لحل هذه المعادلة بطريقة التخفيض للرتبة الاولى نكتب
هذه المعادلة بدلالة عوامل التأثير وبالشكل التالي

$$[D^2 + a_1 D + a_2]y = 0$$

$$(D - m_1)(D - m_2)y = 0$$

let $u = (D - m_2)y$

$$(D - m_1)u = 0$$

$$\frac{du}{dX} - m_1 u = 0 \quad , m(X) = e^{\int -m_1 dX} = e^{-m_1 X}$$

$$u e^{-m_1 X} = \int 0 \, dX$$

$$u e^{-m_1 X} = a$$

$$u = a e^{m_1 X}$$

$$(D - m_2)y = a e^{m_1 X}$$

$$\frac{dy}{dX} - m_2 y = a e^{m_1 X} \quad , m(X) = e^{-m_2 X}$$

$$y e^{-m_2 X} = a \int e^{m_1 X} \cdot e^{-m_2 X} dX$$

$$y e^{-m_2 X} = a \int e^{(m_1 - m_2)X} dX \quad — (3)$$

يمكن ان يكون جذرا المعادلة المميزة بثلاث حالات

1) اذا كانت جذرا المعادلة المميزة حقيقية ومختلفة

اي ان $m_1 \neq m_2$ فعند ذلك يكون حل المعادلة (3)

$$y e^{-m_2 x} = \frac{a}{m_1 - m_2} e^{(m_1 - m_2)x} + c_2$$ هو

$$y = \frac{a}{m_1 - m_2} e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + \cdots$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان و $c_1 = \frac{a}{m_1 - m_2}$

٢) اذا كان جذرا المعادلة المميزة حقيقيين ومتساويين

اي ان $m_1 = m_2 = m$

ايجاد المعادلة ③ تؤول الى :

$$y e^{-mx} = \int a \, dx$$

$$y e^{-mx} = ax + c_2$$

$$y = a x e^{mx} + c_2 e^{+mx}$$

$$y = (ax + c_2) e^{mx}$$

$$y = (c_1 x + c_2) e^{mx}$$

حيث ان c_1 و c_2 ثابتان اختياريان و $c_1 = a$

$m_1 = m_2 = m_3$ $\quad (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{mx}$

٣) اذا كان جذرا المعادلة المميزة عددين معقدين اي ان

$m_1 = a + ib$ و $m_2 = a - ib$

نعلم ان حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الدرجة الاولى

هو $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

$$y = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x}$$

$y = c_1 e^{ax} \cdot e^{ibx} + c_2 e^{ax} \cdot e^{-ibx}$

$y = e^{ax} (c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx})$

$\because e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$,

$e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx$

قوانين أويلر

$y = e^{ax} [c_1(\cos bx + i \sin bx) + c_2(\cos bx - i \sin bx)]$

$y = e^{ax} [\underbrace{(c_1 + c_2)}_{A} \cos bx + \underbrace{i(c_1 - c_2)}_{B} \sin bx]$

$y = e^{ax} [A \cos bx + B \sin bx]$

$B = i(c_1 - c_2)$, $A = c_1 + c_2$

مبرهنة :

اذا علمت المعادلة التفاضلية المتجانسة التالية

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

المشتقة المعادلة المميزة هي

$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$

١) اذا كانت جذرا المعادلة المميزة حقيقيين ومختلفين اي ان $m_1 \neq m_2$ فان الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

٢) اذا كانت جذرا المعادلة المميزة حقيقيين ومتساويين اي ان $m_1 = m_2 = m$ فان الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو :

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{mx}$$

٣) اذا كان جذرا المعادلة المميزة عددين عقديين اي ان $m_1 = a + bi$ و $m_2 = a - bi$ فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو:

$$y = e^{ax}\left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right]$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$D^2 y - 4Dy + 3y = 0$$

$$(D^2 - 4D + 3)\, y = 0$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$(m-3)(m-1) = 0$$

$$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

∴ الجذرين حقيقيين ومختلفين

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$y'' - 2y' + y = 0$

$D^2y - 2Dy + y = 0$

$(D^2 - 2D + 1)y = 0$

$m^2 - 2m + 1 = 0$

$(m-1)(m-1) = 0$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$ (الجذر مكرر)

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

$m_1 = m_2 = 1$

$y = (c_1 + c_2 X) e^{mX}$

$y = (c_1 + c_2 X) e^{X}$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$y'' + 2y' + 2y = 0$

$D^2y + 2Dy + 2y = 0$

$(D^2 + 2D + 2)y = 0$

$m^2 + 2m + 2 = 0 \quad A = 1, B = 2, C = 2$

$m = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4 \times 2}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \mp 2i}{2}$

$= -1 \mp i$

$m_1 = -1 + i$
$m_2 = -1 - i$

$$y = e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$y = e^{-x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x]$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(D-1)(D-2)(D-3)y = 0$$

$$(m-1)(m-2)(m-3) = 0$$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$
$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$
$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية.

$$(D-1)(D^2 + 2D + 2)y = 0$$
$$(m-1)(m^2 + 2m + 2) = 0$$

$m - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = 1$

$m^2 + 2m + 2 = 0$

$$m = \frac{-2 \mp \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \mp 2i}{2} = -1 \mp i$$

$m_2 = -1 + i$
$m_3 = -1 - i$

$$y = e^{-x}[A \cos x + B \sin x] + c_1 e^{x}$$

حل المعادلة التفاضلية

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0$$

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$

$$(m^3 - 1) - 3m^2 + 3m = 0$$

$$(m-1)(m^2 + m + 1) - 3m(m-1) = 0$$

$$(m-1)(m^2 + m + 1 - 3m) = 0$$

$$(m-1)(m^2 - 2m + 1) = 0$$

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = 1$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)(m-1) = 0$$

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^x$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2-2)^2 y = 0$$

$$(m^2-2)^2 = 0 \Rightarrow (m^2-2)(m^2-2) = 0$$

$$(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2}) = 0$$

$$(m-\sqrt{2})^2(m+\sqrt{2})^2 = 0$$

الجذر (مكرر)

$$m-\sqrt{2} = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = \sqrt{2}$$

$$m+\sqrt{2} = 0 \Rightarrow m_3 = m_4 = -\sqrt{2}$$

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\sqrt{2}x} + (c_3 + c_4 x)e^{-\sqrt{2}x}$$

* ايجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية الغير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

1) طريقة المعاملات الغير المحددة.

الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية الغير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة هي:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثوابت

أو

$$f(D)y = F(x)$$

$$F(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

يتكون الحل العام للمعادلة الغير المتجانسة من جزئين:

الحل العام للمعادلة المتجانسة ويسمى بالدالة المتممة أو الحل المتمم ويرمز له بالرمز y_c أو $C(x)$ مضافا اليه الحل الخاص للمعادلة الغير المتجانسة ويسمى بالتكامل الخاص

ويرمز له بالرمز y_p أو $I(X)$ وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة الغير المتجانسة هو

$$y = C(X) + I(X)$$

أو

$$y = y_c + y_p$$

ويعتمد ايجاد الحل الخاص للمعادلة الغير المتجانسة على طبيعة الدالة $f(X)$ والتي تظهر في الحالات التالية:

1) الحالة الأولى:

اذا كانت $f(X)$ دالة متعددة الحدود اي ان

$$f(X) = b_0 X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b_{n-1} X + b_n$$

عندئذ نفرض الحل الخاص وهو ايضاً متعددة الحدود درجتها مساوية لدرجة $f(X)$ اي ان

$$y_p = C_0 X^n + C_1 X^{n-1} + \cdots + C_{n-1} X + C_n$$

ثم نحاول ايجاد معاملات متعددة الحدود المفروضة اي ايجاد $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$3y'' - 5y' - 2y = 6X^2 - 7$$

$$3m^2 - 5m - 2 = 0$$

$$(3m+1)(m-2) = 0$$

$$3m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1}{3}$$

$$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{3}X} + c_2 e^{2X}$$

$$y_p = AX^2 + BX + C$$

$y' = 2AX + B$

$y'' = 2A$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على .

$6A - 5(2AX + B) - 2(AX^2 + BX + C) = 6X^2 - 7$

$6A - 10AX - 5B - 2AX^2 - 2BX - 2C = 6X^2 - 7$

$-2AX^2 + (-10A - 2B)X + (6A - 5B - 2C) = 6X^2 - 7$

معامل X^2 : $-2A = 6 \Rightarrow A = -3$

معامل X : $-10A - 2B = 0$

$30 = 2B \Rightarrow B = 15$

معامل الحد الخالي من X : $6A - 5B - 2C = -7$

$-18 - 75 - 2C = -7$

$-93 - 2C = -7$

$-93 + 7 = 2C$

$-86 = 2C \Rightarrow C = -43$

بالتعويض في y_p نحصل على

$y_p = -3X^2 + 15X - 43$

$y = y_c + y_p$

$y = C_1 e^{-3X} + C_2 e^{2X} - 3X^2 + 15X - 43$

الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة

٢) الحالة الثانية :

اذا كانت $r(x) = b\,e^{ax}$

في هذه الحالة نجد المعادلة المميزة

لايجاد الحل الخاص نلاحظ ما يلي.

- اذا لم تكن a أحد جذور المعادلة المميزة فعند ذلك نفرض الحل الخاص للمعادلة الغير المتجانسة بالشكل التالي

$$y_p = A e^{ax}$$

- أما اذا كانت a احد جذور المعادلة المميزة وغير مكررة فعند ذلك نفرض الحل الخاص للمعادلة الغير المتجانسة بالشكل التالي.

$$y_p = Ax e^{ax}$$

- أما اذا كانت a أحد جذور المعادلة المميزة ومكررة n من المرات فعند ذلك نفرض الحل الخاص للمعادلة الغير المتجانسة بالشكل التالي

$$y_p = Ax^n e^{ax}$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$3y'' - 5y' - 2y = 5e^{3x} \quad , \quad a = 3$$

$$(3D^2 - 5D - 2)y = 5e^{3x}$$

$$(3m+1)(m-2) = 0$$

$$3m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$$m-2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{2x}$$

$\because a=3$ ليست من جذور المعادلة

نفرض ان

$$y_p = A e^{3x}$$

$y' = 3Ae^{3x}$

$y'' = 9Ae^{3x}$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$27Ae^{3x} - 15Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 5e^{3x}$

$10Ae^{3x} = 5e^{3x}$

$10A = 5 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$y_p = \frac{1}{2}e^{3x}$

$y = y_c + y_p$

$y = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$(D^2 - 9)y = e^{3x}$

$m^2 - 9 = 0$

$(m-3)(m+3) = 0$

$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

$m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$

$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$

$\because a = 3$

هو احد جذور المعادلة المميزة وغير مكرر

$y_p = Axe^{3x}$

$y' = 3Axe^{3x} + Ae^{3x}$

$y'' = 9Axe^{3x} + 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x}$

$= 9Axe^{3x} + 6Ae^{3x}$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$9Axe^{3x} + 6Ae^{3x} - 9Axe^{3x} = e^{3x}$$

$$6Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

بالتعويض في y_p نحصل على

$$y_p = \frac{1}{6}xe^{3x}$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{6}xe^{3x}$$

الحالة الثالثة :

اذا كانت $f(x) = b\cos ax$

$f(x) = b\sin ax$

لايجاد الحل الخاص نلاحظ ما يلي

- اذا لم يكن ai احد جذور المعادلة المميزة عند ذلك نفرض الحل الخاص

$$y_p = A\cos ax + B\sin ax$$

- أما اذا كانت ai أحد جذور المعادلة المميزة وغير مكرر عند ذلك نفرض الحل الخاص هو

$$y_p = x(A\cos ax + B\sin ax)$$

- واذا كانت ai أحد جذور المعادلة المميزة ومكرر n من المرات فعند ذلك نفرض الحل الخاص هو:-

$$y_p = x^n(A\cos ax + B\sin ax)$$

حيث A و B مجهولات ويتطلب ايجادهما بالتعويض عن y واشتقاقاتها

في المعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال حل المعادلة التفاضلية التالية :.

$3y'' - 5y' - 2y = 4\sin 2x \quad , \quad ai = 2i$

$3m^2 - 5m - 2 = 0$

$(3m+1)(m-2) = 0$

$3m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1}{3}$

$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} + c_2 e^{2x}$

∴ $ai = 2i$ ليست من جذور المعادلة المميزة

∴ نفرض الحل الخاص $\quad y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$

$y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$-12A\cos 2x - 12B\sin 2x + 10\sin 2x - 10B\cos 2x - 2A\cos 2x$

$-2B\sin 2x = 4\sin 2x$

$(-12A - 10B - 2A)\cos 2x + (-12B + 10A - 2B)\sin 2x = 4\sin 2x$

$-14A - 10B = 0 \quad — ① \quad \div 2$

$-14B + 10A = 4 \quad — ② \quad \div 2$

$-7A - 5B = 0 \Rightarrow 7A = -5B \Rightarrow A = \frac{-5}{7}B$

$-7B + 5A = 2 \quad — ③$

بالتعويض عن قيمة A في ③ نحصل على

$-7B - \frac{25}{7}B = 2$

$-49B - 25B = 14$

$$-74B = 14 \Rightarrow B = \frac{-14}{74} = \frac{-7}{37}$$

$$A = \frac{-5}{7} \cdot \frac{-7}{37} = \frac{5}{37}$$

$$y_p = \frac{5}{37}\cos 2x - \frac{7}{37}\sin 2x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{3}x} + C_2 e^{2x} + \frac{5}{37}\cos 2x - \frac{7}{37}\sin 2x$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x$$

$$m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = -4 \Rightarrow m = \mp 2i$$

$$y_c = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

بما أن $2i = ai$ وتساوي أحد جذور المعادلة المميزة
نفرض الحل الخاص

$$y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

$$y_p = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$$

$$y' = -2Ax\sin 2x + A\cos 2x + 2Bx\cos 2x + B\sin 2x$$

$$y'' = -4Ax\cos 2x - 2A\sin 2x - 2A\sin 2x - 4Bx\sin 2x + 2B\cos 2x + 2B\cos 2x$$

$$y'' = -4Ax\cos 2x - 4A\sin 2x - 4Bx\sin 2x + 4B\cos 2x$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$-4Ax\cos 2x - 4A\sin 2x - 4Bx\sin 2x + 4B\cos 2x + 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = \cos 2x$$

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \cos 2x$$

$$-4A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \frac{1}{4}x\sin 2x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$$

الحل العام للمعادلة غير المتجانسة .

الحالة الرابعة :

اذا كانت $f(x) = b x^n e^{cx}\cos ax$

أو $f(x) = b x^n e^{cx}\sin ax$

نفرض الحل الخاص في هذه الحالة :

$$y_p = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n)e^{cx}\cos ax + (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n)e^{cx}\sin ax$$

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' - 4y' + 5y = x^2 e^{2x} \sin x$$

$$m^2 - 4m + 5 = 0$$

$$m = \frac{4 \mp \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \mp 2i}{2} = \overset{a}{2} \mp \overset{b}{i}$$

$$y_c = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$$

$$y_p = (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^{2x}\cos x + (B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{2x}\sin x$$

ثم نشتق ونكمل الحل:

٢) طريقة تغيير الثوابت:

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد الحل الخاص لأي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ويفضل اتباع هذه الطريقة عندما لا تكون $f(x)$ واحدة من الحالات الاربعة المذكورة في الطريقة السابقة.

وتتميز هذه الطريقة بتغيير الثوابت الاختيارية في الحل المتمم الى دوال في المتغير (x) ومن ثم نحاول ايجاد هذه الدوال

لتكن ① $\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y = f(x)$

معادلة تفاضلية غير متجانسة من الرتبة الثانية.

نفرض الدالة المتممة للمعادلة ① هي $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$

حيث y_1 و y_2 هي حلول المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة ①

الآن نفرض الحل الخاص للمعادلة ① هو:

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2$$

$$y_p' = v_1y_1' + v_1'y_1 + v_2y_2' + v_2'y_2$$

الشرط الضروري لكي يكون للمعادلة ① حل هو

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \quad —— ①$$

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2'$$

$$y_p'' = v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2'$$

بالتعويض عن y و y' و y'' في المعادلة التفاضلية ① نحصل على

$$(v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2') + a_1(v_1 y_1' + v_2 y_2') + a_2(v_1 y_1 + v_2 y_2) = f(x)$$

$$v_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + v_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + (v_1' y_1' + v_2' y_2') = f(x)$$

$$0 + 0 + v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \quad —— ②$$

ثم نجد الأولى بحل المعادلتين ① و ② نحصل على

$$v_1' = \frac{-y_2}{w} f(x) \quad , \quad v_2' = \frac{y_1}{w} f(x)$$

حيث أن $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ هو محدد فرونسكي

$$v_1 = \int \frac{-y_2}{w} f(x)\, dx \quad , \quad v_2 = \int \frac{y_1}{w} f(x)\, dx$$

حل المعادلة التفاضلية التالية $(D^2+4)y = \sec 2x$

$m^2+4=0 \Rightarrow m^2=-4 \Rightarrow m=\mp 2i$

$y_c = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$y_1 = \cos 2x \quad , y_2 = \sin 2x \; , \; f(x) = \sec 2x$

نفرض الحل الخاص بالشكل التالي

$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$

$y_p = v_1 \cos 2x + v_2 \sin 2x$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$$v_1 = \int -\frac{y_2}{W} f(x)\,dx = \int -\frac{\sin 2x}{2} \sec 2x \,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\,dx$$

$$v_1 = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|$$

$$v_2 = \int \frac{y_1}{W} f(x)\,dx = \int \frac{\cos 2x}{2} \cdot \sec 2x \,dx = \frac{x}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$$

$y = y_c + y_p$

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$$(D^2 + 4D + 4)\, y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

$m^2 + 4m + 4 = 0$

$(m+2)(m+2) = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -2$

$$y_c = (c_1 + c_2 x)\, e^{-2x} = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = x e^{-2x}$, $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2}$

نفرض الحل الخاص بالشكل التالي :

$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & x e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2x e^{-2x} + e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$w = \cancel{-2x e^{-4x}} + e^{-4x} + \cancel{2x e^{-4x}} = e^{-4x}$$

$$v_1 = \int \frac{-y_2}{w} f(x)\, dx = \int \frac{-x e^{-2x}}{e^{-4x}} \cdot \frac{e^{-2x}}{\cancel{x}^2}\, dx$$

$$= \int \frac{-1}{x}\, dx = -\ln x$$

$$v_2 = \int \frac{y_1}{w} f(x)\, dx = \int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}} \cdot \frac{e^{-2x}}{x^2}\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \int x^{-2}\, dx = -\frac{1}{x}$$

$$y_p = -\ln x\, e^{-2x} - e^{-2x}$$

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - \ln x\, e^{-2x} - e^{-2x}$$

٣) طريقة المؤثر: (المؤثر العكسي)

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية الغير متجانسة ذات المعاملات الثابتة من الرتبة n هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = f(x)$$

أو بدلالة المؤثر

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n) y = 0$$

أو

$$F(D)\, y = f(x) \quad \text{—} \; ①$$

وعليه فالحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$y = \frac{1}{F(D)} f(x)$$

الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة $f(x)$ هي

1) اذا كانت $f(x) = e^{bx}$ فإن الحل الخاص للمعادلة ① هو

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{bx} = \frac{1}{F(b)} e^{bx}, \quad F(b) \neq 0$$

* حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{x}$$

$$(D^2 - 5D + 6)\, y = e^{x}$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-3) = 0$$