٤) اذا كانت $f(x) = \cos ax$ فإن

$$L\{\cos ax\} = \int_0^\infty e^{-px} \cos ax \, dx$$

$$= \frac{p}{p^2 + a^2} , \quad p > 0$$

٥) اذا كانت $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ فإن

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}} , \quad p > 0$$

٦) اذا كانت $f(x) = \sinh ax$ و a عدد ح فإن

$$L\{\sinh ax\} = L\left\{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} L\{e^{ax}\} - \frac{1}{2} L\{e^{-ax}\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+a} = \frac{a}{p^2 - a^2} , \quad p > a$$

$$\therefore L\{\sinh ax\} = \frac{a}{p^2 - a^2} , \quad p > a$$

٧) اذا كانت $f(x) = \cosh ax$, a عدد ح فإن

$$L\{\cosh ax\} = \frac{p}{p^2 - a^2} , \quad p > a$$

مبرهنة :

اذا كانت $\bar{f}(p) = L\{f(x)\}$ وكان a عدداً فإن

$$L\{e^{-ax} f(x)\} = \bar{f}(p+a)$$

$$L\{e^{-ax} f(x)\} = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} \cdot e^{-ax} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p+a)x} f(x)\, dx$$

$$= \bar{f}(p+a)$$

$$\therefore L\{e^{-ax} f(x)\} = \bar{f}(p+a)$$

$$\bar{f}(p) = L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx$$

والآن يمكن اضافة بعض تحويلات لابلاس للدوال مختلفة أخرى وهي .

١) اذا كانت $f(x) = x^n e^{-ax}$ فإن

$$L\{x^n e^{-ax}\} = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}} \quad , \quad p > -a$$

وذلك بمساعدة العلاقة

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

وبالاعتماد على المبرهنة السابقة

٢) اذا كانت $f(x) = e^{-ax} \sin bx$ فإن

$$L\{e^{-ax} \sin bx\} = \frac{b}{(p+a)^2 + b^2} \quad , \quad p > -a$$

وذلك بمساعدة القانون والاشتقاق وعلى المبرهنة السابقة

$$L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2+a^2}$$

1) اذا كانت $f(x) = e^{-ax}\cos bx$ فإن

$$L\{e^{-ax}\cos bx\} = \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}, \quad p > -a$$

وذلك بمساعدة القانون والاشتقاق وعلى المبرهنة السابقة

$$L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2+a^2}$$

جد تحويلات لابلاس للدوال التالية

1) $L\{\sinh 3x\} = \frac{a}{p^2-a^2} = \frac{3}{p^2-9}$

2) $L\{x^2+5x-4\} = L\{x^2\} + 5L\{x\} - 4L\{1\}$

$$= \frac{2!}{p^3} + 5\cdot\frac{1!}{p^2} - 4\cdot\frac{1}{p}$$

3) $L\{(x^2-5x+6)e^{2x}\} = L\{x^2e^{2x} - 5xe^{2x} + 6e^{2x}\}$

$$= L\{x^2e^{2x}\} - 5L\{xe^{2x}\} + 6L\{e^{2x}\}$$

$$= \frac{2!}{(p-2)^3} - 5\,\frac{1!}{(p-2)^2} + 6\cdot\frac{1}{p-2}$$

4) $L\{x\cos 2x\} = L\{xe^{2ix}\} = \frac{1!}{(p-2i)^2} * \frac{(p+2i)^2}{(p+2i)^2}$

$$= \frac{p^2+4ip-4}{(p^2+4)^2} = \frac{(p^2-4)+4ip}{(p^2+4)^2} = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + i\,\frac{4p}{(p^2+4)^2}$$

$$\therefore L\{x\cos 2x\} = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$$ أخذنا الجزء الحقيقي لأن الدالة Cos

١٤

5) $L\{\cos(ax+b)\}$

$$= L\{\cos ax \cos b - \sin ax \sin b\}$$

$$= L\{\cos ax \cos b\} - L\{\sin ax \sin b\}$$

$$= \cos b \, L\{\cos ax\} - \sin b \, L\{\sin ax\}$$

$$= \cos b \cdot \frac{p}{p^2+a^2} - \sin b \cdot \frac{a}{p^2+a^2}$$

6) $L\{\sin^2 ax\} = L\left\{\frac{1-\cos 2ax}{2}\right\}$

$$= \frac{1}{2} L\{1\} - \frac{1}{2} L\{\cos 2ax\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+4a^2}$$

7) $L\left\{e^{ax} + 2e^{\left(\frac{-1}{2}\right)ax} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} ax\right\}$

8) $L\left\{\frac{1-\cos ax}{a^2}\right\} = \frac{1}{a^2} L\{1\} - \frac{1}{a^2} L\{\cos ax\}$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{p}{p^2+a^2}$$

$$= \frac{\cancel{p^2}+a^2-\cancel{p^2}}{a^2 p(p^2+a^2)} = \frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a^2} p(p^2+a^2)} = \frac{1}{p(p^2+a^2)}$$

7) $L\left\{e^{ax} + 2e^{\left(\frac{-1}{2}\right)ax} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} ax\right\}$

$$= L\{e^{ax}\} + 2L\left\{e^{\frac{-1}{2}ax} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} ax\right\}$$

$$= \frac{1}{p-a} + 2\cdot\frac{p+\frac{1}{2}a}{(p+\frac{1}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{4}a)^2}$$

$$= \frac{1}{p-a} + \frac{2p+a}{p^2+ap+\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2}$$

$$= \frac{1}{p-a} + \frac{2p+a}{p^2+ap+a^2} = \frac{p^2+ap+a^2+(p-a)(2p+a)}{(p-a)(p^2+ap+a^2)}$$

$$= \frac{p^2+\cancel{ap}+\cancel{a^2}+2p^2-\cancel{2ap}+\cancel{ap}-\cancel{a^2}}{p^3-a^3} = \frac{3p^2}{p^3-a^3}$$

معكوس تحويلات لابلاس

تعريف: لتكن $f(x)$ دالة ذات تحويل لابلاس $\bar{f}(p)$

$L\{F(x)\} = \bar{f}(p)$

فيقال ان $f(x)$ معكوس تحويل لابلاس للدالة

ويكتب

$$L^{-1}\{\bar{f}(p)\} = f(x)$$

حيث ان L^{-1} هو مؤثر المعكوس لتحويل لابلاس اي ان

يرجع تحويل لابلاس الى الدالة الاصلية مثال

ملاحظة

$L^{-1}\{F(p)\} = f(x)$ $\Rightarrow L^{-1}\{\frac{1}{p^2}\} = x$

$L^{-1}\{\frac{1}{p^3}\} = \frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{2}{p^3}\} = \frac{1}{2}x^2$

$L^{-1}\{\frac{1}{p}\} = 1$, $L\{1\} = \frac{1}{p}$

$L^{-1}\{\frac{1}{p-a}\} = e^{ax}$, $L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a}$

$L^{-1}\{\frac{a}{a^2+p^2}\} = \sin ax$, $L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2+a^2}$

خصائص المؤثر L^{-1}

١) اذا كان $L^{-1}\{\bar{f}_n(P)\}=f_n(X)$ و

$L^{-1}\{\bar{f}_1(P)\}=f_1(X)$, $L^{-1}\{\bar{f}_2(P)\}=f_2(X)$

وكانت $a_1, a_2, \dots, a_n$ ثوابت فإن

$$L^{-1}\{a_1\bar{f}_1(P)+a_2\bar{f}_2(P)+\dots+a_n\bar{f}_n(P)\}=a_1f(X)+a_2f_2(X)+\dots+a_nf_n(X)$$

٢) اذا كان $L^{-1}\{\bar{f}(P)\}=f(X)$

فإن $L^{-1}\{\bar{f}(P+a)\}=e^{-aX}f(X)$,

مثال: جد معكوس تحويل لابلاس للدالة

$$L^{-1}\left\{\frac{2P+3}{P^2+4}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{2P}{P^2+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{3}{P^2+4}\right\}$$

$$\because L\{\cos ax\}=\frac{P}{P^2+4}\ ,\ L\{\sin ax\}=\frac{a}{P^2+a^2}$$

$$=2L^{-1}\left\{\frac{P}{P^2+2^2}\right\}+3L^{-1}\left\{\frac{1}{P^2+2^2}\right\}*\frac{2}{2}$$

$$=2\cos 2X+\frac{3}{2}\sin 2X$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{P^2+4P+13}\right\}$$

الحل

$$=L^{-1}\left\{\frac{1}{P^2+4P+4-4+13}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(P+2)^2+9}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(P+2)^2+3^2}\right\} = \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{(P+2)^2+3^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}e^{-2X}\sin 3X$$

مثال: جد $L^{-1}\left\{\frac{1}{(P+a)(P+b)}\right\}$

$$\frac{1}{(P+a)(P+b)} = \frac{A}{P+a} + \frac{B}{P+b}$$

$$1 = A(P+b) + B(P+a)$$

$$1 = AP + Ab + BP + Ba$$

$$1 = (A+B)P + (Ab+Ba)$$

$$A+B=0 \Rightarrow A=-B \quad \text{—} \; ①$$

$$Ab+Ba=1 \quad \text{—} \; ②$$

بالتعويض ① في ② نحصل على

$$-Bb+Ba=1$$

$$B(a-b)=1 \Rightarrow B=\frac{1}{a-b}$$

$$A=-B=\frac{1}{b-a}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(P+a)(P+b)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{b-a}}{P+a}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{a-b}}{P+b}\right\}$$

$$= \frac{1}{b-a}L^{-1}\left\{\frac{1}{P+a}\right\} + \frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{P+b}\right\}$$

$$= \frac{1}{b-a} e^{-ax} + \frac{1}{a-b} e^{-bx}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[e^{-ax} - e^{-bx} \right]$$

$$L^{-1}\left\{ \frac{p+2}{p^2+9} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{p}{p^2+9} \right\} + L^{-1}\left\{ \frac{2}{p^2+9} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{p}{p^2+3^2} \right\} + \frac{2}{3} L^{-1}\left\{ \frac{3}{p^2+3^2} \right\}$$

$$= \cos 3x + \frac{2}{3} \sin 3x$$

مثال: جد معكوس تحويل لابلاس

$$L^{-1}\left\{ \frac{3p-5}{4p^2-4p+37} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{3p-5}{4p^2-4p+1-1+37} \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{3p-5}{4\left(p^2-p+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{37}{4}\right)} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{3p-5}{4\left((p-\frac{1}{2})^2+\frac{36}{4}\right)} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{ \frac{3p-5}{4\left((p-\frac{1}{2})^2+9\right)} \right\} = \frac{1}{4} L^{-1}\left\{ \frac{3p-5}{(p-\frac{1}{2})^2+3^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} L^{-1}\left\{ \frac{3p-5-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+3^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} L^{-1}\left\{ \frac{3(p-\frac{1}{2})-5+\frac{3}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+3^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} L^{-1}\left\{ \frac{3(p-\frac{1}{2}) - \frac{7}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2 + 3^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} L^{-1}\left\{ \frac{3(p-\frac{1}{2})}{(p-\frac{1}{2})^2 + 3^2} \right\} - \frac{1}{4} L^{-1}\left\{ \frac{\frac{7}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2 + 3^2} \right\}$$

$$= \frac{3}{4} e^{\frac{1}{2}x} \cos 3x - \frac{7}{24} L^{-1}\left\{ \frac{3}{(p-\frac{1}{2})^2 + 3^2} \right\}$$

$$= \frac{3}{4} e^{\frac{1}{2}x} \cos 3x - \frac{7}{24} e^{\frac{1}{2}x} \sin 3x$$

حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة باستخدام تحويلات لابلاس ومعكوسها.

ان واحد من تطبيقات تحويلات لابلاس الرئيسية هو حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة حيث يتطلب تحويل المعادلة التفاضلية الخطية الى معادلة جبرية في $\bar{y}(p)$ ويتم ذلك بتحويل المعاملات الاشتقاقية $y^{(n)}$ ... و y'' و y' والدوال الأخرى التي فيها الى تحويلات لابلاس وبعد ان تتحول المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية نقوم بايجاد معكوس تحويل لابلاس لهذه المعادلة الجبرية ويكون الناتج هو حل المعادلة التفاضلية.

مبرهنة:

اذا كانت $f(x)$ ومشتقاتها $f'(x), f''(x), \ldots, f^{n}(x)$ موجودة فان

$$L\{f^{n}(x)\} = p^{n}\bar{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

القانون الأول $L\{y\} = \bar{y}(P)$

القانون الثاني $L\{y'\} = P\bar{y}(P) - y(0)$

القانون الثالث $L\{y''\} = P^2\bar{y}(P) - Py(0) - y'(0)$

القانون الرابع $L\{y'''\} = P^3\bar{y}(P) - P^2y(0) - Py'(0) - y''(0)$

القانون الخامس $L\{y^{IV}\} = P^4\bar{y}(P) - P^3y(0) - P^2y'(0) - Py''(0) - y'''(0)$

القانون العام

$$L\{y^{(n)}\} = P^n\bar{y}(P) - P^{n-1}y(0) - P^{n-2}y'(0) - \dots - y^{n-1}(0)$$

حل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

مع العلم ان $y=1$ عندما $x=0$ اي ان $y(0)=1$

$$y' + 2y = \cos x$$

$$L\{y' + 2y\} = L\{\cos x\}$$

$$L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{\cos x\}$$

$$P\bar{y}(P) - y(0) + 2\bar{y}(P) = \frac{P}{P^2+1}$$

$$P\bar{y}(P) - 1 + 2\bar{y}(P) = \frac{P}{P^2+1}$$

$$\bar{y}(P)\,[P+2] = 1 + \frac{P}{P^2+1}$$

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{p}{(p+2)(p^2+1)}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{p}{(p+2)(p^2+1)}\right\}$$

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+D}{p^2+1}$$

$$p = A(p^2+1) + (Bp+D)(p+2)$$

$$p = Ap^2 + A + Bp^2 + 2Bp + Dp + 2D$$

$$p = (A+B)p^2 + (2B+D)p + (A+2D)$$

بطرح ③ مع ① ينتج $B - 2D = 0$

مع ② $2B + D = 1 \quad \times 2$

$$A + B = 0 \quad \text{—} \ 1$$

$$2B + D = 1 \quad \text{—} \ 2$$

$$A + 2D = 0 \quad \text{—} \ 3$$

$$5B = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{5}$$

$$A = -\frac{2}{5}$$

حل المعادلات (آنياً) نحصل على

$$A = -\frac{2}{5}, \quad B = \frac{2}{5}, \quad D = \frac{1}{5}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{p}{(p+2)(p^2+1)}\right\}$$

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+D}{p^2+1}$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{\frac{2}{5}p + \frac{1}{5}}{p^2+1}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(P)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{P+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-2}{5}\cdot\frac{1}{P+2} + \frac{1}{5}\,\frac{2P+1}{P^2+1}\right\}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(P)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{P+2}\right\} - \frac{2}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{P+2}\right\} + \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{2P+1}{P^2+1}\right\}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(P)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{P+2}\right\} - \frac{2}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{P+2}\right\} + \frac{2}{5}L^{-1}\left\{\frac{P}{P^2+1}\right\} + \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{P^2+1}\right\}$$

$$y = e^{-2x} - \frac{2}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

$$y = \frac{3}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

حل المعادلة التفاضلية التالية $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$

والتي تحقق $y(0) = 1 , \quad y'(0) = 0$

$$L\{y'' - 2y' + y\} = L\{6xe^{x}\}$$

$$L\{y''\} - 2L\{y'\} + L\{y\} = 6L\{xe^{x}\}$$

$$P^2\bar{y}(P) - Py(0) - y'(0) - 2[P\bar{y}(P) - y(0)] + \bar{y}(P) = 6\,\frac{1!}{(P-1)^2}$$

$$P^2\bar{y}(P) - P - 0 - 2P\bar{y}(P) + 2 + \bar{y}(P) = \frac{6}{(P-1)^2}$$

$$\bar{y}(P)[P^2 - 2P + 1] - P + 2 = \frac{6}{(P-1)^2}$$

$$\bar{y}(P) = \frac{P-2}{(P-1)^2} + \frac{6}{(P-1)^4}$$

$$L^{-1}\{\bar{y}(P)\} = L^{-1}\left\{\frac{P-2}{(P-1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{6}{(P-1)^4}\right\}$$

الخميس :- ٢ / ٥ / ٢٠١٣

$$L^{-1}\{\bar{q}(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p-1-1}{(p-1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{6}{(p-1)^4}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3!}{(p-1)^4}\right\}$$

$$y = e^x - xe^x + x^3 e^x$$

$$y = e^x(1 - x + x^3)$$

الفصل السادس

حل المعادلات التفاضلية بالمتسلسلات

الحل بمتسلسلة قوى x .

يمكن حل المعادلات التفاضلية بأنواعها السابقة مع المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة بطريقة عامة وذلك بافتراض الحل هو متسلسلة قوى x ثم نعوض عن y ومشتقاتها بالمعادلة المطلوبة ونجد معاملات قوى x ونفترض ان تكون المتسلسلة متقاربة وقابلة للاشتقاق.

جد الحل المتسلسل للمعادلة التفاضلية التالية :-

$$y' = y$$

نفرض ان حل المعادلة التفاضلية هي متسلسلة قوى x التالية

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \cdots$$

ولايجاد c_4 ,.....,c_0, c_1 نجد

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3$$

ثم بالتعويض في المعادلة الاصلية

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots - c_0 - c_1x - c_2x^2 - c_3x^3 - \cdots$$

وبمساواة معاملات قوى x المتشابهة في الطرفين

$$(c_1 - c_0) + (2c_2 - c_1)x + (3c_3 - c_2)x^2 + (4c_4 - c_3)x^3 + \dots = 0$$

$$c_1 - c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = c_0$$

$$2c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2!}c_0$$

$$3c_3 - c_2 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}c_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2!}c_0 = \frac{1}{3!}c_0$$

$$4c_4 - c_3 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{1}{4}c_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3!} = \frac{1}{4!}c_0$$

بالتعويض في الحل المفروض.

$$y = c_0 + c_0 x + \frac{1}{2!}c_0 x^2 + \frac{1}{3!}c_0 x^3 + \frac{1}{4!}c_0 x^4 + \dots$$

$$y = c_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$$

$$y = c_0 e^x$$

طريقة أخرى للحل.

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln y = x + c$$

$$y = e^{x+c}$$

$$y = e^x e^c \quad , \quad A = e^c$$

$$y = A e^x$$

قوانين مهمة لكتابة الدوال على شكل متسلسلات

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}}$$

جد الحل المتسلسل للمعادلة التفاضلية

$y' + 3x^2 y = 1$

let $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$

$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots$

بالتعويض في المعادلة الاصلية

$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots + 3x^2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$
$+ c_4 x^4 + \cdots) = 1$

$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots + 3c_0 x^2 + 3c_1 x^3$
$+ 3c_2 x^4 + 3c_3 x^5 = 1$

$c_1 + 2c_2 x + (3c_3 + 3c_0) x^2 + (4c_4 + 3c_1) x^3 + \cdots = 1$

$c_1 = 1$

$2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$3c_3 + 3c_0 = 0 \Rightarrow c_3 = -c_0$

$4c_4 + 3c_1 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{-3}{4} c_1 = \frac{-3}{4}$

بالتعويض في الحل المفروض

$y = c_0 + x + 0 - c_0 x^3 - \frac{3}{4} \cdot 1 x^4 \cdots$

$y = c_0 + x - c_0 x^3 - \frac{3}{4} x^4 + \cdots$

$y = c_0 [1 - x^3 + \cdots] + [x - \frac{3}{4} x^4 \cdots]$

النقاط المنفردة والاعتيادية للمعادلة التفاضلية.

ان الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة هي :

$$P(X)\frac{d^2y}{dX^2}+Q(X)\frac{dy}{dX}+R(X)y=0 \quad (1)$$

حيث ان $P(X)$ و $Q(X)$ و $R(X)$ دوال بمتغير X.

كما يمكن كتابة المعادلة (1) بالصورة :

$$\frac{d^2y}{dX^2}+\frac{Q}{P}\frac{dy}{dX}+\frac{R}{P}y=0 \quad (2)$$

(1) يقال ان المعادلة التفاضلية (2) نقطة اعتيادية عند النقطة $X=a$ اذا أمكن كتابة كل من الدالتين $\frac{R}{P}$, $\frac{Q}{P}$ بشكل متسلسلة تايلر حول النقطة $X=a$

بمعنى اخر اذا كتبت الدالتين بالصورتين :

$$\left.\begin{aligned}\frac{Q}{P}&=C_0+C_1(X-a)+C_2(X-a)^2+\cdots\\ \frac{R}{P}&=b_0+b_1(X-a)+b_2(X-a)^2+\cdots\end{aligned}\right\} X=a$$

واذا كانت $a=0$ فعند ذلك يكون

$$\left.\begin{aligned}\frac{Q}{P}&=C_0+C_1X+C_2X^2+C_3X^3+\cdots\\ \frac{R}{P}&=b_0+b_1X+b_2X^2+\cdots\end{aligned}\right\} X=0$$

ملاحظة :

* اذا كانت المعادلة التفاضلية نقطة اعتيادية عند $X=a$ فيمكن التعبير عن الحل بدلالة متسلسلة تايلر حول النقطة a اي ان

$y=C_0+C_1(X-a)+C_2(X-a)^2+\cdots\ ]\ X=a$

* اما اذا كانت $X - a = 0$ فيمكن الحل بدلالة متسلسلة ماكلورين اي ان

$$y = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots$$

② يقال ان المعادلة التفاضلية ① نقطة منفردة عند $X = a$ اذا لم نتمكن من كتابة $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ بشكل متسلسلة تايلر حول النقطة $X = a$

③ تسمى النقطة $X = a$ نقطة منفردة نظامية (منتظمة) اذا كان من الممكن كتابة كل من الدالتين $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ بالشكل التالي

$$\frac{Q}{P} = \frac{c_0 + c_1(X-a) + c_2(X-a)^2 + \cdots}{X-a}$$

$$\frac{R}{P} = \frac{b_0 + b_1(X-a) + b_2(X-a)^2 + \cdots}{(X-a)^2}$$

واذا كانت $X - a = 0$ فعند ذلك تكون الدالتان $\frac{Q}{P}$ و $\frac{R}{P}$ بالشكل التالي

$$\frac{Q}{P} = \frac{c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots}{X}$$

$$\frac{R}{P} = \frac{b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots}{X^2}$$

فمثلاً يمكن كتابة المعادلة التفاضلية التالية

$$2X^2 y'' + 3X y' + (2X - 1) y = 0$$

بالشكل

$$y'' + \frac{3X}{2X^2} y' + \frac{2X-1}{2X^2} y = 0$$

$$y'' + \frac{3/2}{X} y' + \frac{X - \frac{1}{2}}{X^2} y = 0$$

وعلى هذا فإن $X = 0$ هي نقطة منفردة نظامية للمعادلة التفاضلية أو يمكن القول ان المعادلة التفاضلية نقطة اعتيادية كلها حيث $X \neq 0$ و $X = 0$ هي نقطة منفردة نظامية.

وكذلك المعادلة

$$Xy'' + y' + Xy = 0$$

التي يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$y'' + \frac{1}{X} y' + \frac{X^2}{X^2} y = 0$$

هذه المعادلة لها نقطة اعتيادية $X \neq 0$ أو $X = 0$ هي نقطة منفردة نظامية.

ملاحظة:

اذا كانت للمعادلة التفاضلية نقطة منفردة نظامية عند $X = a$ فنقول انه يوجد حل واحد على الأقل للمعادلة التفاضلية بصورة المتسلسلة التالية:

$$y = (X-a)^m [c_0 + c_1(X-a) + c_2(X-a)^2 + \cdots]$$

وفي حالة $X = a = 0$ فإن الحل المتسلسل للمعادلة (1) هو

$$y = X^m [c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots]$$

حيث يمكن ايجاد m و c_i بطريقة فروبينوس.

ومما تقدم يمكن اعطاء المبرهنة التالية:

أ) اذا كان المعادلة التفاضلية (1) نقطة اعتيادية عند $x=a$ فيمكن التعبير عن الحل المتسلسل بالشكل التالي:

$$y = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

وفي حالة $x=0$ فإن الحل المعادلة (1) هي متسلسلة القوى التالية

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

ب) اذا كانت المعادلة التفاضلية (1) نقطة منفردة نظامية عند $x=a$ فنقول لانه يوجد حل واحد فقط على الاقل للمعادلة التفاضلية بصورة المتسلسلة التالية:

$$y = (x-a)^m \left[c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \right]$$

وفي حالة $x=a=0$ فإن الحل المتسلسل للمعادلة (1) هو:

$$y = x^m \left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \right]$$

$$y'' + y = 0$$

$$y'' + y' - xy = 0$$

$$y' = x + y$$

طريقة فروبينوس:

لو اعتبرنا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

$$P(X)\, y'' + Q(X)\, y' + R(X)\, y = 0$$

حيث ان كل من $P(X)$ و $Q(X)$ و $R(X)$ هي متعددات حدود في X

لايجاد حل هذه المعادلة بمتسلسلة قوى حول $X=0$ نقوم اولاً بفرض الحل بالصورة التالية

$$y = X^m (C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + C_3 X^3 + \cdots + C_k X^k)$$

حيث ان $C_0 \neq 0$

نحاول اولاً أن نجد m و C_i بحيث يمكن تحقيق المعادلة التفاضلية الا قيم m يمكن ان تكون اعداد صحيحة موجبة وسالبة او اعداد كسرية موجبة وسالبة فاذا وجدنا قيمتين مختلفتين لـ m سوف نحصل على حلين للمعادلة التفاضلية ولكن اذا وجدنا قيمة واحدة لـ m سوف نحصل على حل خاص فقط ولاجل ان نجد m و C_i نقوم بالتعويض عن y و y' و y'' المستحصلة من الفرضية في المعادلة التفاضلية مع تحديد m أولاً وتسمى هذه الطريقة فروبينوس

مثال: حل المعادلة التفاضلية بمتسلسلة قوى حول X

$$X y'' - y' - X y = 0$$

$$y'' - \frac{1}{X} y' - \frac{X}{X} y = 0$$

$$y'' - \frac{1}{X} y' - \frac{X^2}{X^2} y = 0$$

$\therefore X = 0$ نقطة منفردة نظامية

$\therefore X \neq 0$ نقطة اعتيادية

مثال

let $y = x^m (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_k x^{m+k})$, $c_0 \neq 0$

$y = c_0 x^m + c_1 x^{m+1} + c_2 x^{m+2} + c_3 x^{m+3} + \cdots + c_k x^{m+k}$

$y' = m c_0 x^{m-1} + (m+1) c_1 x^m + (m+2) x^{m+1} + \cdots + (m+k) c_k x^{m+k-1}$

$y'' = m(m-1) c_0 x^{m-2} + m(m+1) c_1 x^{m-1} + (m+1)(m+2) c_2 x^m + \cdots + (m+k)(m+k-1) c_k x^{m+k-2}$

$x y'' = m(m-1) c_0 x^{m-1} + m(m+1) c_1 x^m + (m+1)(m+2) c_2 x^{m+1} + \cdots + (m+k)(m+k-1) c_k x^{m+k-1}$

$-y' = -m c_0 x^{m-1} - (m+1) c_1 x^m - (m+2) c_2 x^{m+1} - \cdots - (m+k) c_k x^{m+k-1}$

$-x y = -c_0 x^{m+1} - c_1 x^{m+2} - c_2 x^{m+3} - \cdots - c_k x^{m+k+1}$

$\rightarrow -c_{k-2} x^{m+k-2} , c_{k-1} x^{m+k-1} + c_k x^{m+k}$

وبجمع الحدود الثلاثة وتوحيد معاملات قوى X المتشابهة نحصل على

$0 = (m^2 - 2m) c_0 x^{m-1} + (m^2-1) c_1 x^m + \cdots + [(m+k)(m+k-1) c_k - (m+k) c_k - c_{k-2}] x^{m+k-1} + \cdots$

عامل مشترك $(m+k)(m+k-1-1) c_k$

وبجعل معاملات قوى X مساوية الصفر نحصل على

$(m^2 - 2m) c_0 = 0$

$(m^2 - 1) c_1 = 0$

$\vdots$

$(m+k)(m+k-2) c_k - c_{k-2} = 0$

$\because C_0 \neq 0 \Rightarrow m^2 - 2m = 0$

$m(m-2) = 0$

$m = 0 \ , \ m = 2$

$m^2 - 1 = 0$

$0 - 1 \neq 0$

$\therefore 4 - 1 = 3 \neq 0$

بعد التعويض عن $m=0$ و $m=2$ نجد في المعادلة الثانية ان $m^2-1 \neq 0$ يؤدي الى $C_1 = 0$

الحد العام:

$$C_k = \frac{C_{k-2}}{(m+k)(m+k-2)}$$

$$m = 0 \Rightarrow C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k-2)} \quad \text{— (1)} \quad k \geq 2$$

$$m = 2 \Rightarrow C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k+2)} \quad \text{— (2)} \quad k \geq 2$$

ولما كان مقام القانون الاول يساوي صفر عندما $k=2$ لهذا نهمل الحالة عندما $m=0$ ويكون الحل العام عندما $m=2$

$\because C_0 \neq 0$

$C_1 = 0$

$C_2 = \frac{C_0}{8}$

$C_3 = \frac{C_1}{15} = \frac{0}{15} = 0$

$C_4 = \frac{C_2}{24} = \frac{C_0}{24 * 8} = \frac{C_0}{192}$

$C_5 = \frac{C_3}{35} = 0$

$\vdots$

$$y = C_0 x^m + C_1 x^{m+1} + C_2 x^{m+2} + \cdots + C_k x^{m+k}$$

$m = 2$

$$y = C_0 X^2 + 0 + \frac{C_0}{8} X^4 + 0 + \cdots$$

$$\therefore y = C_0 \left(X^2 + \frac{X^4}{8} + \cdots \right)$$

معادلة بسل التفاضلية :

ان واحدة من المعادلات التفاضلية المهمة في الفيزياء والهندسة هي المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة والتي صيغتها العامة

$$X^2 y'' + X y' + (X^2 - n^2) y = 0$$

والتي تعرف بمعادلة بسل

ان حل هذه المعادلة يكون بطريقة فروبينيوس وذلك بافتراض الحل هو المتسلسلة التالية

$$y = X^m \sum_{k=0}^{\infty} C_k X^k$$

$$y = C_0 X^m + C_1 X^{m+1} + \cdots + C_k X^{m+k}$$

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة من الرتبة الثانية هي

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

سوف ندرس هذه المعادلة بفرض ان الحالات $a_0(x)$ ، $a_1(x)$ ، $a_2(x)$ هي دوال تحليلية ونقصد بقولنا ان f دالة تحليلية في نقطة x_0 في الفترة I $(f(x_0) \neq \infty)$ اذا امكن نشرها بسلسلة قوى متقاربة في I بالصيغة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ان طبيعة حلول المعادلة ① تعتمد على $a_0(x)$ فاذا كان $(a_0(x_0) = 0)$ فان النقطة x_0 تسمى نقطة منفردة للمعادلة. وفي حالة $(a_0(x_0) \neq 0)$ فان النقطة x_0 تسمى نقطة اعتيادية. وفي حالة كون x_0 نقطة اعتيادية للمعادلة ① فيمكن التعبير عن الحل بالشكل التالي

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n$$

وفي حالة كون $x_0 = 0$ فان الحل يكون بالشكل التالي

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

جد الحل

$$y'' - y = 0$$

$$a_0(x) = 1 \quad , \quad x_0 = 0$$

$$a_0(0) = 1 \neq \infty$$

$\therefore$ 0 نقطة اعتيادية

$n(n-1)c_n - c_{n-2} = 0$

$c_n = \frac{1}{n(n-1)} c_{n-2} \ , \ n \geq 2$

$y = c_0 + c_1 x + \frac{1}{2} c_0 x^2 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \dots$

$y'' - xy = 0$

$a_0(x) = 1 \ , \ a_0(0) \neq \infty$

∴ النقطة 0 اعتيادية

$y'' - xy' - y = 0$

$a_0(x) = 1 \ , \ a_0(0) \neq \infty$

∴ نقطة 0 اعتيادية

$y'' - \frac{y}{1+x^2} = 0$

$(1+x^2)y'' - y = 0 \Rightarrow y'' + x^2 y'' - y = 0$

$a_0(x) = 1 + x^2 \ , \ a_0(0) \neq \infty$

∴ 0 اعتيادية

$c_2 = \frac{1}{2} c_0 \ , \ c_3 = \frac{1}{6} c_1$

أما في حالة كون x_0 نقطة منفردة للمعادلة ① فإن
في هذه الحالة نعرف نقطة منفردة نوع الاشتمال نقطة
منفردة منتظمة إذا أمكن كتابة المعادلة ① بالصيغة

$$C_0(x)(x-x_0)^2y''+C_1(x)(x-x_0)y'+C_2(x)y=0 \quad ②$$

حيث $C_0(x), C_1(x), C_2(x)$ دوال تحليلية وعند $C_0(x_0)\neq 0$
عند ذلك تسمى النقطة x_0 نقطة منفردة منتظمة
للمعادلة

$$(1+x)y''+2xy'-3y=0 \quad , \quad x_0=-1$$

$$(1+x)^2y''+2x(1+x)y'-3(1+x)y=0$$

$$C_0(x)=1 \; , \; C_1(x)=2x \; , \; C_2(x)=-3$$
$$C_0(-1)=1\neq 0$$

∴ النقطة $x_0=-1$ نقطة منفردة منتظمة للمعادلة

$$x^3y''+x^2y'-2y=0 \quad , \quad x_0=0$$

$$x(x-0)^2y''+x(x-0)y'-2y=0$$

$$C_0(x)=x \; , \; C_1(x)=x \; , \; C_2(x)=-2$$
$$C_0(0)=0$$

∴ النقطة $x_0=0$ نقطة منفردة

إذا كانت النقطة x_0 نقطة منفردة منتظمة للمعادلة ② فإن الحل يكون بالشكل التالي

$$y = x^m \left(c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_k(x-x_0)^k\right)$$

حيث m عدد ليس بالضرورة ان يكون صحيحاً

تسمى طريقة فروبنيوس

م:

$$x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$$

$$\Rightarrow x^2y'' + xy' + x^2y - 4y = 0$$

$$c_0(x) = 1,\ c_1(x) = 1,\ c_2(x) = x^2-4$$

∴ 0 منفردة منتظمة

$$m = \mp 2$$

$$c_k = \frac{-c_{k-2}}{(m+k)^2-4}, \quad k \geq 2$$

$$xy'' + y' - y \Rightarrow c_0(x-x_0)y'' + c_1(x)(x-x_0)y' + c_2(x)y = 0$$

$$c_0(x) = 1,\ c_0(0) = 1 \neq 0$$

∴ النقطة $x=0$ نقطة منفردة

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0$$

$$y'' - x y = 0$$

المعادلة نقطة اعتيادية عند $x=0$

هنا يمكن التعبير عن الحل بشكل متسلسلة قابلة .

$$2x^2 y'' + 3x y' + (2x-1)\,y = 0$$

$$y'' + \frac{3x}{2x^2}\,y' + \left(\frac{2x-1}{2x^2}\right) y = 0$$

$$y'' + \frac{\frac{3}{2}}{x}\,y' + \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x^2}\,y = 0$$

$\therefore$ $x=0$ نقطة منفردة نظامية

$x \neq 0$ نقطة اعتيادية