$$4x \left(\frac{1}{y} \right)^{\frac{1}{3}} - 2y = \frac{1}{y} y^2$$

الكل المتغير

$$1 + \frac{y}{P} \frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow P dy + y dP = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dP}{P} = 0$$

$$\ln y + \ln P = \ln c$$

$$yP = c \Rightarrow P = \frac{c}{y}$$

بالقوة على العلاقة $y^2 = \frac{1}{P^3}$

$$4x \left(\frac{c}{y} \right) - 2y = \left(\frac{c}{y} \right)^3 * y^2$$

الحل العام

أو طريقة أخرى للحل

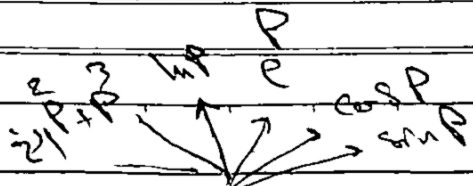
$$-\frac{1}{P} + P^2 y + y^2 P \frac{dP}{dy} - \frac{y}{P^2} \frac{dP}{dy} = 0$$

$$P \left(P y - \frac{1}{P^2} \right) + y \left(y P - \frac{1}{P^2} \right) \frac{dP}{dy} = 0$$

$$\left(P y - \frac{1}{P^2} \right) \left(P + y \frac{dP}{dy} \right) = 0$$

في هذا المثال
نلاحظ ان

الخميس ١٤/١٢/٢٠٢٠



معادلة كليرون

$$y = PX + F(P)$$

وهذه معادلة تفاضلية بالشكل

يمكن حلها باجراء التفاضل بالنسبة الى X

$$\frac{dy}{dx} = P \cdot 1 + X \frac{dP}{dx} + F'(P) \cdot \frac{dP}{dx}$$

$$P = P + X \frac{dP}{dx} + F'(P) \frac{dP}{dx}$$

$$X \frac{dP}{dx} + F'(P) \frac{dP}{dx} = 0$$

$$\frac{dP}{dx} (X + F'(P)) = 0$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = C$$

بالقوة في المعادلة الاصلية نحصل على
الحل العام

$$y = CX + F(C)$$

النتيجة ان $y = CX + F(C)$ هو حل عام لمعادلة كليرون

$$X + F'(P) = 0$$

ثم نجد ان P من هذه العلاقة والمعادلة الاصلية لنحصل على
الحل الخاص

مثال حل المعادلة التفاضلية

$$y = PX + P^2$$

$$\frac{dy}{dx} = P \cdot 1 + X \frac{dP}{dx} + 2P \frac{dP}{dx}$$

$$P = P + X \frac{dP}{dx} + 2P \frac{dP}{dx}$$

$$X \frac{dP}{dx} + 2P \frac{dP}{dx} = 0$$

$$\frac{dP}{dX} (X + 2P) = 0$$

$$\text{أ) } \frac{dP}{dX} = 0 \Rightarrow P = c$$

بالقوى في المعادلة الأصلية نجد أن

$$y = cX + c^2 \quad \text{الحل العام}$$

$$\text{ب) } X + 2P = 0 \Rightarrow 2P = -X \Rightarrow P = -\frac{1}{2}X$$

بالقوى في المعادلة الأصلية نجد أن

$$y = (-\frac{1}{2}X)X + (-\frac{1}{2}X)^2$$

$$y = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{4}X^2 \quad \text{الحل المتفرد}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$X - 2P - \log P = 0$$

$$X = 2P + \log P$$

$$\frac{dX}{dP} = 2 \frac{dP}{dP} + \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dP}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{dP}{dY} (2 + \frac{1}{P})$$

$$\int dY = \int (2P + 1) dP$$

$$y = P^2 + P + c$$

$$X = 2P + \log P$$

الحل العام

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة
المعادلة الخطية:

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

حيث $a_1(x), a_2(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ دوال مستمرة في x

إذا كانت $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ ثوابت فإن المعادلة (1) تسمى
معادلة خطية ذات معاملات ثابتة.

إذا كانت $f(x) = 0$ فإن المعادلة (1) تسمى معادلة
تفاضلية خطية متجانسة وإذا كانت $f(x) \neq 0$ فإنها تسمى
معادلة غير متجانسة.

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n

ذات المعاملات الثابتة هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (2)$$

حيث:

إذا كانت الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ حلولاً للمعادلة التفاضلية

المتجانسة (2) وكانت $C_1, C_2, \dots, C_n$ ثوابت فإن

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

وهو أيضاً حل للمعادلة (2).

البرهان: (نرى أن $C_1, C_2, \dots, C_n$)

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + a_n y_1 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy_2}{dx} + a_n y_2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d^n y_n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy_n}{dx} + a_n y_n = 0 \quad (2.n)$$

نضرب المعادلة الأولى بـ C_1 والمعادلة (2.2) بـ C_2
 الى المعادلة (2.n) بـ C_n ثم نجمع الحدود المماثلة فنحصل على

$$\frac{d^n}{dx^n} (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n)$$

$$+ \dots + a_{n-1} \frac{d}{dx} (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n) + a_n (C_1 y_1 + \dots + C_n y_n) = 0$$

∴ نستنتج بان

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

هو الحل لأزمنة كحق المعادلة المتجانسة.

الدوال المستقلة خطياً والدوال المترتبة خطياً

تعريف: نسمي الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ التي مرتبة خطياً في الفترة المفتوحة I إذا وجدت ثوابت $C_1, C_2, \dots, C_n$ ليست كلها مساوية للصفر بحيث أن

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$$

وبخلاف الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ بانها مستقلة خطياً في الفترة

المفتوحة I إذا وجدت ثوابت $C_1, C_2, \dots, C_n$ بحيث أن

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$$

$$e^x, 3e^x, y_1 = e^x, y_2 = 3e^x$$

أثبت ان الدوال
حريضة خطياً.

$$C_1 e^x + C_2 (3e^x) = 0$$

$$W(e^x, 3e^x) = \begin{vmatrix} e^x & 3e^x \\ e^x & 3e^x \end{vmatrix}$$

$$C_1 = -1, C_2 = \frac{1}{3}$$

$$= 3e^{2x} - 3e^{2x} = 0$$

$$C_1 = -3, C_2 = 1$$

مثال اثبت ان الدوال $\sin^2 x, \cos^2 x$ حريضة خطياً

$$C_1 \sin^2 x + C_2 \cos^2 x + C_3 = 0$$

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = -1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

عند القيم $[C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = -1]$ الدوال حريضة خطياً.

اثبت ان الدالتان e^x, e^{2x} مستقلة خطياً:

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$$

نستعمل بقدر عدد الدوال

$$C_1 e^x + C_2 e^{2x} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

نطرح (2) من (1) فنحصل

$$C_2 e^{2x} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

بالعوض في (1) فنحصل

$$C_1 e^x + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$C_1 = 0, C_2 = 0$$

∴ الدالتان e^x, e^{2x} مستقلة خطياً.

مثال: اثبت ان الدوال X, X^2, X^3 مستقلة خطياً

$$C_1 X + C_2 X^2 + C_3 X^3 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$C_1 + 2C_2 X + 3C_3 X^2 \quad \text{--- (2)}$$

$$2C_2 + 6C_3 X \quad \text{--- (3)}$$

من المعادلة (3) نحصل على

$$2C_2 = -6C_3 X \Rightarrow C_2 = -3C_3 X$$

بالعوض في المعادلة (1) نحصل على

$$C_1 - 6C_3 X^2 + 3C_3 X^2 = 0$$

$$C_1 - 3C_3 X^2 = 0 \Rightarrow C_1 = 3C_3 X^2$$

بالعوض في المعادلة الأولى نحصل على

$$\cancel{3C_3 X^3} - \cancel{3C_3 X^3} + C_3 X^3 = 0$$

$$C_3 = 0$$

$$C_2 = 0, C_1 = 0$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

∴ الدوال مستقلة خطياً

3 عدد خرونيسيك : نعرف عدد خرونيسيك n من الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ القابلة للاستخدام من الرتبة $(n-1)$ في الفترة المفتوحة I بالشكل التالي $I = (-\infty, \infty)$

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

حيث:

إذا كانت الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ حلول للمعادلة المتجانسة (9) فإن الشرط الضروري والكافي لكي تكون الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ حرة خطياً في الفترة المفتوحة I هو

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

حيث:

لذلك $y_1, y_2, \dots, y_n$ دوال مستقلة في الفترة المفتوحة I لكل $x \in I$ فإن الحلول $y_1, y_2, \dots, y_n$ للمعادلة التفاضلية المتجانسة (9) تكون مستقلة خطياً في الفترة I إذا وفقط إذا كان المحدد

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

مثال: بديه أن الدوال $e^x, 2e^x, e^{-x}$ حرة خطياً في الفترة المفتوحة

$$W(e^{-x}, 2e^x, e^x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & 2e^x & e^x \\ -e^{-x} & 2e^x & e^x \\ e^{-x} & 2e^x & e^x \end{vmatrix} = 0$$

∴ الهدف الدوال $e^x, 2e^x, e^{-x}$ حرة خطياً في الفترة المفتوحة

∴ الدوال $e^x, 2e^x, e^{-x}$ حرة خطياً

قيمة المحدد تساوي صفر وذلك لتساوي المتابع المميز الأول والثالث
(أو هما أحدهما).

انتهى انت $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ هما حلان مستقلان
خطياً للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$y_1 = \cos x$$

$$y_1' = -\sin x$$

$$y_1'' = -\cos x$$

بالقوى في المعادلة الأصلية نحصل على

$$-\cos x + \cos x = 0$$

$$0 = 0$$

$\therefore y_1$ هو حل للمعادلة

$$y_2 = \sin x$$

$$y_2' = \cos x$$

$$y_2'' = \sin x$$

بالقوى في المعادلة الأصلية ① نحصل على

$$-\sin x + \sin x = 0$$

$$0 = 0$$

$\therefore y_2$ هو حل للمعادلة

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

$\therefore$ الدوال مستقلة خطياً.

الخلاصة :

لا نستخدم الطريقة الأخيرة لاختبار الدوال المستقلة خطياً ما لم تكن
الدوال حلولاً للمعادلة المتجانسة ②

المؤثر D :-

يستخدم الرمز D في المعادلات التفاضلية ليقصد اشتقاقاً في حالة النسبة إلى المتغير المستعمل فمثلاً إذا كانت المتغير المستعمل هو x فإن $D = \frac{d}{dx}$ صارت بهذا يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الكتابية المتجانسة $\textcircled{1}$ بدلالة المؤثر D وبالشكل التالي .

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

أو

$$F(D)y = 0$$

$$F(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n \quad \text{حيث}$$

كذلك يمكن التعبير عن $F(D)$ بدلالة عواملها الأولية وبالشكل التالي

$$F(D) = (D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n)$$

خواص المؤثر

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دوالاً قابلة للاشتقاق و m, n أعداد صحيحة موجبة فإن

$$1) D^m f(x) + D^n f(x) = D^m f(x) + D^n f(x) \quad ||$$

$$2) D^m D^n f(x) = D^n D^m f(x) = D^{m+n} f(x)$$

$$3) D^n \{f(x) \mp g(x)\} = D^n f(x) \mp D^n g(x)$$

$$4) D^n (c f(x)) = c D^n f(x) \quad \text{إذا كان } c \text{ ثابتاً}$$

1) $D^2 e^{2x} + D e^{2x}$ الحل: على الخواص
 $= 4e^{2x} + 2e^{2x} = 6e^{2x}$

2) $D^2 D e^{2x} = D^3 e^{2x} = 8e^{2x}$

3) $D^2 \{2x + \sin x\} = D^2(2x) + D^2 \sin x$
 $= 0 - \sin x = -\sin x$

4) $D(5 \tan x) = 5D(\tan x) = 5 \sec^2 x$

خواص مؤثر متعدد الحدود
 $F(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$ ليكن
 مؤثر متعدد الحدود

$F(D) e^{bx} = F(b) e^{bx}$

إذا كانت b عدد حقيقي
 البرهان :-

$F(D) = (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)$

$F(D) e^{bx} = D^n e^{bx} + a_1 D^{n-1} e^{bx} + \dots + a_{n-1} D e^{bx} + a_n e^{bx}$ ⊗

$D e^{bx} = b e^{bx}$

$D^2 e^{bx} = b^2 e^{bx}$

$\vdots$
 $D^n e^{bx} = b^n e^{bx}$

بالقوة $\otimes$ على

$F(D) e^{bx} = b^n e^{bx} + a_1 b^{n-1} e^{bx} + \dots + a_{n-1} b e^{bx} + a_n e^{bx}$
 $= (b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_{n-1} b + a_n) e^{bx}$
 $F(D) e^{bx} = F(b) e^{bx}$

$$(D^2+1)^2 e^{2x} \quad \text{مثال جديد}$$

$$b=2$$

$$F(D) = (D^2+1)^2$$

$$F(D) e^{bx} = F(b) e^{bx}$$

$$F(b) = (b^2+1)^2$$

$$F(2) = (2^2+1)^2 = (4+1)^2 = 25$$

$$(D^2+1)^2 e^{2x} = 25 e^{2x}$$

مبرهن: إذا كانت y حلاً عاماً للأشكال $F(D)y = 0$ و $F(D)y = 0$

$$F(D) \{ e^{bx} y \} = e^{bx} F(D+b) y$$

$$F(D) (e^{bx} y) = (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) (e^{bx} y)$$

$$= D^n (e^{bx} y) + a_1 D^{n-1} (e^{bx} y) + \dots + a_{n-1} D (e^{bx} y) + a_n e^{bx} y$$

$$D(e^{bx} y) = e^{bx} D y + b e^{bx} y$$

$$D(e^{bx} y) = e^{bx} (D+b) y$$

$$D^2(e^{bx} y) = e^{bx} (D+b)(D+b) y = e^{bx} (D+b)^2 y$$

$$D^n(e^{bx} y) = e^{bx} (D+b)^n y$$

بالقوة في المتكاملات

$$F(D) (e^{bx} y) = e^{bx} (D+b)^n y + a_1 e^{bx} (D+b)^{n-1} y + \dots + a_{n-1} e^{bx} (D+b) y + a_n e^{bx} y$$

$$= e^{bx} [(D+b)^n + a_1(D+b)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(D+b) + a_n] y$$

$$= e^{bx} f(D+b) y$$

$$f(D)(e^{bx} y) = e^{bx} f(D+b) y$$

$$(D^2 - 5D + 6) X e^x$$

$$b=1, y=x$$

$$f(D+b) = f(D+1) = (D+1)^2 - 5(D+1) + 6$$

$$= D^2 + 2D + 1 - 5D - 1 + 6$$

$$f(D+b) = D^2 - 3D + 2$$

$$(D^2 - 5D + 6) X e^x = e^x (D^2 - 3D + 2) X$$

$$= e^x (X D^2 - 3DX + 2X)$$

$$= e^x (0 - 3 + 2X)$$

$$= (-3 + 2X) e^x = -3e^x + 2Xe^x$$

منه :- إذا كان b عددًا حقيقيًا

$$F(D^2) \sin bx = F(-b^2) \sin bx$$

$$F(D^2) \cos bx = F(-b^2) \cos bx$$

البيان :-

$$F(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

$$F(D^2) = (D^{2n} + a_1 D^{2(n-1)} + \dots + a_{n-1} D^2 + a_n) \sin bx$$

$$F(D^2) \sin bx = D^{2n} \sin bx + a_1 D^{2(n-1)} \sin bx + \dots + a_{n-1} D^2 \sin bx + a_n \sin bx$$

$$D^2 \sin bx = (-b^2) \sin bx$$

$$D^4 \sin bx = (-b^2)^2 \sin bx$$

$$D^2 \cos bx = (-b^2) \cos bx$$

$$D^4 \cos bx = (-b^2)^2 \cos bx$$

$$D^{2n} \sin bx = (-b^2)^n \sin bx$$

$$D^{2n} \cos bx = (-b^2)^n \cos bx$$

وهذا هو المطلوب.

$$F(D^2) \sin bx = (-b^2)^n \sin bx + (-b^2)^{n-1} a_1 \sin bx + \dots + a_{n-1} (-b^2) \sin bx + a_n \sin bx$$

$$F(D^2) \sin bx = [(-b^2)^n + a_1 (-b^2)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (-b^2) + a_n] \sin bx$$

$$F(D^2) \sin bx = F(-b^2) \sin bx$$

$$(D^4 + 3D^2 - 1) \sin 2x$$

$$b=2$$

$$D^3 \quad \text{و كذا}$$

$$D^2 \cdot D$$

$$(-b^2)D$$

$$F(D) = D^4 + 3D^2 - 1$$

$$F(D^2) = (D^2)^2 + 3D^2 - 1$$

$$F(-b^2) = (-b^2)^2 + 3(-b^2) - 1$$

$$F(-2^2) = (-2^2)^2 + 3(-2^2) - 1$$

$$= 16 - 12 - 1 = 3$$

$$(D^4 + 3D^2 - 1) \sin 2x = 3 \sin 2x$$

$$(D^4 + 3D^2 - 1) \cos 2x$$

$$b=2$$

$$F(D) = D^4 + 3D^2 - 1$$

$$F(D^2) = (D^2)^2 + 3D^2 - 1$$

$$F(-b^2) = (-b^2)^2 + 3(-b^2) - 1$$

$$F(-2^2) = (-2^2)^2 + 3(-2^2) - 1$$

$$= 16 - 12 - 1 = 3$$

$$F(D^2) \cos 2x = F(-b^2) \cos 2x$$

$$(D^4 + 3D^2 - 1) \cos 2x = 3 \cos 2x$$

حل المعادلات التفاضلية الخطية بتحويلها الى الرتبة الاولى:
 الصيغة العامة للمعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي ثوابت والتي يمكن كتابتها بصيغة
 المؤثر بالشكل التالي

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = F(x)$$

أدوية لـ y خواصها الخطية اي بالصيغة

$$(D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n) y = F(x) \quad \text{--- ①}$$

نعرف ان

$$U_1 = (D - m_2)(D - m_3) \dots (D - m_n) y$$

عند ذلك تتحول المعادلة ① من رتبة n الى معادلة تفاضلية
 من الرتبة الاولى

$$(D - m_1) U_1 = F(x)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل

$$\frac{dU_1}{dx} - m_1 U_1 = F(x) \quad \text{--- ②}$$

المعادلة ② معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى وعامل التكامل هو

$$e^{-m_1 x}$$

فاجزا من المعادلة ② بعامل التكامل فنحصل على

$$U_1 e^{-m_1 x} = \int e^{-m_1 x} F(x) dx$$

$$U_1 = e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} F(x) dx$$

ثم نعوض U_1 بقيمتها الاولى فتصبح

$$(D - m_2)(D - m_3) \dots (D - m_n) y = e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} F(x) dx \quad \text{--- ③}$$

$$u_2 = (D-m_3)(D-m_4) \dots (D-m_n)y$$

نفرض

ونقومنا في المعادلة ③ فنصبح

$$(D-m_2)u_2 = e^{m_1x} \int e^{-m_1x} f(x) dx \quad \text{--- ④}$$

المعادلة ④ معادلة خطية من الرتبة الأولى وعامل تكاملها هو

$$e^{-m_2x}$$

نفرض المعادلة ④ بعامل التكامل فنصبح

$$u_2 e^{-m_2x} = \int e^{-m_2x} \left[e^{m_1x} \int e^{-m_1x} f(x) dx \right] dx$$

$$u_2 = e^{m_2x} \left[\int e^{-m_2x} \left[e^{m_1x} \int e^{-m_1x} f(x) dx \right] dx \right]$$

ويمكن الاستمرار بهذه الطريقة الى ان نصل على التكامل العام للمعادلة التفاضلية الخطية بمتغيرها العادي.

$$y = e^{m_nx} \int e^{-m_nx} \cdot e^{m_{n-1}x} \int \dots \int e^{-m_1x} f(x) dx \dots dx$$

حالة خاصة

حالة المعادلة التفاضلية التالفة بتحديدنا الى الرتبة الأولى.

$$y'' - 6y' + 8y = e^x$$

$$(D^2 - 6D + 8)y = e^x$$

$$(D-4)(D-2)y = e^x$$

نفرض المتغير الثاني

$$\text{Let } (D-2)y = u_1$$

$$(D-4)u_1 = e^x$$

$$\frac{du_1}{dx} - 4u_1 = e^x$$

$$M(x) = \int -4 dx = -4x$$

$$u_1 e^{-4x} = \int e^{-4x} \cdot e^{4x} dx$$

$$u_1 e^{-4x} = \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

$$u_1 = -\frac{1}{3} e^x + C_1 e^{4x}$$

$$(D-2)y = -\frac{1}{3} e^x + C_1 e^{4x}$$

$$\frac{dy}{dx} - 2y = \left(-\frac{1}{3} e^x + C_1 e^{4x}\right)$$

$$M(x) = \int -2 dx = -2x$$

$$y e^{-2x} = \int e^{-2x} \left(-\frac{1}{3} e^x + C_1 e^{4x}\right) dx$$

$$y e^{-2x} = \int \left(-\frac{1}{3} e^{-x} + C_1 e^{2x}\right) dx$$

$$y e^{-2x} = \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{1}{2} C_1 e^{2x} + C_2$$

$$y = \frac{1}{3} e^x + \frac{1}{2} C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} \quad \text{الحل النهائي}$$

المبتجاة

حل المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة

المقدمة العامة للمعادلة الخطية المتجانسة هي:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (1)$$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت

كذلك يمكن كتابتها بالشكل

$$[D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n] y = 0$$

أو بدلالة عوامله الثابتة

$$(D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n) y = 0$$

أو

$$F(D) y = 0$$

تسمى المعادلة الجبرية

$$F(m) = (m - m_1)(m - m_2) \dots (m - m_n) = 0$$

بالمعادلة الأساسية

$$m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

فإنها تمثل المعادلة المميزة للمعادلة (1)

لكي نجد الحلول العامة للمعادلة الخطية المتجانسة ينبغي أن نستخدم طريقة التحقق من الرتبة الأولى والاعتماد على طريقة

كل ذلك هذا النوع من المعادلات نتناول

1) معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية أولاً وعندئذ

نقوم بتعميمها بعد ذلك للرتبة n

المقدمة العامة للمعادلة الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

ذات المعاملات الثابتة هي:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 \quad (2)$$

حيث a_1, a_2 ثوابت

كل هذه المعادلات بدورها تخضع للتركيب الأولي نكتب
هذه المعادلات بدورها عوامل التأثير وبالشكل التالي

$$[D^2 + a_1 D + a_2] y = 0$$

$$(D + m_1)(D + m_2)y = 0$$

$$\text{Let } u = (D + m_2)y$$

$$(D + m_1)u = 0$$

$$\frac{du}{dx} + m_1 u = 0, m(x) = \int -m_1 dx = -m_1 x$$

$$u \cdot e^{-m_1 x} = \int 0 dx$$

$$u \cdot e^{-m_1 x} = a$$

$$u = a e^{m_1 x}$$

$$(D + m_2)y = a e^{m_1 x}$$

$$\frac{dy}{dx} + m_2 y = a e^{m_1 x}, m(x) = \int -m_2 dx = -m_2 x$$

$$y e^{-m_2 x} = a \int e^{m_1 x} \cdot e^{-m_2 x} dx$$

$$y e^{-m_2 x} = a \int e^{(m_1 - m_2)x} dx \quad \text{--- (3)}$$

يمكن ان يكون جذرات المعادلة المميزة بدلالة حالات
1) اذا كانت جذرات المعادلة المميزة حقيقيتين ومختلفتين
ايعني ان $m_1 \neq m_2$ ففي ذلك يكون حل المعادلة 2)

$$y e^{-m_2 x} = \frac{a}{m_1 - m_2} e^{(m_1 - m_2)x} + C_2$$

$$y = \frac{a}{m_1 - m_2} e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$$

هنا C_1 و C_2 ثابتان اختياريان و $C_3 = \frac{a}{m_1 - m_2}$

(٢) اذا كانت جذور المعادلة المميزة حقيقية و متساوية
 اي $m_1 = m_2 = m$
 اي معادلات (3) تكون على الشكل:

$$y e^{-mx} = \int a dx$$

$$y e^{-mx} = ax + C_2$$

$$y = ax e^{mx} + C_2 e^{mx}$$

$$y = (ax + C_2) e^{mx}$$

$$y = (C_1 x + C_2) e^{mx}$$

هنا C_1 و C_2 ثابتان اختياريان و $C_1 = a$
 $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{mx}$ $m_1 = m_2 = m_3$

(٣) اذا كانت جذور المعادلة المميزة عددية عقدية
 $m_1 = a + ib$ و $m_2 = a - ib$

نظامان حاد المعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الاولى

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

$$y = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x}$$

$$y = C_1 e^{ax} \cdot e^{ibx} + C_2 e^{ax} \cdot e^{-ibx}$$

$$y = e^{ax} (C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx})$$

$$\therefore e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx \quad \left. \begin{array}{l} \text{قواسيث} \\ \text{أويلر} \end{array} \right\}$$

$$e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx$$

$$y = e^{ax} [C_1 (\cos bx + i \sin bx) + C_2 (\cos bx - i \sin bx)]$$

$$y = e^{ax} [\underbrace{(C_1 + C_2)}_A \cos bx + i \underbrace{(C_1 - C_2)}_B \sin bx]$$

$$y = e^{ax} [A \cos bx + B \sin bx]$$

$$B = i(C_1 - C_2), \quad A = C_1 + C_2$$

مرفقة:

إذا علمت المعادلة التفاضلية المتجانسة التالية

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

اعتب المعادلة المميزة هي

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$$

١) إذا كانت جذرا المعادلة المميزة حقيقيين ومختلفين أي $m_1 \neq m_2$ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

٢) إذا كانت جذرا المعادلة المميزة حقيقيين ومتساويين أي $m_1 = m_2 = m$ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{mx}$$

(٤) إذا كان جذرا المعادلة المميزة عددين عقديين $m_1 = a + ib$ و $m_2 = a - ib$ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$y = e^{ax} [C_1 \cos bx + C_2 \sin bx]$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$D^2 y - 4Dy + 3y = 0$$

$$(D^2 - 4D + 3)y = 0$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$(m-3)(m-1) = 0$$

$$m-3 = 0 \Rightarrow m=3$$

$$m-1 = 0 \Rightarrow m=1$$

∴ الجذرين حقيقيين ومختلفين

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$D^2 y - 2Dy + y = 0$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)(m-1) = 0$$

$$m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

(الجذر حكر)

$$m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{mx}$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$D^2 y + 2Dy + 2y = 0$$

$$(D^2 + 2D + 2)y = 0$$

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

$$A=1, B=2, C=2$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$= -1 \pm i$$

$$m_1 = -1 + i$$

$$m_2 = -1 - i$$

$$y = e^{bx} [c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$y = e^{-x} [c_1 \cos x + c_2 \sin x]$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(D-1)(D-2)(D-3)y=0$$

$$(m-1)(m-2)(m-3)=0$$

$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

$$m-2=0 \Rightarrow m=2$$

$$m-3=0 \Rightarrow m=3$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(D-1)(D^2+2D+2)y=0$$

$$(m-1)(m^2+2m+2)=0$$

$$m-1=0 \Rightarrow m_1=1$$

$$m^2+2m+2=0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$m_2 = -1 + i$$

$$m_3 = -1 - i$$

$$y = e^{-x} [A \cos x + B \sin x] + c_1 e^x$$

حل المعادلات التفاضلية

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0$$

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$

$$(m^3 - 1) - 3m^2 + 3m = 0$$

$$(m-1)(m^2 + m + 1) - 3m(m-1) = 0$$

$$(m-1)(m^2 + m + 1 - 3m) = 0$$

$$(m-1)(m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m-1 = 0 \Rightarrow m_1 = 1$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)(m-1) = 0$$

$$m-1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2 - 2)y = 0$$

$$(m^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow (m^2 - 2)(m^2 - 2) = 0$$

$$(m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2})(m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2}) = 0$$

$$(m - \sqrt{2})^2 (m + \sqrt{2})^2 = 0$$

$$m - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = \sqrt{2} \quad (\text{الجذر (مكرر)})$$

$$m + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow m_3 = m_4 = -\sqrt{2}$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\sqrt{2}x} + (c_3 + c_4 x) e^{-\sqrt{2}x}$$

* إيجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية الغير

المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

(أ) طريقة المعاملات الغير المحددة.

المنهج القاعدي للمعادلات التفاضلية الغير المتجانسة ذات

المعاملات الثابتة هي:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ ثوابت

$$F(D)y = F(x) \quad \text{أو}$$

$$F(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

يتكون الحل العام للمعادلة الغير المتجانسة من جزئيتين:

الحل العام للمعادلة المتجانسة ويسمى بالذات المتجانسة أو

الحل المتجانس ويرمز له بالرمز y_c أو $C(x)$ مضاعفاًإلى الحل الخاص لمعادلة الغير المتجانسة ويسمى بالحل الخاص أو y_p

ويجزأ الحل y_p أو $I(x)$ وبالتالي يكون الحل
العمام المعادلة الغير المتجانسة هو

$$y = C(x) + I(x)$$

$$y = y_c + y_p$$

أو

يعتمد إيجاد الحل (الحل) للمعادلة الغير المتجانسة على
طبيعة الدالة $I(x)$ والتي تظهر في الحالات التالية:
١) الحالة الأولى:

إذا كانت $I(x)$ حالة متعددة الحدود أي

$$I(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n$$

عند ذلك نختار الحل الخاص وهو أيضاً متعددة الحدود
مساوية لدرجة $I(x)$ أي

$$y_p = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

ثم نحاول إيجاد معاملات متعددة الحدود المقترحة أي

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$3y'' - 5y' - 2y = 6x^2 - 7$$

$$3m^2 - 5m - 2 = 0$$

$$(3m+1)(m-2) = 0$$

$$3m+1=0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$$m-2=0 \Rightarrow m=2$$

$$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y' = 2AX + B$$

$$y'' = 2A$$

بالقوديث في المعادلة الاصلية نجد

$$6A - 5(2AX + B) - 2(AX^2 + BX + C) = 6x^2 - 7$$

$$6A - 10AX - 5B - 2AX^2 - 2BX - 2C = 6x^2 - 7$$

$$-2AX^2 + (-10A - 2B)x + (6A - 5B - 2C) = 6x^2 - 7$$

$$-2A = 6 \Rightarrow A = -3$$

معادلة x^2

$$-10A - 2B = 0$$

معادلة x

$$30 = 2B \Rightarrow B = 15$$

$$6A - 5B - 2C = -7 \quad \text{معادلة الحد الخالي من } x$$

$$-18 - 75 - 2C = -7$$

$$-93 - 2C = -7$$

$$-93 + 7 = 2C$$

$$-86 = 2C \Rightarrow C = -43$$

بالقوديث في y_p نجد

$$y_p = -3x^2 + 15x - 43$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 e^{2x} - 3x^2 + 15x - 43$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

٢ الحالة الثانية :

إذا كانت $b = 0$ $y(x) = 0$

فيكون الحل التام هو $y(x) = 0$ وهذا هو الحل الخاص للمعادلة المميزة.

إذا لم تكن a أحد جذور المعادلة المميزة فنحن ذلك نضع الحل الخاص للمعادلة الغير المتجانسة بالشكل التالي

$$y_p = A e^{ax}$$

أما إذا كانت a أحد جذور المعادلة المميزة وغير حكر فنحن ذلك نضع الحل الخاص للمعادلة الغير المتجانسة بالشكل التالي

$$y_p = A x e^{ax}$$

أما إذا كانت a أحد جذور المعادلة المميزة وحكرة فنحن ذلك نضع الحل الخاص للمعادلة الغير المتجانسة بالشكل التالي

$$y_p = A x^2 e^{ax}$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$3y'' - 5y' - 2y = 5e^{3x} \quad a = 3$$

$$(3D^2 - 5D - 2)y = 5e^{3x}$$

$$(3m+1)(m-2) = 0$$

$$3m+1=0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$$m-2=0 \Rightarrow m=2$$

$$y_c = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 e^{2x}$$

∵ $a=3$ ليس أحد جذور المعادلة

$$y_p = A e^{3x}$$

فنضع

$$y' = 3A e^{3x}$$

$$y'' = 9A e^{3x}$$

بالعوض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$27A e^{3x} - 15A e^{3x} - 2A e^{3x} = 5 e^{3x}$$

$$10A e^{3x} = 5 e^{3x}$$

$$10A = 5 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{2} e^{3x}$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$

هنا المعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2 - 9)y = e^{3x}$$

$$m^2 - 9 = 0$$

$$(m-3)(m+3) = 0$$

$$m-3 = 0 \Rightarrow m=3$$

$$m+3 = 0 \Rightarrow m=-3$$

$$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

$$a = 3$$

$$y_p = Ax e^{3x}$$

هو أمر جزر المعادلة المميزة وغير ممكن

$$y' = 3Ax e^{3x} + 3A e^{3x}$$

$$y'' = 9Ax e^{3x} + 3A e^{3x} + 3A e^{3x}$$

$$= 9Ax e^{3x} + 6A e^{3x}$$

بالقوف في المعادلة الأصلية

$$9Ax e^{3x} + 6A e^{3x} - 9Ax e^{3x} = e^{3x}$$

$$6A e^{3x} = e^{3x}$$

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

بالقوف في y_p نجد

$$y_p = \frac{1}{6} x e^{3x}$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6} x e^{3x}$$

الحالة الثالثة :

$$f(x) = b \cos ax$$

$$f(x) = b \sin ax$$

لايجاد الحل الخاص نلاحظ

اذا لم يكن a_i احد جذور المعادلة المميزة عند ذلك نعرف

$$y_p = A \cos ax + B \sin ax$$

أما اذا كان a_i أحد جذور المعادلة المميزة وغير مكرر عند ذلك نعرف الحل الخاص هو

$$y_p = x(A \cos ax + B \sin ax)$$

وإذا كان a_i أحد جذور المعادلة المميزة ومكرر m من المرات فنحن نعرف الحل الخاص هو :

$$y_p = x^m (A \cos ax + B \sin ax)$$

حيث A و B مجهولات وتطلب إيجادها بالقوف عن y واشتقاقها

في المعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$3y'' - 5y' - 2y = 4\sin 2x, \quad \lambda i = 2i$$

$$3m^2 - 5m - 2 = 0$$

$$(3m+1)(m-2) = 0$$

$$3m+1=0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$$m-2=0 \Rightarrow m=2$$

$$y_c = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 e^{2x}$$

$\lambda i = 2i$ ليس جزءا من جذور المعادلة المميزة

$\therefore$ نفرض الشكل التالي $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

بالقوف في المعادلة المعطاة نحصل على

$$-12A\cos 2x - 12B\sin 2x + 10\sin 2x - 10B\cos 2x - 2A\cos 2x - 2B\sin 2x = 4\sin 2x$$

$$(-12A - 10B - 2A)\cos 2x + (-12B + 10A - 2B)\sin 2x = 4\sin 2x$$

$$-14A - 10B = 0 \quad \text{--- ①} \quad \text{و.ع}$$

$$-14B + 10A = 4 \quad \text{--- ②} \quad \text{و.ع}$$

$$-7A - 5B = 0 \Rightarrow 7A = -5B \Rightarrow A = -\frac{5}{7}B$$

$$-7B + 5A = 2 \quad \text{--- ③}$$

بالقوف في ③ مع A نحصل على

$$-7B - 25B = 2$$

$$-32B = 2 \Rightarrow B = -\frac{1}{16}$$

$$-74B = 14 \Rightarrow B = \frac{-14}{74} = \frac{-7}{37}$$

$$A = \frac{-5}{7} \cdot \frac{-7}{37} = \frac{5}{37}$$

$$y_p = \frac{5}{37} \cos 2x - \frac{7}{37} \sin 2x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 e^{2x} + \frac{5}{37} \cos 2x - \frac{7}{37} \sin 2x$$

حالة: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x$$

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2i$$

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

بما أن $2i$ و $-2i$ هما جذور المعادلة التفاضلية

نبحث عن الحل الخاص

$$y_p = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

$$y_p = Ax \cos 2x + Bx \sin 2x$$

$$y' = -2Ax \sin 2x + A \cos 2x + 2Bx \cos 2x + B \sin 2x$$

$$y'' = -4AX \cos 2X - 2A \sin 2X - 2A \sin 2X - 4BX \sin 2X + 2B \cos 2X + 2B \cos 2X$$

$$y'' = -4AX \cos 2X - 4A \sin 2X - 4BX \sin 2X + 4B \cos 2X$$

بالقوف في المعادلة الأصلية نحصل على

$$-4AX \cos 2X - 4A \sin 2X - 4BX \sin 2X + 4B \cos 2X + 4AX \cos 2X + 4BX \sin 2X = \cos 2X$$

$$-4A \sin 2X + 4B \cos 2X = \cos 2X$$

$$-4A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4} X \sin 2X$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 \cos 2X + C_2 \sin 2X + \frac{1}{4} X \sin 2X$$

إلى العام للمعادلة الأصلية

الحالة الرابعة:

$$F(x) = b x^n e^{cx} \cos ax$$

إذا كانت

$$F(x) = b x^n e^{cx} \sin ax$$

أو

نضع الحد الثاني في هذا الشكل

$$y_p = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n) e^{cx} \cos ax + (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) e^{cx} \sin ax$$

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' - 4y' + 5y = x^2 e^{2x} \sin x$$

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$$y_c = e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$$

$$y_p = (A_0 x^2 + A_1 x + A_2) e^{2x} \cos x + (B_0 x^2 + B_1 x + B_2) e^{2x} \sin x$$

ثم نشتق ونكمل الحل:

٥) طريقة تغيير الثوابت:

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد الحل الخاص لأى معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ويعطى نتائج هذه الطريقة عندنا لا تكون (x) واحدة من الحالات الدرجة المذكورة في الطريقة السابقة.

وتتميز هذه الطريقة بتغيير الثوابت الزمنية في الحل المتجانس إلى دوال في المتغير (x) حيث ثم نحاول إيجاد هذه الدوال

$$\text{لتكن } \textcircled{1} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = f(x)$$

معادلة تفاضلية غير متجانسة من الدرجة الثانية.

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad \text{هي الحل المتجانس للمعادلة } \textcircled{1}$$

حيث y_1 و y_2 هي حلول للمعادلة المتجانسة المتناظرة للمعادلة $\textcircled{1}$ الآن نعرف الحل الخاص للمعادلة $\textcircled{1}$ هو:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'$$

الشرط الضروري لكي يكون للمعادلة ① حل هو

$$V_1 y_1 + V_2 y_2 = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$y'p = V_1 y_1' + V_2 y_2'$$

$$y''p = V_1 y_1'' + V_1' y_1' + V_2 y_2'' + V_2' y_2'$$

بالقوة من y و y' في المعادلة القابلة ① كتل على

$$(V_1 y_1'' + V_1' y_1' + V_2 y_2'' + V_2' y_2') + a_1 (V_1 y_1 + V_2 y_2) + a_2 (V_1 y_1 + V_2 y_2) = f(x)$$

$$V_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + V_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + (V_1' y_1 + V_2' y_2) = f(x)$$

$$0 + 0 + V_1' y_1 + V_2' y_2 = f(x) \quad \text{--- ②}$$

ثم نجد الأول حل المعادلتين ① و ② كتل على

$$V_1' = -\frac{y_2}{w} f(x), \quad V_2' = \frac{y_1}{w} f(x)$$

حيث ان $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ هو دترمونت

$$V_1 = \int -\frac{y_2}{w} f(x) dx, \quad V_2 = \int \frac{y_1}{w} f(x) dx$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2 + 4)y = \sec 2x$$

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2i$$

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$, $F(x) = \sec 2x$
 نختار الحد الأول y_1 ونختار الحد الثاني y_2

$$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$$

$$y_p = V_1 \cos 2x + V_2 \sin 2x$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$$V_1 = \int \frac{-y_2}{W} F(x) dx = \int \frac{-\sin 2x}{2} \sec 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} dx$$

$$V_1 = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x|$$

$$V_2 = \int \frac{y_1}{W} F(x) dx = \int \frac{\cos 2x}{2} \sec 2x dx = \frac{x}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$$(D^2 + 4D + 4)y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$(m+2)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -2$$

$$y_c = (C_1 + C_2 x) e^{-2x} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y_1 = e^{-2x}, y_2 = x e^{-2x}, f(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

نريد إيجاد y_p باستخدام

$$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & x e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2x e^{-2x} + e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$W = -2x e^{-4x} + e^{-4x} + 2x e^{-4x} = e^{-4x}$$

$$V_1 = \int \frac{-y_2}{W} f(x) dx = \int \frac{-x e^{-2x}}{e^{-4x}} \cdot \frac{e^{-2x}}{x^2} dx$$

$$= \int \frac{-1}{x} dx = -\ln x$$

$$V_2 = \int \frac{y_1}{W} f(x) dx = \int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}} \cdot \frac{e^{-2x}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$y_p = -\ln x e^{-2x} - e^{-2x}$$

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - \ln x e^{-2x} - e^{-2x}$$

١٤ طريقة المؤثر :- (المؤثر العكسي)

المهمة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية الغير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة من الرتبة n هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = f(x)$$

أو بدلالة المؤثر

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) y = 0$$

أو

$$F(D)y = f(x) \rightarrow 0$$

وعليه نحاول إيجاد y لهذه المعادلة هو

$$y = \frac{1}{F(D)} f(x)$$

الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة $f(x)$ هي

١ إذا كانت $f(x) = e^{bx}$ فإن الحل الخاص للمعادلة ١ هو

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{bx} = \frac{1}{F(b)} e^{bx} \quad \text{و} \quad F(b) \neq 0$$

* حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 5y' + 6y = e^x$$

$$(D^2 - 5D + 6)y = e^x$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-3) = 0$$

$$m_1 = 2, m_2 = 3$$

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y_p = \frac{1}{f(D)} f(x) = \frac{1}{f(b)} e^{bx} = \frac{1}{f(1)} e^x = \frac{1}{1^2 - 5 + 6} e^x$$

$$= \frac{1}{2} e^x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$$

طريقة أخرى: إذا كانت $f(b) = 0$, $f(x) = e^{bx}$ إذا كانت $f(b) = 0$, $f(x) = e^{bx}$

$$y_p = \frac{e^{bx} x^r}{g(b)r!}, \quad f(D) = g(D) (D-b)^r$$

$$y_p = \frac{e^{bx} \cdot x^m}{f^{(m)}(b)}$$

إذا كانت $f(b) = f'(b) = f''(b) = \dots = f^{(m-1)}(b) = 0$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية ب = 1

$$y''' + y'' - y' - y = e^x$$

$$(D^3 + D^2 - D - 1)y = e^x$$

$$m^3 + m^2 - m - 1 = 0$$

$$m(m^2 - 1) + (m^2 - 1) = 0$$

$$(m^2 - 1)(m + 1) = 0$$

$$(m-1)(m+1)(m+1) = 0$$

$$(m-1)(m+1)^2 = 0$$

$$m-1=0 \Rightarrow m_1 = 1$$

$$(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m_2 = m_3 = -1$$

$$y_c = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) e^{-x}$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} e^{bx} = \frac{1}{F(b)} e^{bx} = \frac{1}{F(1)} e^x = \frac{1}{0} e^x$$

$$F(D) = D^3 + D^2 - D - 1$$

$$F(D) = (D+1)^2 (D-1)$$

$$= g(D) (D-b)^r$$

$$, r=1, b=1$$

$$g(D) = (D+1)^2$$

$$g(b) = g(1) = (1+1)^2 = 4$$

$$y_p = \frac{e^x x^1}{4} = \frac{1}{4} x e^x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) e^{-x} + \frac{1}{4} x e^x$$

١٩ إذا كانت $F(x) = \cos bx$ و $F(x) = \sin bx$ نحسب الحاد الخاص بالطريقة التالية وذلك بكتابة

$$y_p = \frac{1}{F(D^2)} \sin bx = \frac{1}{F(-b^2)} \sin bx$$

$$F(-b^2) \neq 0$$

وذلك بالتعويض عن D^2 بـ $(-b^2)$ وعند كل (D^2) أو $(-b^2)$ وكذلك نفس الشرع في حالة $\cos bx$

٢٠ يمكن إيجاد الحاد الخاص في هذه الحالة بأن نضع

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$$

ثم نجد الحاد الخاص للدالة (e^{ibx}) كما في الحالة الأولى وبالتالي نجد الحاد الخاص للدالة $(\cos bx)$ باعتبارها الجزء الحقيقي للدالة المركبة (e^{ibx}) والحاد الخاص للدالة $(\sin bx)$ باعتبارها الجزء الخيالي للدالة المركبة (e^{ibx}) .

مثال ١ حل المعادلة التفاضلية التالية $y'' + 4y = 15 \cos 3x$ $b=3$

$$(D^2 + 4)y = 15 \cos 3x$$

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2i$$

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$y_p = \frac{1}{F(D^2)} 15 \cos 3x = \frac{1}{F(-b^2)} 15 \cos 3x$$

$$= \frac{1}{F(-3^2)} 15 \cos 3x$$

$$F(-3^2) = -3^2 + 4 = -9 + 4 = -5$$

$$y_p = -\frac{1}{5} \cdot 15 \cos 3x = -3 \cos 3x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - 3 \cos 3x$$

$$\therefore b = 3$$

طريقة (2) نبح:

$$y'' + 4y = 15 e^{3ix}, \quad b = 3i$$

$$y_p = \frac{1}{f(D)} 15 e^{3ix} = \frac{1}{f(3i)} \cdot 15 e^{3ix}$$

$$= \frac{1}{(3i)^2 + 4} \cdot 15 e^{3ix} = \frac{1}{9i^2 + 4} \cdot 15 e^{3ix}$$

$$= \frac{1}{-5} \cdot 15 e^{3ix} = -3 e^{3ix}$$

$$= -3(\cos 3x + i \sin 3x)$$

$$= -3 \cos 3x - 3i \sin 3x$$

~~غير صحيح~~

$$y_p = -3 \cos 3x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - 3 \cos 3x$$

حل خاص:

في حالة التعويض عن k في (D) بـ $(-b^2)$ ونحصل على المعادلة $0 = 0$ فإننا نستخدم صيغة أخرى:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' + 4y = 8 \cos 2x$$

$$(D^2 + 4)y = 8 \cos 2x, \quad m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i$$

$$y_p = \frac{1}{f(D)} \cdot 8 \cos 2x = \frac{1}{f(-b^2)} \cdot 8 \cos 2x$$

$$y_p = \frac{1}{f(-2^2)} \cdot 8 \cos 2x = \frac{1}{-2^2 + 4} \cdot 8 \cos 2x$$

$$= \frac{1}{0} \cdot 8 \cos 2x$$

$$y'' + 4y = 8e^{2ix}, \quad b = 2i$$

$$(D^2 + 4)y = 8e^{2ix}$$

$$y_p = \frac{1}{f(D)} \cdot 8e^{2ix} = \frac{1}{f(b)} \cdot 8e^{2ix}$$

$$= \frac{1}{(2i)^2 + 4} \cdot 8e^{2ix} = \frac{1}{0} \cdot 8e^{2ix}$$

$$y_p = \frac{e^{bx} \cdot x^r}{g(b) \cdot r!}$$

$$F(D) = D^2 + 4 = (D + 2i)(D - 2i)$$

$$= g(D) (D - b)^r$$

$$b = 2i, r = 1$$

$$g(D) = D + 2i$$

$$g(b) = b + 2i$$

$$g(2i) = 2i + 2i = 4i$$

$$y_p = \frac{8e^{2ix} \cdot x}{4i} = \frac{2x}{i} e^{2ix} * \frac{1}{i}$$

$$y_p = -2ix e^{2ix}$$

$$= -2ix (\cos 2x + i \sin 2x)$$

$$= -2ix \cos 2x + 2x \sin 2x$$

$$y_p = 2x \sin 2x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x \sin 2x$$

(٣) إذا كانت $f(x)$ متعددة الحدود x^m أي أن

$$f(D)y = x^m$$

حيث m عدد صحيح موجب

لتيجاد الحل الخاص نكتب $\frac{1}{f(D)}$ بشكل قوى دمجها

الحل D وتستخدم D^m

$$\frac{1}{1-D} = (1-D)^{-1} = 1 + D + D^2 + \dots + D^m$$

$$\frac{1}{1+D} = (1+D)^{-1} = 1 - D + D^2 - D^3 + \dots$$

$$\frac{1}{2-D} = \frac{1}{2(1-\frac{D}{2})} = \frac{1}{2} (1-\frac{D}{2})^{-1} = \frac{1}{2} (1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \dots)$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية $y'' + 4y = 8x^3$

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i$$

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$y_p = \frac{1}{f(D)} \cdot 8x^3 = \frac{1}{D^2 + 4} 8x^3$$

$$y_p = \frac{1}{4(1+\frac{D^2}{4})} \cdot 8x^3 = \frac{1}{4} (1+\frac{D^2}{4})^{-1} (8x^3)$$

$$y_p = (1 - \frac{D^2}{4} + \frac{D^4}{16} - \dots) (2x^3)$$

$$= 2x^3 - \frac{12x}{4} + 0$$

$$y_p = 2x^3 - 3x$$

$$y = y_c + y_p = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x^3 - 3x$$

(٤) إذا كانت $F(x) = e^{bx} v(x)$ حيث $v(x)$ هي إحدى الدوال $\cos bx$ أو $\sin bx$ فإننا نكتب $y_p = \frac{1}{F(D)} e^{bx} v(x)$

$$= \frac{e^{bx}}{F(D+b)} v(x)$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2 + 2D + 5)y = x e^x$$

$$m^2 + 2m + 5 = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$= -1 \pm i$$

$$y_c = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

$$\therefore b = 1$$

$$y_p = \frac{e^x}{F(D+b)} x = \frac{e^x}{F(D+1)} x = e^x \cdot \frac{1}{(D+1)^2 + 2(D+1) + 5} \cdot x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D^2 + 2D + 1 + 2D + 2 + 5} \cdot x = e^x \cdot \frac{1}{D^2 + 4D + 8} \cdot x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{8(1 + \frac{D^2}{8} + \frac{D}{2})} \cdot x = \frac{1}{8} e^x \left[1 + \left(\frac{D^2}{8} + \frac{D}{2} \right) \right]^{-1} \cdot x$$

$$= \frac{1}{8} e^x \left[1 - \left(\frac{D^2}{8} + \frac{D}{2} \right) + \left(\frac{D^2}{8} + \frac{D}{2} \right)^2 \right] x$$

$$= \frac{1}{8} e^x \left[x - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{8} x e^x - \frac{1}{16} e^x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{8} x e^x - \frac{1}{16} e^x$$

١٥ إذا كانت $F(x) = x^m V(x)$ حيث $V(x)$ دالة

أحد الدوال $\sin ax$, $\cos ax$

للمعادلة الخطية

$$y_p = \frac{1}{F(D)} x^m \cdot V(x)$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} x^m \sin ax$$

$$= \frac{1}{F(D)} x^m e^{iax}$$

$$= \frac{e^{iax}}{F(D+ai)} x^m$$

وبعد ما نحسب الجزء الخيالي

أحافظ حالة $\cos ax$ فنحسب الجزء الحقيقي

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y'' + y = 4x \sin x$$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m = \pm i$$

$$y_c = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} 4x \sin x$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} \cdot 4x e^{ix} = e^{ix} \cdot \frac{1}{F(D+ai)} \cdot 4x$$

$$= e^{ix} \cdot \frac{1}{F(D+i)} \cdot 4x = e^{ix} \cdot \frac{1}{(D+i)^2 + 1} \cdot 4x$$

$$= e^{ix} \cdot \frac{1}{D^2 + 2iD - 1 + 1} \cdot 4x = e^{ix} \cdot \frac{1}{D^2 + 2iD} \cdot 4x$$

$$= e^{ix} \cdot \frac{1}{2iD(1+D)} \cdot 4x = \frac{e^{ix}}{2iD} \left(1 + \frac{D}{2i}\right)^{-1} \cdot 4x$$

$$= \frac{e^{ix}}{2iD} \left(1 - \frac{D}{2i} + \left(\frac{D}{2i}\right)^2 - \dots\right) 4x$$

$$= \frac{e^{ix}}{2iD} \left(4x - \frac{2}{i}\right) = -\frac{i e^{ix}}{2D} \left(4x - \frac{2}{i}\right)$$

$$= -\frac{i}{2} e^{ix} \frac{1}{D} \left(4x - \frac{2}{i}\right)$$

$D = \frac{d}{dx}$
 $\frac{1}{D} = \int dx$

$$= -\frac{i}{2} e^{ix} (2ix^2 - 2x) = e^{ix} (-ix^2 + x)$$

$$= e^{ix} (x - ix^2)$$

$$= (\cos x + i \sin x)(x - ix^2)$$

$$= x \cos x - ix^2 \cos x + ix \sin x + x^2 \sin x$$

$$= x \cos x + x^2 \sin x + ix \sin x - ix^2 \cos x$$

$$= X \cos X + X^2 \sin X + i(-X^2 \cos X + X \sin X)$$

$$y_p = X \sin X - X^2 \cos X$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 \cos X + c_2 \sin X + X \sin X - X^2 \cos X$$

* معادلة أولية
المسألة العامة لمعادلة أولية

$$X^n \frac{d^n y}{dX^n} + a_1 X^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dX^{n-1}} + \dots + a_{n-1} X \frac{dy}{dX} + a_n y = F(X)$$

حيث $a_1, a_2, \dots, a_n$ ثوابت
للتبسيط العام لهذه المعادلة نضع $X = e^t$ وبذلك نحول
المعادلة من المتغير X إلى المتغير t حيث يتم القود بالدرجة التالية

$$X = e^t \Rightarrow t = \log X$$

$$\frac{db}{dX} = \frac{1}{X}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dX} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$X \frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dt} = D_1 y, \quad D_1 = \frac{d}{dt}, \quad D_1^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\therefore X \frac{dy}{dX} = D_1 y \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dt} \frac{dt}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt}$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D_1^2 - D_1)y = D_1(D_1 - 1)y$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D_1(D_1 - 1)y \quad \text{--- ②}$$

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2)y \quad \text{--- ③}$$

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2) \dots (D_1 - n + 1)y$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' + x y' - y = 0$$

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' + x y' - y = 0$$

$$\text{let } x = e^t \Rightarrow t = \log x$$

$$x^3 y''' = D_1(D_1-1)(D_1-2)y$$

$$x^2 y'' = D_1(D_1-1)y$$

$$x y' = D_1 y$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$D_1(D_1-1)(D_1-2)y + 2D_1(D_1-1)y + D_1 y - y = 0$$

$$D_1(D_1-1)(D_1-2)y + 2D_1(D_1-1)y + (D_1-1)y = 0$$

$$(D_1-1)[D_1(D_1-2) + 2D_1 + 1]y = 0$$

$$(D_1-1)[D_1^2 + D_1 + 2D_1 + 1]y = 0$$

$$(D_1-1)(D_1^2 + 1)y = 0$$

$$(m-1)(m^2+1) = 0$$

$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

$$m^2+1=0 \Rightarrow m=\pm i$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 e^t$$

$$y = c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x) + c_3 x$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$x^2 y'' - xy' + y = 12x \log x$$

$$\text{let } x = e^t, \quad t = \log x$$

$$D_1(D_1-1)y - D_1y + y = 12te^t$$

$$D_1(D_1-1)y - (D_1-1)y = 12te^t$$

$$(D_1-1)(D_1-1)y = 0$$

$$(m-1)(m-1) = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 1$$

$$y_c = (C_1 + C_2 t) e^t$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} \cdot 12te^t = 12e^t \frac{1}{F(D_1+b)} t$$

$$= 12e^t \frac{1}{F(D_1+1)} t$$

$$(D_1-1)^2 = D_1^2 - 2D_1 + 1$$

$$y_p = 12e^t \frac{1}{(D_1+1)^2 - 2(D_1+1) + 1} = 12e^t \frac{1}{D_1^2 + 2D_1 + 1 - 2D_1 - 2 + 1} t$$

$$= 12e^t \frac{1}{D_1^2} t$$

$$= 12e^t \cdot \frac{t^3}{6} = 2t^3 e^t$$

$$y = y_c + y_p = (C_1 + C_2 t) e^t + 2t^3 e^t$$

$$y = [c_1 + c_2 (\log x)] X + 2 (\log x)^3 X$$

تخفيض الرتبة : ^{نظر (٢٥٥)}

تعتبر هذه الطريقة مبررة للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة

فإذا كانت في المعادلة التفاضلية المتجانسة حل خاص معلوم فإننا من الممكن الحصول على معادلة جديدة بترتيب أقل من سابقتها وتشمل الحلول المتبقية للمعادلة التفاضلية

كذلك تعتبر هذه الطريقة مبررة أيضاً للمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية إذا كانت المعاملات المتغيرة معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وبالنسبة إليها يمكن حلها

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

حيث $u = u_1(x)$ هو حل خاص للمعادلة المتجانسة التالية

$$u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = 0 \quad (2)$$

نضع $y = uv$ حيث $u = u_1(x)$ هو الحل للمعادلة (1) هو بالصورة

$$y = uv$$

$$y' = uv' + vu'$$

$$y'' = uv'' + v'u' + vu'' + u'v'$$

$$y'' = uv'' + vu'' + 2u'v'$$

وبالتعويض عن y ومشتقاتها بالمعادلة (1) نحصل على

$$uv'' + 2u'v' + vu'' + a_1(uv' + vu') + a_2uv = f(x)$$

$$uv'' + 2u'v' + vu'' + a_1uv' + a_1vu' + a_2uv = f(x)$$

$$uv'' + 2u'v' + a_1uv' + v(u'' + a_1u' + a_2u) = f(x)$$

$$0 =$$

باستخدام المعادلة ③ نحصل على

$$4v'' + 24v' + 96v = f(x) \quad \text{--- ③}$$

$$\text{let } v' = P, \quad v'' = P'$$

بالقوى في المعادلة ③ ينتج

$$4P' + 24P + 96P = f(x) \quad \text{--- ④}$$

$$4P' + (24 + 96P) = f(x) \quad \text{--- ⑤}$$

المعادلة ⑤ هي معادلة خطية من الدرجة الأولى في P والتي يمكن حلها بالطرق السابقة.

مثال: إذا كان $y_1 = x$ حلًا للمعادلة المتجانسة للمعادلة التفاضلية

$$xy'' + xy' - y = x^2 e^x$$

جد الحل لهذه المعادلة.

$$\text{let } y = vy_1 = vx$$

$$y' = v + xv'$$

$$y'' = v' + xv'' + v'$$

$$= 2v' + xv''$$

بالقوى في قيم y ومن ثم نحصل على المعادلة التفاضلية خطية على

$$x(2v' + xv'') + x(v + xv') - vx = x^2 e^x \quad \text{--- 7. x}$$

$$2v' + xv'' + x + xv' - x = x^2 e^x$$

$$2v' + xv'' + xv' = x^2 e^x$$

$$xv'' + (2 + x)v' = x^2 e^x$$

$$v'' + \left(1 + \frac{2}{x}\right)v' = x e^x$$

let $V' = P$, $V'' = P'$

$$P' + (1 + \frac{2}{x})P = e^{-x}$$

$$M(x) = \int e^{(1 + \frac{2}{x})} dx = e^{x+2\ln x} = e^{x+\ln x^2} = e^x \cdot e^{\ln x^2} = x^2 e^x$$

$$(x^2 e^x)P = \int e^{-x} \cdot x^2 e^x dx$$

$$x^2 e^x P = \frac{x^3}{3} + c$$

$$P = \frac{1}{3} x e^{-x} + c x^{-2} e^{-x}$$

$$\int V' = \int (\frac{1}{3} x e^{-x} + c x^{-2} e^{-x})$$

$$V = \frac{1}{3} \int x e^{-x} dx + \int c x^{-2} e^{-x} dx$$

let $u = e^{-x}$ $du = -e^{-x} dx$
 $du = -e^{-x}$ $v = x^{-1}$

$$\int x^{-2} e^{-x} dx = -x^{-1} e^{-x} - \int x^{-1} e^{-x} dx$$

let $u = x^{-1}$ $du = -x^{-2} dx$
 $du = -x^{-2}$ $v = -e^{-x}$

$$\int x^{-2} e^{-x} dx = -x^{-1} e^{-x} - (\int x^{-1} e^{-x} dx + \int x^{-2} e^{-x} dx)$$

هنا نلاحظ اننا نحتاج الى حل انتفاضي باستخدام طريقة التجزئة
 ان حل انتفاضي هو

$$y = c_1 y_1 + y_2 V$$

$$y = c_1 x + x (\frac{1}{3} \int x e^{-x} dx + c \int x^{-2} e^{-x} dx)$$

الفصل الخامس تحويلات لابلاس

تعريف: تُعرف تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ و $x > 0$ والفردية
بجذر $\bar{f}(p)$ بالرمز $\bar{f}(p)$ أو $\{f(x)\}$ بالنكاح

$$\bar{f}(p) = L\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx, p \in \mathbb{R}$$

بشرط أن يكون هذا التكامل موجوداً
حين خواص تحويل لابلاس هي الخاصية الخطية أي
أنه يحقق ما يلي:

$$\begin{aligned} L\{Af(x) + Bg(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-px} [Af(x) + Bg(x)] dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-px} Af(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-px} Bg(x) dx \\ &= A \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx + B \int_0^{\infty} e^{-px} g(x) dx \\ &= A L\{f(x)\} + B L\{g(x)\} \end{aligned}$$

$$\therefore L\{Af(x) + Bg(x)\} = AL\{f(x)\} + BL\{g(x)\}$$

أو k ثابت $B=0$ إذا كانت

$$L\{kf(x)\} = k L\{f(x)\}$$

تحويل لابلاس لبعض الدوال

١) إذا كانت $f(x) = 1$ و $x \geq 0$ فإن

$$L\{f(x)\} = L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \frac{-1}{p} e^{-px} \Big|_0^{\infty} \\ = \frac{1}{p}, \quad p > 0$$

$$L\{1\} = \frac{1}{p}, \quad p > 0$$

وبصورة عامة إذا كانت K ثابت فإن

$$L\{K\} = K \cdot L\{1\} = \frac{K}{p}$$

٢) إذا كانت $f(x) = e^{ax}$ و $x \geq 0$ فإن

$$L\{e^{ax}\} = \int_0^{\infty} e^{-px} e^{ax} dx \\ = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)x} dx = \frac{-1}{p-a} e^{-(p-a)x} \Big|_0^{\infty} \\ = \frac{1}{p-a}, \quad p > a$$

$$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a}, \quad p > a$$

٣) إذا كانت $f(x) = \sin ax$ و $x \geq 0$ فإن

$$L\{\sin ax\} = \int_0^{\infty} e^{-px} \sin ax \\ = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad p > 0$$

(5) اگر $F(x) = \cos ax$ ہے، تو

$$L\{\cos ax\} = \int_0^{\infty} e^{-px} \cos ax \, dx$$

$$= \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad p > 0$$

(6) اگر $F(x) = x^n$ ہے، تو $n = 1, 2, 3, \dots$

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0$$

(7) اگر $F(x) = \sinh ax$ ہے، تو

$$L\{\sinh ax\} = L\left\{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{ax}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-ax}\}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{p-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+a} = \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad p > a$$

$$\therefore L\{\sinh ax\} = \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad p > a$$

(8) اگر $F(x) = \cosh ax$ ہے، تو

$$L\{\cosh ax\} = \frac{p}{p^2 - a^2}, \quad p > a$$

عندئذ

إذا كان $\bar{F}(P) = L\{f(x)\}$ وكان a عددًا حقيقيًا

$$L\{e^{-ax} f(x)\} = \bar{F}(P+a)$$

$$L\{e^{-ax} f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-Px} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-Px} \cdot e^{-ax} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(P+a)x} f(x) dx$$

$$= \bar{F}(P+a)$$

$$\therefore L\{e^{-ax} f(x)\} = \bar{F}(P+a)$$

$$\bar{F}(P) = L\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-Px} f(x) dx$$

والآن يمكن إثبات بعض تحويلات لابلاس الأخرى.

١ إذا كان $f(x) = x^n e^{-ax}$ حيث n عدد صحيح موجب و $P > -a$ ،

$$L\{x^n e^{-ax}\} = \frac{n!}{(P+a)^{n+1}}$$

وهذا يساعد على إثبات

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{P^{n+1}}$$

وبالاستناد على المبرهنات السابقة

٢ إذا كان $f(x) = e^{-ax} \sin bx$ حيث $a > 0$ و $P > -a$

$$L\{e^{-ax} \sin bx\} = \frac{b}{(P+a)^2 + b^2}$$

وذلك بمساعدة الجداول
والإعتناء ويمكن المبرهنات السابقة

$$L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2 + a^2}$$

١) إذا كانت $e^{-ax} \cos bx$ حيث $a > -b$

$$L\{e^{-ax} \cos bx\} = \frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$$

وذلك بنفس طريقة الجداول

$$L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

والإعتناء ويمكن المبرهنات السابقة

حيث تكون الجداول للبرهان التالي

١) $L\{\sinh 3x\} = \frac{a}{p^2 - a^2} = \frac{3}{p^2 - 9}$

٢) $L\{x^2 + 5x - 4\} = L\{x^2\} + 5L\{x\} - 4L\{1\}$

$$= \frac{2!}{p^3} + 5 \cdot \frac{1!}{p^2} - 4 \cdot \frac{1}{p}$$

٣) $L\{(x^2 - 5x + 6)e^{2x}\} = L\{x^2 e^{2x} - 5x e^{2x} + 6e^{2x}\}$

$$= L\{x^2 e^{2x}\} - 5L\{x e^{2x}\} + 6L\{e^{2x}\}$$

$$= \frac{2!}{(p-2)^3} - 5 \cdot \frac{1!}{(p-2)^2} + 6 \cdot \frac{1}{p-2}$$

٤) $L\{x \cos 2x\} = L\{x e^{2ix}\} = \frac{1!}{(p+2i)^2}$

$$= \frac{p^2 + 4p - 4}{(p^2 + 4)^2} = \frac{(p^2 - 4) + 4ip}{(p^2 + 4)^2} = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2} + i \frac{4p}{(p^2 + 4)^2}$$

$$\therefore L\{x \cos 2x\} = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2}$$

افضلنا ان نذكر الحيل التي نستخدمها في الدرس

$$5) L\{\cos(ax+b)\}$$

$$= L\{\cos ax \cos b - \sin ax \sin b\}$$

$$= L\{\cos ax \cos b\} - L\{\sin ax \sin b\}$$

$$= \cos b L\{\cos ax\} - \sin b L\{\sin ax\}$$

$$= \cos b \cdot \frac{p}{p^2 + a^2} - \sin b \cdot \frac{a}{p^2 + a^2}$$

$$6) L\{\sin^2 ax\} = L\left\{\frac{1 - \cos 2ax}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} L\{1\} - \frac{1}{2} L\{\cos 2ax\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2 + 4a^2}$$

$$7) L\left\{e^{ax} + 2e^{\left(-\frac{1}{2}\right)ax} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} ax\right\}$$

$$8) L\left\{\frac{1 - \cos ax}{a^2}\right\} = \frac{1}{a^2} L\{1\} - \frac{1}{a^2} L\{\cos ax\}$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{p}{p^2 + a^2}$$

$$= \frac{p^2 + a^2 - p^2}{a^2 p (p^2 + a^2)} = \frac{a^2}{a^2 p (p^2 + a^2)} = \frac{1}{p (p^2 + a^2)}$$

$$7) L\left\{e^{ax} + 2e^{\left(-\frac{1}{2}\right)ax} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} ax\right\}$$

$$= L\{e^{ax}\} + 2L\left\{e^{\left(-\frac{1}{2}\right)ax} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} ax\right\}$$

$$= \frac{1}{p-a} + 2 \cdot \frac{p + \frac{1}{2}a}{(p + \frac{1}{2}a)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}$$

$$= \frac{1}{p-a} + \frac{2p+a}{p^2+ap+\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2}$$

$$= \frac{1}{p-a} + \frac{2p+a}{p^2+ap+a^2} = \frac{p^2+ap+a^2 + (p-a)(2p+a)}{(p-a)(p^2+ap+a^2)}$$

$$= \frac{p^2+ap+a^2+2p^2-2ap+ap-a^2}{p^3-a^3} = \frac{3p^2}{p^3-a^3}$$

مكوسين تحويل لابلاس

تعريف $f(x)$ دالة مكوسين تحويل لابلاس $f(x)$

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

فقال انه $f(x)$ مكوسين تحويل لابلاس الدالة
ويكتب

$$L^{-1}\{\bar{f}(p)\} = f(x)$$

حيث ان L^{-1} هو مؤثر المعكوس لتحويل لابلاس اي ان
يرجع تحويل لابلاس الى الدالة الاصلية مثله

مثال

$$L^{-1}\{\bar{f}(p)\} = f(x)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = x$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1$$

$$L\{1\} = \frac{1}{p}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^3}\right\} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{p^2}$$

$$= \frac{1}{2} x^2$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{ax}$$

$$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{a^2+p^2}\right\} = \sin ax, \quad L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

خطا زده المودت

اذا كانت $L^{-1}\{F_n(P)\} = f_n(x)$ و

$$L^{-1}\{\bar{F}_1(P)\} = f_1(x), \quad L^{-1}\{\bar{F}_2(P)\} = f_2(x)$$

وكانت $a_1, a_2, \dots, a_n$ ثوابت حرة

$$L^{-1}\{a_1 \bar{F}_1(P) + a_2 \bar{F}_2(P) + \dots + a_n \bar{F}_n(P)\} = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

$$L^{-1}\{\bar{F}(P)\} = f(x)$$

اذا كانت f

$$L^{-1}\{\bar{F}(P+a)\} = e^{-ax} f(x)$$

حيث

$$L^{-1}\left\{\frac{2P+3}{P^2+4}\right\}$$

مثال: جد تحويل لابلاس العكس

$$= L^{-1}\left\{\frac{2P}{P^2+4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3}{P^2+4}\right\}$$

$$\therefore L\{\cos ax\} = \frac{P}{P^2+4}, \quad L\{\sin ax\} = \frac{a}{P^2+4}$$

$$= 2L^{-1}\left\{\frac{P}{P^2+2^2}\right\} + 3L^{-1}\left\{\frac{1}{P^2+2^2}\right\} \quad \times \frac{2}{2}$$

$$= 2 \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{P^2+4P+13}\right\}$$

مثال

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{P^2+4P+4-4+13}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(P+2)^2+9}\right\}$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(P+2)^2 + 3^2} \right\} = \frac{1}{3} L^{-1} \left\{ \frac{3}{(P+2)^2 + 3^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x.$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(P+a)(P+b)} \right\}$$

جاء : 1/2a

$$\frac{1}{(P+a)(P+b)} = \frac{A}{P+a} + \frac{B}{P+b}$$

$$1 = A(P+b) + B(P+a)$$

$$1 = AP + Ab + BP + Ba$$

$$1 = (A+B)P + (Ab + Ba)$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B \quad \text{--- ①}$$

$$Ab + Ba = 1 \quad \text{--- ②}$$

بالقوة ② ب ①

$$-Bb + Ba = 1$$

$$B(a-b) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{a-b}$$

$$A = -B = \frac{1}{b-a}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(P+a)(P+b)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{b-a} \frac{1}{P+a} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1}{a-b} \frac{1}{P+b} \right\}$$

$$= \frac{1}{b-a} L^{-1} \left\{ \frac{1}{P+a} \right\} + \frac{1}{a-b} L^{-1} \left\{ \frac{1}{P+b} \right\}$$

$$= \frac{1}{b-a} e^{-ax} + \frac{1}{a-b} e^{-bx}$$

$$= \frac{1}{b-a} [e^{-ax} - e^{-bx}]$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P+2}{P^2+9} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P}{P^2+9} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{P^2+9} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{P}{P^2+3^2} \right\} + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{P^2+3^2} \right\}$$

$$= \cos 3X + \frac{2}{3} \sin 3X$$

مثال: جا کو مستطی (b) سے

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3P-5}{4P^2-4P+3} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3P-5}{4P^2-4P+1-1+3} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3P-5}{4(P^2-P+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3P-5}{4((P-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})} \right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3P-5}{4((P-\frac{1}{2})^2+9)} \right\} = \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3P-5}{(P-\frac{1}{2})^2+3^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3P-5-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{(P-\frac{1}{2})^2+3^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3(P-\frac{1}{2})-5+\frac{3}{2}}{(P-\frac{1}{2})^2+3^2} \right\}$$

$$L\{y\} = \bar{y}(P)$$

القانون الأول

$$L\{y\} = P\bar{y}(P) - y(0)$$

القانون الثاني

$$L\{y''\} = P^2\bar{y}(P) - P y'(0) - y(0)$$

القانون الثالث

$$L\{y'''\} = P^3\bar{y}(P) - P^2 y''(0) - P y'(0) - y(0)$$

القانون الرابع

$$L\{y^{(4)}\} = P^4\bar{y}(P) - P^3 y'''(0) - P^2 y''(0) - P y'(0) - y(0)$$

القانون الخامس

$$L\{y^{(n)}\} = P^n\bar{y}(P) - P^{n-1} y^{(n-1)}(0) - P^{n-2} y^{(n-2)}(0) - \dots - y(0)$$

القانون السادس

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

حل المعادلة

مع العلم ان $y = 1$ عند $x = 0$ اي $y(0) = 1$

$$y' + 2y = \cos x$$

$$L\{y' + 2y\} = L\{\cos x\}$$

$$L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{\cos x\}$$

$$P\bar{y}(P) - y(0) + 2\bar{y}(P) = \frac{P}{P^2+1}$$

$$P\bar{y}(P) - 1 + 2\bar{y}(P) = \frac{P}{P^2+1}$$

$$\bar{y}(P) [P+2] = 1 + \frac{P}{P^2+1}$$

$$\bar{y}(P) = \frac{1}{P+2} + \frac{P}{(P+2)(P^2+1)}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(P)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{P+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{P}{(P+2)(P^2+1)}\right\}$$

$$\frac{P}{(P+2)(P^2+1)} = \frac{A}{P+2} + \frac{BP+D}{P^2+1}$$

$$P = A(P^2+1) + (BP+D)(P+2)$$

$$P = AP^2 + A + BP^2 + 2BP + DP + 2D$$

$$P = (A+B)P^2 + (2B+D)P + (A+2D)$$

$$A+B=0 \quad \text{--- (1)}$$

$$2B+D=1 \quad \text{--- (2)}$$

$$A+2D=0 \quad \text{--- (3)}$$

$$B-2D=0 \quad \text{--- (1) } \times 2 \Rightarrow 2B-4D=0$$

$$2B+D=1 \quad \times 2 \Rightarrow 4B+2D=2$$

$$5B=2 \Rightarrow B=\frac{2}{5}$$

$$A=-\frac{2}{5}$$

the Lap's (w) is $\frac{1}{s} \ln s$

$$A = -\frac{2}{5}, \quad B = \frac{2}{5}, \quad D = \frac{1}{5}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(P)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{P+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{P}{(P+2)(P^2+1)}\right\}$$

$$\frac{P}{(P+2)(P^2+1)} = \frac{A}{P+2} + \frac{BP+D}{P^2+1}$$

$$= \frac{-\frac{2}{5}}{P+2} + \frac{\frac{2}{5}P + \frac{1}{5}}{P^2+1}$$

$$L\{y(p)\} = L\left\{\frac{1}{p+2}\right\} + L\left\{-\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{1}{5} \frac{2p+1}{p^2+1}\right\}$$

$$L\{y(p)\} = L\left\{\frac{1}{p+2}\right\} - \frac{2}{5} L\left\{\frac{1}{p+2}\right\} + \frac{1}{5} L\left\{\frac{2p+1}{p^2+1}\right\}$$

$$L\{y(p)\} = L\left\{\frac{1}{p+2}\right\} - \frac{2}{5} L\left\{\frac{1}{p+2}\right\} + \frac{2}{5} L\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{5} L\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\}$$

$$y = e^{-2x} - \frac{2}{5} e^{-2x} + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$$

$$y = \frac{3}{5} e^{-2x} + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$$

$$y'' - 2y' + y = 6x e^x \quad \text{حل المسألة باستخدام تحويل لابلاس}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad \text{الشروط الحدية}$$

$$L\{y'' - 2y' + y\} = L\{6x e^x\}$$

$$L\{y''\} - 2L\{y'\} + L\{y\} = 6L\{x e^x\}$$

$$p^2 \bar{y}(p) - p y(0) - y'(0) - 2[p \bar{y}(p) - y(0)] + \bar{y}(p) = \frac{6}{(p-1)^2}$$

$$p^2 \bar{y}(p) - p - 0 - 2p \bar{y}(p) + 2 + \bar{y}(p) = \frac{6}{(p-1)^2}$$

$$\bar{y}(p) [p^2 - 2p + 1] - p + 2 = \frac{6}{(p-1)^2}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{p-2}{(p-1)^2} + \frac{6}{(p-1)^4}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p-2}{(p-1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{6}{(p-1)^4}\right\}$$

$$L^{-1}\{f(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p-1-1}{(p-1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{6}{(p-1)^4}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3!}{(p-1)^4}\right\}$$

$$y = e^x - x e^x + x^3 e^x$$

$$y = e^x(1 - x + x^3)$$

التمثيل الساتر

حل المعادلات التفاضلية باستخدام الساتر

الحل بمسلسلة قوى لـ x

يمكن حل المعادلات التفاضلية باستخدام الساتر مع المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة بطريقة عامة وذلك جافته
الحل هو سلسلة قوى لـ x لم نقول عن y ومشتقاتها معادلات
المعروفة ونجد معاملات قوى لـ x ويفترض ان تكون المسلسلة
متقاربة ومخانة الرشحات

جد الحل المسلسلة المعادلات التفاضلية التالية :-

$$y' = y$$

نفرض ان حل المعادلات التفاضلية هي سلسلة قوى لـ x التالية

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

ولايجاد c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 نجد

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3$$

ثم بالتقوية في المعادلة الأصلية

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

وبما وجد معاملات قوى لـ x المتساوية في الطرفين

$$(c_1 - c_0) + (2c_2 - c_1)x + (3c_3 - c_2)x^2 + (4c_4 - c_3)x^3 + \dots = 0$$

$$c_1 - c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = c_0$$

$$2c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} c_1 = \frac{1}{2!} c_0$$

$$3c_3 - c_2 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3} c_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2!} c_0 = \frac{1}{3!} c_0$$

$$4c_4 - c_3 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{1}{4} c_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!} c_0 = \frac{1}{4!} c_0$$

بالقوة في الكمال المعلوم

$$y = c_0 + c_0 x + \frac{1}{2!} c_0 x^2 + \frac{1}{3!} c_0 x^3 + \frac{1}{4!} c_0 x^4 + \dots$$

$$y = c_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)$$

$$y = c_0 e^x$$

طريقة أخرى للحل

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln y = x + c$$

$$y = e^{x+c}$$

$$y = e^x \cdot e^c, \quad A = e^c$$

$$y = A e^x$$

قوانين صيغة كسرية الدوال في شكل متسلسلة

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

جدا كل المتكاملات المعادلة التفاضلية

$$y' + 3x^2 y = 1$$

$$\text{let } y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots + 3x^2 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots) = 1$$

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots + 3c_0 x^2 + 3c_1 x^3 + 3c_2 x^4 + 3c_3 x^5 + \dots = 1$$

$$c_1 + 2c_2 x + (3c_3 + 3c_0)x^2 + (4c_4 + 3c_1)x^3 + \dots = 1$$

$$c_1 = 1$$

$$2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$3c_3 + 3c_0 = 0 \Rightarrow c_3 = -c_0$$

$$4c_4 + 3c_1 = 0 \Rightarrow c_4 = -\frac{3}{4}c_1 = -\frac{3}{4}$$

بالتعويض في المعادلة

$$y = c_0 + x + 0 - c_0 x^3 - \frac{3}{4} x^4 + \dots$$

$$y = c_0 + x - c_0 x^3 - \frac{3}{4} x^4 + \dots$$

$$y = c_0 [1 - x^3 + \dots] + [x - \frac{3}{4} x^4 + \dots]$$

النظام المتفرقة والاعتبار المعادلة التفاضلية
 ان المعادلة العادية التفاضلية من الرتبة الثانية ذات
 المعاملات المتغيرة هي :

$$P(X) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(X) \frac{dy}{dx} + R(X) y = 0 \quad (1)$$

حيث ان $P(X)$ و $Q(X)$ و $R(X)$ و a له بتغير X
 كما يمكن كتابتها المعادلة (1) بالصورة :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Q}{P} \frac{dy}{dx} + \frac{R}{P} y = 0 \quad (2)$$

(1) نحال ان المعادلة التفاضلية (2) نقطة اعتيادية عند النقطة
 $X=a$ اذا امكن كتابتها كالتالي $\frac{Q}{P}$ ، $\frac{R}{P}$ بشكل
 متسلسلة تايلور حول النقطة $X=a$
 بمعنى اننا اذا كتبنا التاليتين بالصورتين :

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{P} &= c_0 + c_1(X-a) + c_2(X-a)^2 + \dots \\ \frac{R}{P} &= b_0 + b_1(X-a) + b_2(X-a)^2 + \dots \end{aligned} \right\} X=a$$

واذا كانت $a=0$ فقد ذلك يكون

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{P} &= c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + \dots \\ \frac{R}{P} &= b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots \end{aligned} \right\} X=0$$

حالة خاصة :

* اذا كانت المعادلة التفاضلية نقطة اعتيادية عند $X=a$ فيمكن
 التعبير عن الحل بهلال في متسلسلة تايلور حول النقطة a اي
 $y = c_0 + c_1(X-a) + c_2(X-a)^2 + \dots$ $X=a$

* إذا كانت $X=a=0$ فبذلك يكون الحل عبارة عن متسلسلة حلقية

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

② يقال إن للمعادلة التفاضلية ① نقطة مفردة عند $X=a$ إذا لم تنقسم عند كتابتها $\frac{Q}{P}$ بشكل متسلسلة حلقية حول النقطة $X=a$

③ تسمى النقطة $X=a$ نقطة مفردة نظام (متنظم) إذا كانت من الممكن كتابتها كل من $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ بالشكل التالي

$$\frac{Q}{P} = \frac{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots}{x-a}$$

$$\frac{R}{P} = \frac{b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots}{(x-a)^2}$$

وإذا كانت $X=a=0$ فبذلك تكون الدالتان $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ بالشكل التالي

$$\frac{Q}{P} = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots}{x}$$

$$\frac{R}{P} = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots}{x^2}$$

فمثلاً يمكن كتابة المعادلة التفاضلية التالية

$$2x^2 y'' + 3xy' + (2x-1)y = 0$$

بالشكل

$$y'' + \frac{3x}{2x^2} y' + \frac{2x-1}{2x^2} y = 0$$

$$y'' + \frac{\frac{3}{2}}{x} y' + \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2} y = 0$$

وعند هذا فإن $X = 0$ هي نقطة مفردة نظام المعادلات
التفاضلية أو يمكن القول إن المعادلة التفاضلية نقطة اعتيادية
كل $X \neq 0$ حيث $X = 0$ هي نقطة مفردة نظام
وكذلك المعادلات

$$Xy'' + y' + Xy = 0$$

التي يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$y'' + \frac{1}{X} y' + \frac{X^2}{X^2} y = 0$$

هذه المعادلة لها نقطة اعتيادية $\forall X \neq 0$ أو $X = 0$ هي نقطة
مفردة نظام.

حلاً لها :

إذا كانت المعادلة التفاضلية نقطة مفردة نظام عند $X = a$ فنقول
أنه يوجد حل واحد a على الأقل المعادلة التفاضلية بصورة
المسلسلة التالية :

$$y = (X - a)^m [c_0 + c_1(X - a) + c_2(X - a)^2 + \dots]$$

وفي حالة $X = a = 0$ فإن الحل المسلسل المعادلة (1) هو

$$y = X^m [c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots]$$

حيث يمكن إيجاد m و c_i بطريقة فروبيوس.

ومما تقدم يمكن اعتبار المبرهنه التاليه:

(أ) اذا كان المعادله التفاضليه (1) تقدم في اعتبار عند $x=a$ فيمكن التعبير عن الحل المتسلسل بالشكل التالي:

$$y = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

وفي حالة $x=0$ فإن الحل المعادله (1) هو متسلسل القوى التالي

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

(ب) اذا كان المعادله التفاضليه (1) تقدم منفردة في $x=a$ عند $x=a$ فنقول انه يوجد حل (أ) فقط على الاقل المعادله التفاضليه بصورة المتسلسل التالي:

$$y = (x-a)^m [c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots]$$

وفي حالة $x=0$ فإن الحل المتسلسل المعادله (1) هو:

$$y = x^m [c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots]$$

$$y'' + y = 0$$

$$y'' + y' - xy = 0$$

$$y' = x + y$$

طريقة خروبينوس:

لواننا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n نرى

$$P(X)y'' + Q(X)y' + R(X)y = 0$$

هنا $P(X)$ و $Q(X)$ و $R(X)$ هي متعددات حدود في X

للايجاد حل هذه المعادلة بمسألة قوى حول $X=0$ نفرض

أولاً نفرض أن الحل بالصورة التالية

$$y = X^m (C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + C_3 X^3 + \dots + C_k X^k)$$

هنا $C_0 \neq 0$ نحاول أولاً أن نجد m ونرى حيث يمكن تخفيف المعادلة التفاضليةالتي حين m يمكن أن تكون أعداد صحيحة موجبة وسالبة

أو أعداد كسرية موجبة وسالبة فإذا وجدنا قيمتين مختلفتين

لـ m سوف نصل إلى حل عام للمعادلة التفاضلية ولكن إذاوجدنا قيمتين واحدة لـ m سوف نصل إلى حل خاص فقطولاً حلجان m ونرى نفرض بالقوى y والىالمستخدمة من الفرضية في المعادلة التفاضلية مع تحديد m

أولاً وسنصل هذه الطريقة خروبينوس

مثال: حل المعادلة التفاضلية بمسألة قوى حول X

$$Xy'' - y' - Xy = 0$$

$$y'' - \frac{1}{X}y' - \frac{X}{X}y = 0$$

$$y'' - \frac{1}{X}y' - \frac{X^2}{X^2}y = 0$$

∴ $X=0$ نقطة مفردة نظامية∴ $X \neq 0$ نقطة عادية

$$\text{let } y = X^m (c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + \dots + c_k X^{m+k}) \quad c_0 \neq 0$$

$$y = c_0 X^m + c_1 X^{m+1} + c_2 X^{m+2} + c_3 X^{m+3} + \dots + c_k X^{m+k}$$

$$y' = m c_0 X^{m-1} + (m+1) c_1 X^m + (m+2) c_2 X^{m+1} + \dots + (m+k) c_k X^{m+k-1}$$

$$y'' = m(m-1) c_0 X^{m-2} + m(m+1) c_1 X^{m-1} + (m+1)(m+2) c_2 X^m + \dots + (m+k)(m+k-1) c_k X^{m+k-2}$$

$$X y'' = m(m-1) c_0 X^{m-1} + m(m+1) c_1 X^m + (m+1)(m+2) c_2 X^{m+1} + \dots + (m+k)(m+k-1) c_k X^{m+k-1}$$

$$-y' = -m c_0 X^{m-1} - (m+1) c_1 X^m - (m+2) c_2 X^{m+1} - \dots - (m+k) c_k X^{m+k-1}$$

$$-X y = -c_0 X^{m+1} - c_1 X^{m+2} - c_2 X^{m+3} - \dots - c_k X^{m+k+1}$$

$$\rightarrow -c_{k-2} X^{m+k-2} - c_{k-1} X^{m+k-1} - c_k X^{m+k}$$

جميع الحدود في الطرف الأيسر من المعادلة تساوي صفر

أي أن

$$0 = (m^2 - 2m) c_0 X^{m-1} + (m^2 - 1) c_1 X^m + \dots + [(m+k)(m+k-1) c_k - (m+k) c_{k-1} - c_{k-2}] X^{m+k-1}$$

وبما أن المعادلة تساوي صفر لكل قيم X فإن

$$(m^2 - 2m) c_0 = 0$$

$$(m^2 - 1) c_1 = 0$$

$$(m+k)(m+k-1) c_k - c_{k-2} = 0$$

$$\therefore C_0 \neq 0 \Rightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$m(m-2) = 0$$

$$m = 0, m = 2$$

$$m^2 - 1 = 0$$

$$m - 1 \neq 0$$

$$4 - 1 = 3 \neq 0$$

بعد التحقق من $m = 0$ و $m = 2$ نجد في المعادلة الناتجة

$$C_1 = 0 \text{ لأن } m^2 - 1 \neq 0 \text{ يؤيد ذلك}$$

$$C_k = \frac{C_{k-2}}{(m+k)(m+k-2)} \quad \text{المعادلة}$$

$$m = 0 \Rightarrow C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k-2)} \quad \text{--- ①} \quad k \geq 2$$

$$m = 2 \Rightarrow C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k+2)} \quad \text{--- ②} \quad k \geq 2$$

ولذلك نرى معادلتين الأولى بسيطة أخرى عندما $k=2$

لأننا نريد الجواب عندما $m=0$ ويكون الحل الثاني

عندما $m=2$

$$\therefore C_0 \neq 0$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{C_0}{8}$$

$$C_3 = \frac{C_1}{15} = \frac{0}{15} = 0$$

$$C_4 = \frac{C_2}{24} = \frac{C_0}{24 \times 8} = \frac{C_0}{192}$$

$$C_5 = \frac{C_3}{35} = 0$$

$$y = C_0 x^m + C_1 x^{m+1} + C_2 x^{m+2} + \dots + C_k x^{m+k}$$

$$m=2$$

$$y = c_0 x^2 + 0 + \frac{c_0}{8} x^4 + 0 + \dots$$

$$y = c_0 \left(x^2 + \frac{x^4}{8} + \dots \right)$$

بجاء في بسلا التفاضلية :
 اننا واثمة من المعادلات التفاضلية الطرد في الفيزياء والهندسة
 هي المعادلة التفاضلية الكلاسيكية من الرتبة الثانية ذات
 المعاملات المتغيرة والتي هي ختار المعادلة

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

والتي تعرف بمعادلة بيسل

اننا حل هذه المعادلة يكون بطريقة فورييه وذلك بافتراض
 الكلا هو المتسلسلة التالية

$$y = x^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$y = c_0 x^m + c_1 x^{m+1} + \dots + c_k x^{m+k}$$

المصفوفة المربعة للمعادلة التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة
من الدرجة الثانية هي

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = 0$$

وتدرس هذه المعادلة بفرض ان المعاملات $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ هي دوال تحليلية ونقطة x_0 هي نقطة في الفترة I حيث $a_0(x_0) \neq 0$ اذا اخذنا x_0 نقطة في الفترة I فكل دالة تحليلية في الفترة I يمكن كتابتها على شكل سلسلة قوى متقاربة في x_0 وبالصيغة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ان السلسلة حلول المعادلة (1) تقاربها اطوال $a_0(x)$ خاضعات $(a_0(x_0) = 0)$ خاضعة للقيود x_0 تتغير نقطة x_0 متغيرة المعادلة. وفي حالة $a_0(x_0) \neq 0$ يجب ان تكون x_0 نقطة تقارب السلسلة $a_0(x)$ وفي حالة كون x_0 نقطة تقارب السلسلة للمعادلة (1) فيمكن التعبير عن الحل بالشكل التالي

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots$$

وفي حالة كون $x_0 = 0$ خاضعة لكل يكون الشكل التالي

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$y - y = 0 \quad \text{معادلة}$$

$$a_0(x) = 1 \quad x_0 = 0$$

$$a_0(0) = 1 \neq \infty$$

نقطة تقارب المتسلسلة

$$n(n-1)c_n - c_{n-2} = 0$$

$$c_n = \frac{1}{n(n-1)} c_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$y = c_0 + c_1 x + \frac{1}{2} c_0 x^2 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \dots$$

$$y'' - xy = 0$$

$$a_0(x) \equiv 1, \quad a_0(0) \neq \infty$$

الحل هو $y = 1 + \dots$

$$y'' - xy' - y = 0$$

$$a_0(x) \equiv 1, \quad a_0(0) \neq \infty$$

الحل هو $y = 1 + \dots$

$$y'' - \frac{y}{1+x^2} = 0$$

$$(1+x^2)y'' - y = 0 \Rightarrow y'' + x^2 y'' - y = 0$$

$$a_0(x) \equiv 1+x^2, \quad a_0(0) \neq \infty$$

الحل هو $y = 1 + \dots$

$$c_2 = \frac{1}{2} c_0, \quad c_3 = \frac{1}{6} c_1$$

لها في حالة كون x_0 نقطة مفردة البسيطة (١) لها كوة
 هذه الحالة تعني نقطة مفردة ونقطة تفرد في آن واحد
 مفردة منتظمة إذا امكن كتابة المعادلة (١) بالصيغة

$$C_0(x)(x-x_0)^2 y'' + C_1(x)(x-x_0)y' + C_2(x)y = 0$$

حيث $C_0(x)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$ دوال تحليلية و $C_0(x_0) \neq 0$
 عند كثيرية تفرد x_0 نقطة مفردة منتظمة
 البسيطة

$$x_0 = -1, \quad (1+x)y'' + 2xy' - 3y = 0$$

$$(1+x)^2 y'' + 2x(1+x)y' - 3(1+x)y = 0$$

$$C_0(x) = 1, \quad C_1(x) = 2x, \quad C_2(x) = -3$$

$$C_0(-1) = 1 \neq 0$$

∴ النقطة $x_0 = -1$ نقطة مفردة منتظمة البسيطة

$$x_0 = 0, \quad x^3 y'' + x^2 y' - 2y = 0$$

$$x(x-0)^2 y'' + x(x-0)y' - 2y = 0$$

$$C_0(x) = x^2, \quad C_1(x) = x, \quad C_2(x) = -2$$

$$C_0(0) = 0$$

∴ النقطة $x_0 = 0$ نقطة مفردة

إذا كانت النقطة x_0 نقطة مفردة منتظمة للمعادلة (2)
فإن الحل يكون بالشكل التالي

$$y = x^m (c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_k(x-x_0)^k)$$

حيث m عدد ليس بالعدد الصحيح
← ليس بالعدد الصحيح

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 4)y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y'' + x y' + x^2 y - 4y = 0$$

$$c_0(x) = 1, c_1(x) = 1, c_2(x) = x^2 - 4$$

0 نقطة منتظمة

$$m = \frac{1}{2}$$

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(m+k)^2 - 4}, \quad k \geq 2$$

$$x y'' + y' - y \Rightarrow c_0(x-x_0) y'' + c_1(x)(x-x_0) y' + c_2(x) y = 0$$

$$c_0(x) = 1, c_0(0) = 1 \neq 0$$

النقطة $x=0$ نقطة مفردة

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

$$y'' - xy = 0$$

المعادلة أعلاه اعتيادية عند $x=0$

هنا يمكن التخلص من الحد بشكل متسلسلة تايلور.

$$2x^2 y'' + 3xy' + (2x-1)y = 0$$

$$y'' + \frac{3x}{2x^2} y' + \left(\frac{2x-1}{2x^2}\right) y = 0$$

$$y'' + \frac{\frac{3}{2}}{x} y' + \frac{(x - \frac{1}{2})}{x^2} y = 0$$

$x=0$ نقطة مفردة زائدة $\therefore$

$x \neq 0$ نقطة اعتيادية