$y_p = -\ln x \, e^{-2x} - e^{-2x}$

$y = y_c + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - \ln x \, e^{-2x} - e^{-2x}$

٣) طريقة المؤثر : (المؤثر العكسي)

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية الغير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة من الرتبة n هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = f(x)$$

أو بدلالة المؤثر

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n) y = 0$$

أو

$$F(D) y = f(x) \quad \text{①}$$

وعليه فالحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$y = \frac{1}{F(D)} f(x)$$

الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة $f(x)$ هي :

1) اذا كانت $f(x) = e^{bx}$ فإن الحل الخاص للمعادلة ① هو

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{bx} = \frac{1}{F(b)} e^{bx}, \quad F(b) \neq 0$$

* حل المعادلة التفاضلية التالية:

$y'' - 5y' + 6y = e^{x}$

$(D^2 - 5D + 6) y = e^{x}$

$m^2 - 5m + 6 = 0$

$(m-2)(m-3) = 0$

الخميس: ٢٠١٣/٣/٧م

$m_1 = 2 \quad , m_2 = 3$

$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

$b = 1$:-

$$y_p = \frac{1}{f(D)} f(x) = \frac{1}{f(b)} e^{bx} = \frac{1}{f(1)} e^{x} = \frac{1}{1^2 - 5 + 6} e^{x}$$

$$= \frac{1}{2} e^{x}$$

$y = y_c + y_p$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{x}$$

ملاحظة :-

اذا كانت $f(x) = e^{bx}$ و $f(b) = 0$ فان الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{e^{bx} x^r}{g(b) r!} \quad , \quad f(D) = g(D)(D-b)^r$$

أو

$$y_p = \frac{e^{bx} \cdot x^m}{f^{(m)}(b)}$$

اذا كانت $f(b) = f'(b) = f''(b) = \cdots = f^{(m-1)}(b) = 0$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y''' + y'' - y' - y = e^{x}$$

$b = 1$

$$(D^3 + D^2 - D - 1) y = e^{x}$$

$m^3 + m^2 - m - 1 = 0$

$m(m^2 - 1) + (m^2 - 1) = 0$

$(m^2 - 1)(m + 1) = 0$

$(m-1)(m+1)(m+1)=0$

$(m-1)(m+1)^2=0$

$m-1=0 \Rightarrow m_1=1$

$(m+1)^2=0 \Rightarrow m_2=m_3=-1$

$y_c=c_1e^{x}+(c_2+c_3x)e^{-x}$

$y_p=\frac{1}{f(D)}e^{bx}=\frac{1}{f(b)}e^{bx}=\frac{1}{f(1)}e^{bx}=\frac{1}{0}e^{x}$

$f(D)=D^3+D^2-D-1$

$f(D)=(D+1)^2(D-1)$

$\quad =g(D)(D-b)^r \qquad , r=1 \;, b=1$

$g(D)=(D+1)^2$

$g(b)=g(1)=(1+1)^2=4$

$y_p=\frac{e^{x}x^{1}}{4}=\frac{1}{4}xe^{x}$

$y=y_c+y_p$

$y=c_1e^{x}+(c_2+c_3x)e^{-x}+\frac{1}{4}xe^{x}$

ج) اذا كانت $f(x)=\sin bx$ أو $f(x)=\cos bx$

أ) نحسب الحل الخاص بالطريقة التالية وذلك بكتابة

$$y_p=\frac{1}{f(D^2)}\sin bx=\frac{1}{f(-b^2)}\sin bx$$

$$f(-b^2)\neq 0$$

وذلك بالتعويض عن كل (D^2) بـ $(-b^2)$ وعن كل (D^3) بـ $(-b^2D)$

وكذلك نفس الشيء في حالة $\cos bx$

ب) يمكن ايجاد الحل الخاص في هذه الحالة بأن نضع

$$e^{ibx}=\cos bx+i\sin bx$$

ثم نجد الحل الخاص للدالة (e^{ibx}) كما في الحالة الأولى

وبالتالي نجد الحل الخاص للدالة $(\cos bx)$ باعتبارها الجزء الحقيقي للدالة الرئيسية (e^{ibx}) والحل الخاص للدالة $(\sin bx)$ باعتبارها الجزء الخيالي للدالة الرئيسية (e^{ibx}).

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية $y''+4y=15\cos 3x$

$b=3$

$$(D^2+4)y=15\cos 3x$$

$$m^2+4=0\Rightarrow m^2=-4\Rightarrow m=\mp 2i$$

$$y_c=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

$$y_p=\frac{1}{f(D^2)}15\cos 3x=\frac{1}{f(-b^2)}15\cos 3x$$

$$=\frac{1}{f(-3^2)}15\cos 3x$$

$$f(-3^2)=-3^2+4=-9+4=-5$$

$y_p = \frac{-1}{5} \cdot 15\cos 3x = -3\cos 3x$

$y = y_c + y_p$

$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - 3\cos 3x$

طريقة ثانية:

$\because b = 3$

$y'' + 4y = 15e^{3ix} \qquad , \; b = 3i$

$y_p = \frac{1}{f(D)} 15e^{3ix} = \frac{1}{f(3i)} \cdot 15e^{3ix}$

$= \frac{1}{(3i)^2+4} \cdot 15e^{3ix} = \frac{1}{9i^2+4} \cdot 15e^{3ix}$

$= \frac{1}{-5} \cdot 15e^{3ix} = -3e^{3ix}$

$= -3(\cos 3x + i\sin 3x)$

$= \underbrace{-3\cos 3x}_{\text{الحقيقي}} - 3i\sin 3x$

$y_p = -3\cos 3x$

$y = y_c + y_p$

$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - 3\cos 3x$

ملاحظة :

في حالة التعويض عن كل (D^2) بـ ($-b^2$) ونحصل على المقام $= 0$

فإننا نستخدم صيغة أويلر .

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

مثال / حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + 4y = 8\cos 2x$$

$$(D^2+4)y = 8\cos 2x \quad , \quad m^2+4=0 \Rightarrow m = \mp 2i$$

$$y_p = \frac{1}{f(D^2)} \cdot 8\cos 2x = \frac{1}{f(-b^2)} \, 8\cos 2x$$

$$y_p = \frac{1}{f(-2^2)} \cdot 8\cos 2x = \frac{1}{-2^2+4} \cdot 8\cos 2x$$

$$= \frac{1}{0} \, 8\cos 2x$$

$$y'' + 4y = 8e^{2ix} \quad , \quad b = 2i$$

$$(D^2+4)y = 8e^{2ix}$$

$$y_p = \frac{1}{f(D)} \cdot 8e^{2ix} = \frac{1}{f(b)} \cdot 8e^{2ix}$$

$$= \frac{1}{(2i)^2+4} \cdot 8e^{2ix} = \frac{1}{0} \cdot 8e^{2ix}$$

$$y_p = \frac{e^{bx} \cdot x^r}{g(b)\, r!}$$

$F(D) = D^2 + 4 = (D+2i)(D-2i)$

$= g(D)\,(D-b)^r$

$b = 2i \quad , r = 1$

$g(D) = D + 2i$

$g(b) = b + 2i$

$g(2i) = 2i + 2i = 4i$

$y_p = \dfrac{8e^{2ix} \cdot x}{4i} = \dfrac{2x}{i} e^{2ix} * \dfrac{i}{i}$

$y_p = -2ix e^{2ix}$

$= -2ix(\cos 2x + i \sin 2x)$

$= -2ix\cos 2x + 2x \sin 2x$

$y_p = 2x \sin 2x$

$y = y_c + y_p$

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x \sin 2x$

الخميس: ١٤/٣/٢٠١٣

٣) اذا كانت $f(X)$ متعددة الحدود بـ X اي ان

$f(D)y = X^m$

حيث m عدد صحيح موجب

لايجاد الحل الخاص نكتب $\frac{1}{f(D)}$ بشكل قوى تصاعديا

الحد وتشمل D^m

$$\frac{1}{1-D} = (1-D)^{-1} = 1+D+D^2+\cdots+D^m$$

$$\frac{1}{1+D} = (1+D)^{-1} = 1-D+D^2-D^3+\cdots$$

$$\frac{1}{2-D} = \frac{1}{2(1-\frac{D}{2})} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\cdots\right)$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية $y'' + 4y = 8X^3$

$m^2+4=0 \Rightarrow m=\mp 2i$

$y_c = c_1\cos 2X + c_2\sin 2X$

$$y_p = \frac{1}{f(D)}\cdot 8X^3 = \frac{1}{D^2+4}\,8X^3$$

$$y_p = \frac{1}{4(1+\frac{D^2}{4})}\cdot 8X^3 = \frac{1}{\cancel{4}}\left(1+\frac{D^2}{4}\right)^{-1}(\overset{2}{\cancel{8}}X^3)$$

$$y_p = \left(1-\frac{D^2}{4}+\frac{D^4}{16}-\cdots\right)(2X^3)$$

$$= 2X^3 - \frac{12X}{4} + 0$$

$y_p = 2x^3 - 3x$

$y = y_c + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x^3 - 3x$

٤) اذا كانت $f(x) = e^{bx} v(x)$

حيث ان $v(x)$ هي احدى الدوال x^m أو $\cos bx$ أو $\sin bx$ فإن الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{f(D)} e^{bx} v(x)$$

$$= \frac{e^{bx}}{f(D+b)} v(x)$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$(D^2 + 2D + 5) y = x e^x$

$m^2 + 2m + 5 = 0$

$$m = \frac{-2 \mp \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \mp 2i}{2}$$

$= -1 \mp 2i$

$y_c = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

$\because b = 1$

$$y_p = \frac{e^x}{f(D+b)} x = \frac{e^x}{f(D+1)} x = e^x \cdot \frac{1}{(D+1)^2 + 2(D+1) + 5} \cdot x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2 + 2D + 1 + 2D + 2 + 5} \cdot x = e^x \frac{1}{D^2 + 4D + 8} \cdot x$$

$$= e^x \frac{1}{8\left(1 + \frac{D^2}{8} + \frac{D}{2}\right)} \cdot x = \frac{1}{8} e^x \left[1 + \left(\frac{D^2}{8} + \frac{D}{2}\right)\right]^{-1} \cdot x$$

$$= \frac{1}{8} e^{x}\left[1-\left(\frac{D^2}{8}+\frac{D}{2}\right)+\left(\frac{D^2}{8}+\frac{D}{2}\right)^2 - - -\right]x$$

$$= \frac{1}{8} e^{x}\left[x-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8} x e^{x} - \frac{1}{16} e^{x}$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{8} x e^{x} - \frac{1}{16} e^{x}$$

٥) اذا كانت $f(x) = x^m V(x)$ حيث ان $V(x)$ هي
احدى الدوال $\cos ax$, $\sin ax$
لايجاد الحل الخاص نكتب

$$y_p = \frac{1}{f(D)} x^m . V(x)$$

$$y_p = \frac{1}{f(D)} . x^m \sin ax$$

$$= \frac{1}{f(D)} x^m e^{iax}$$

$$= e^{jax} . \frac{1}{f(D+ai)} . x^m$$

وبعدها نحسب الجزء الخيالي
أما في حالة $\cos ax$ فنحسب الجزء الحقيقي .
مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية .

$$y'' + y = 4x \sin x$$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m = \mp j$$

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} . 4x \sin x$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} \cdot 4x e^{ix} = e^{ix} \frac{1}{F(D+ai)} \cdot 4x$$

$$= e^{ix} \frac{1}{F(D+i)} \cdot 4x = e^{ix} \frac{1}{(D+i)^2+1} \cdot 4x$$

$$= e^{ix} \frac{1}{D^2+2iD-x+x} \cdot 4x = e^{ix} \frac{1}{D^2+2iD} \cdot 4x$$

$$= e^{ix} \frac{1}{2iD\left(1+\frac{D}{2i}\right)} \cdot 4x = \frac{e^{ix}}{2iD}\left(1+\frac{D}{2i}\right)^{-1} \cdot 4x$$

$$= \frac{e^{ix}}{2iD}\left(1-\frac{D}{2i}+\left(\frac{D}{2i}\right)^2 - \dots\right) 4x$$

$$= \frac{e^{ix}}{2iD}\left(4x-\frac{2}{i}\right) = \frac{-ie^{ix}}{2D}\left(4x-\frac{2}{i}\right)$$

مشتقة $D = dx$

يعني تكامل $= \frac{1}{D}$

$$= \frac{-i}{2} e^{ix} \frac{1}{D}\left(4x-\frac{2}{i}\right)$$

$$= \frac{-i}{2} e^{ix} \left(2ix^2-2x\right] = e^{ix}\left(-ix^2+x\right)$$

$$= e^{ix}\left(x-ix^2\right)$$

$$= (\cos x + i\sin x)(x-ix^2)$$

$$= x\cos x - ix^2\cos x + ix\sin x + x^2\sin x$$

$$= x\cos x + x^2\sin x + ix\sin x - ix^2\cos x$$

$$= X\cos X + X^2\sin X + i(-X^2\cos X + X\sin X)$$

$$y_p = X\sin X - X^2\cos X$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1\cos X + c_2\sin X + X\sin X - X^2\cos X$$

* **معادلة أويلر:**

الصيغة العامة لمعادلة أويلر هي

$$X^n\frac{d^ny}{dX^n} + a_1X^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dX^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}X\frac{dy}{dX} + a_ny = f(X)$$

حيث $a_n, \ldots, a_2, a_1$ ثوابت

لايجاد الحل العام لهذه المعادلة نضع $X = e^t$ وبذلك تتحول المعادلة من المتغير X الى المتغير t حيث يتم التحويل بالطريقة التالية

$$X = e^t \Rightarrow t = \log X$$

$$\frac{dt}{dX} = \frac{1}{X}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dX} = \frac{1}{t}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$X\frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dt} = D_1y \quad , \quad D_1 = \frac{d}{dt} \quad , \quad D_1^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\therefore X\frac{dy}{dX} = D_1y \quad —— (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}\frac{dt}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D_1^2 - D_1)y = D_1(D_1-1)y$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D_1(D_1-1)y \quad \text{—— (2)}$$

$$x^3\frac{d^3y}{dt^3} = D_1(D_1-1)(D_1-2)y \quad \text{—— (3)}$$

$$\vdots$$

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D_1(D_1-1)(D_1-2)\ldots(D_1-n+1)y$$

الاثنين ١٨/٣/٢٠١٣

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0$$

$$x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = 0$$

let $x = e^t \Rightarrow t = \log x$

$$x^3y''' = D_1(D_1-1)(D_1-2)y$$

$$x^2y'' = D_1(D_1-1)y$$

$$xy' = D_1y$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$D_1(D_1-1)(D_1-2)y + 2D_1(D_1-1)y + D_1y - y = 0$$

$$D_1(D_1-1)(D_1-2)y + 2D_1(D_1-1)y + (D_1-1)y = 0$$

$$(D_1-1)[D_1(D_1-2) + 2D_1 + 1]y = 0$$

$$(D_1-1)[D_1^2 \cancel{-2D_1} + \cancel{2D_1} + 1]y = 0$$

$$(D_1-1)(D_1^2+1)y = 0$$

$$(m-1)(m^2+1) = 0$$

$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

$$m^2+1=0 \Rightarrow m = \mp i$$

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3e^t$$

$$y = C_1\cos(\log x) + C_2\sin(\log x) + C_3x$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$x^2 y'' - x y' + y = 12 x \log x$

let $x = e^t$, $t = \log x$

$D_1(D_1 - 1)y - D_1 y + y = 12 t e^t$

$D_1(D_1 - 1)y - (D_1 - 1)y = 12 t e^t$

$(D_1 - 1)(D_1 - 1)y = 0$

$(m-1)(m-1) = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 1$

$y_c = (c_1 + c_2 t) e^t$

$y_p = \frac{1}{F(D)} 12 t e^t = 12 e^t \frac{1}{F(D_1 + b)} t$

$= 12 e^t \frac{1}{F(D_1 + 1)} t$

$(D_1 - 1)^2 = D_1^2 - 2D_1 + 1$

$y_p = 12 e^t \frac{1}{(D_1 + 1)^2 - 2(D_1 + 1) + 1} = 12 e^t \frac{1}{D_1^2 + 2D_1 + 1 - 2D_1 ...} t$

$= 12 e^t \frac{1}{D_1^2} t$

$= 12 e^t \cdot \frac{t^3}{6} = 2 t^3 e^t$

$y = y_c + y_p = (c_1 + c_2 t) e^t + 2 t^3 e^t$

$$y = [c_1 + c_2(\log x)]x + 2(\log x)^3 x$$

تخفيض الرتبة :

تعتبر هذه الطريقة مهمة للمعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة

فإذا كان في المعادلة التفاضلية المتجانسة حل خاص معلوم فإنه من الممكن الحصول على معادلة جديدة برتبة أقل من سابقتها وتشمل الحلول المتبقية للمعادلة التفاضلية

كذلك تعتبر هذه الطريقة مهمة ايضاً للمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية اذا امكن الحصول على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وبالتالي يمكن حلها

اذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad — ①$$

حيث ان $y_1 = u(x)$ هو حل خاص للمعادلة المتجانسة التالية

$$u'' + a_1u' + a_2u = 0 \quad — ②$$

نفرض ان حل المعادلة ① هو بالصورة

$$y = uv$$

$$y' = uv' + vu'$$

$$y'' = uv'' + v'u' + vu'' + u'v'$$

$$y'' = uv'' + vu'' + 2u'v'$$

وبالتعويض عن y ومشتقاتها بالمعادلة ① نحصل على

$$uv'' + 2u'v' + vu'' + a_1(uv' + vu') + a_2uv = f(x)$$

$$uv'' + 2u'v' + vu'' + a_1uv' + a_1vu' + a_2uv = f(x)$$

$$uv'' + 2u'v' + a_1uv' + v\underbrace{(u'' + a_1u' + a_2u)}_{=0} = f(x)$$

باستخدام المعادلة ② نحصل على

$$uv'' + 2u'v' + a_1 u v' = F(x) \quad —③$$

let $v' = p$, $v'' = p'$

بالتعويض عن المعادلة ③ ينتج

$$up' + 2u'p + a_1 u p = F(x) \quad —④$$

$$up' + (2u' + a_1 u)\, p = F(x) \quad —④$$

المعادلة ④ هي معادلة خطية من الرتبة الاولى في p والتي يمكن حلها بالطرق السابقة.

مثال: اذا كانت $y_1 = x$ حلاً للمعادلة المتجانسة للمعادلة التفاضلية

$$xy'' + xy' - y = x^2 e^{-x}$$

جد الحل لهذه المعادلة.

let $y = v y_1 = vx$

$$y' = v + xv'$$
$$y'' = v' + xv'' + v'$$
$$= 2v' + xv''$$

بالتعويض عن قيم y ومشتقاتها في المعادلة الاصلية نحصل على

$$x(2v' + xv'') + x(v + xv') - vx = x^2 e^{-x} \quad \div x$$

$$2v' + xv'' + \cancel{v} + xv' - \cancel{v} = x e^{-x}$$
$$2v' + xv'' + xv' = x e^{-x}$$
$$xv'' + (2 + x)v' = x e^{-x}$$

$$v'' + \left(1 + \frac{2}{x}\right)v' = e^{-x}$$

let $v' = P$, $v'' = P'$

$P' + (1 + \frac{2}{x})P = e^{-x}$

$M(x) = e^{\int (1+\frac{2}{x})dx} = e^{x+2\ln x} = e^{x+\ln x^2} = e^{x}\cdot e^{\ln x^2}$

$= x^2 e^{x}$

$(x^2 e^{x})P = \int e^{-x}\cdot x^2 e^{x}\, dx$

$x^2 e^{x} P = \frac{x^3}{3} + c$

$P = \frac{1}{3} x e^{-x} + c x^{-2} e^{-x}$

$\int v' = \int (\frac{1}{3} x e^{-x} + c x^{-2} e^{-x})$

$v = \frac{1}{3}\int x e^{-x}\, dx + \int c x^{-2} e^{-x}\, dx$

let $u = e^{-x}$ $dv = \int x^{-2} dx$

$du = -e^{-x}$ $v = -x^{-1}$

$\int x^{-2} e^{-x} dx = -x^{-1} e^{-x} - \int x^{-1} e^{-x} dx$

let $u = x^{-1}$, $dv = e^{-x} dx$

$du = -x^{-2}$ $v = -e^{-x}$

$\int x^{-2} e^{-x} dx = -x^{-1} e^{-x} - (x^{-1} e^{-x} + \int x^{-2} e^{-x})$

يمكن انجاز هذه التكاملات باستخدام طريقة التجزئة
ان حل المعادلة هو

$y = c_1 y_1 + y_1 v$

$y = c_1 x + x(\frac{1}{3}\int x e^{-x} dx + c\int x^{-2} e^{-x} dx)$

الاثنين ٨/٤/٢٠١٣م

الفصل الخامس
تحويلات لابلاس

تعريف: يُعرف تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ و $x>0$ والذي يرمز له بالرمز $F(p)$ أو $L\{f(x)\}$ بالتكامل

حيث $p\in R$

$$F(p) = L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx \,, \quad p\in R$$

بشرط ان يكون هذا التكامل موجود.

من خواص تحويل لابلاس هي الخاصية الخطية اي انه يحقق ما يلي:

$$L\{Af(x) + Bg(x)\} = \int_0^\infty e^{-px}\left[Af(x) + Bg(x)\right]dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-px} Af(x)\,dx + \int_0^\infty e^{-px} Bg(x)\,dx$$

$$= A\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx + B\int_0^\infty e^{-px} g(x)\,dx$$

$$= A\,L\{f(x)\} + B\,L\{g(x)\}$$

$$\therefore L\{Af(x) + Bg(x)\} = A\,L\{f(x)\} + B\,L\{g(x)\}$$

ملاحظة: اذا كانت $B=0$ فإن

$$L\{Kf(x)\} = K\,L\{f(x)\}$$

تحويلات لابلاس لبعض الدوال

١) اذا كانت $f(x)=1$ و $x>0$ فإن

$$L\{f(x)\}=L\{1\}=\int_0^\infty e^{-px}\,dx=-\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{p}\ ,\quad p>0$$

$$L\{1\}=\frac{1}{p}\ ,\quad p>0$$

وبصورة عامة اذا كانت K ثابت فإن

$$L\{K\}=K.L\{1\}=\frac{K}{p}$$

٢) اذا كانت $f(x)=e^{ax}$ و a هو عدد فإن

$$L\{e^{ax}\}=\int_0^\infty e^{-px}.e^{ax}\,dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-(p-a)x}\,dx=\frac{-1}{p-a}e^{-(p-a)x}\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{p-a}\ ,\quad p>a$$

$$L\{e^{ax}\}=\frac{1}{p-a}\ ,\quad p>a$$

٣) اذا كانت $f(x)=\sin ax$ ، a عدد فإن

$$L\{\sin ax\}=\int_0^\infty e^{-px}\sin ax$$

$$=\frac{a}{p^2+a^2}\ ,\quad p>0$$

٤) اذا كانت $f(x)=\cos ax$ فإن

$$L\{\cos ax\} = \int_0^\infty e^{-px}\cos ax\,dx$$

$$= \frac{p}{p^2+a^2}\ ,\ p>0$$

٥) اذا كانت $f(x)=x^n$ و $n=1,2,3,\dots$ فإن

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}\ ,\ p>0$$

٦) اذا كانت $f(x)=\sinh ax$ و a هو عدد حقيقي فإن

$$L\{\sinh ax\} = L\left\{\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right\} = L\left\{\tfrac{1}{2}e^{ax}-\tfrac{1}{2}e^{-ax}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L\{e^{ax}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-ax}\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+a} = \frac{a}{p^2-a^2}\ ,\ p>a$$

$$\therefore L\{\sinh ax\} = \frac{a}{p^2-a^2}\ ,\ p>a$$

٧) اذا كانت $f(x)=\cosh ax$ و a عدد حقيقي فإن

$$L\{\cosh ax\} = \frac{p}{p^2-a^2}\ ,\ p>a$$