ملاحظة حدان ⇐ قوسان $(p+y)\frac{dp}{dy}=0$ — أو اكثر

ثلاثة حدود ⇐ فصل متغيرات $\frac{1}{p}=(2y+3p)\frac{dp}{dx}$

اربعة حدود ⇐ تحليل بالتجزئة

$$\frac{dp}{dy}\left(2p-\frac{y}{p^2}\right)=0$$

$$2p-\frac{y}{p^2}=0$$

$$2p=\frac{y}{p^2}$$

$$2p^3=y \Rightarrow p^3=\frac{1}{2}y \Rightarrow p=\left(\frac{1}{2}y\right)^{1/3}$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$\left(\frac{1}{2}y\right)^{1/3}x=y+\frac{1}{2}y$$ الحل المفرد

$$\frac{dp}{dy}=0 \Rightarrow dp=0 \Rightarrow p=c$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$cx=y+c^3$$ الحل العام

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$4px-2y=p^3y^2$$

$$4px=p^3y^2+2y$$

$$x=\frac{p^2y^2}{4}+\frac{y}{2p}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{4}\left(p^2\cdot 2y+y^2\cdot 2p\frac{dp}{dy}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{p\cdot 1-y\cdot\frac{dp}{dy}}{p^2}\right)$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}p^2y+\frac{1}{2}y^2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{2p}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{2}p^2y+\frac{1}{2}y^2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{2p}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}-\frac{1}{p}=0$$

$$\frac{-1}{2p}+\frac{1}{2}p^2y+\frac{1}{2}y^2p\frac{dp}{dy}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}=0$$

$$\frac{1}{2}\left(p^2 y - \frac{1}{p}\right) + \frac{y}{2p}\frac{dp}{dy}\left(p^2 y - \frac{1}{p}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(p^2 y - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

$$\left(p^2 y - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

إما $p^2 y - \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow p^2 y = \frac{1}{p} \Rightarrow p^3 y = 1$

$$p^3 = \frac{1}{y} \Rightarrow p = \left(\frac{1}{y}\right)^{1/3}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$4x\left(\frac{1}{y}\right)^{1/3} - 2y = \left(\left(\frac{1}{y}\right)^{1/3}\right)^3 y^2$$

$$4x\left(\frac{1}{y}\right)^{1/3} - 2y = \frac{1}{y} \cdot y^2$$ الحل المنفرد

أو $1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow p\,dy + y\,dp = 0$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\ln y + \ln p = \ln c$$

$$yp = c \Rightarrow p = \frac{c}{y}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$4x\left(\frac{c}{y}\right) - 2y = \left(\frac{c}{y}\right)^3 * y^2$$ الحل العام

أو طريقة أخرى للحل

$$-\frac{1}{p} + p^2 y + y^2 p\frac{dp}{dy} - \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0$$

$$p\left(py - \frac{1}{p^2}\right) + y\left(yp - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\left(py - \frac{1}{p^2}\right)\left(p + y\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

الخميس : ١ / ١٢ / ٢٠١٢

معادلة كليروت :
وهي معادلة تفاضلية بالشكل

$$y = PX + f(P)$$

يمكن حلها باجراء التفاضل بالنسبة لـ X

$$\frac{dy}{dX} = P.1 + X\frac{dP}{dX} + \acute{f}(P).\frac{dP}{dX}$$

$$\cancel{P} = \cancel{P} + X\frac{dP}{dX} + \acute{f}(P)\frac{dP}{dX}$$

$$X\frac{dP}{dX} + \acute{f}(P)\frac{dP}{dX} = 0$$

$$\frac{dP}{dX}\left(X + \acute{f}(P)\right) = 0$$

اما $\frac{dP}{dX} = 0 \Rightarrow P = C$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على الحل العام

$$y = CX + f(C)$$

البت ان $y = CX + f(C)$ هو حل عام لمعادلة كليروت

او $X + \acute{f}(P) = 0$

ثم نحذف P من هذه العلاقة والمعادلة الاصلية لنحصل على الحل المنفرد

مثال حل المعادلة التفاضلية

$$y = PX + P^2$$

$$\frac{dy}{dX} = P.1 + X.\frac{dP}{dX} + 2P\frac{dP}{dX}$$

$$\cancel{P} = \cancel{P} + X.\frac{dP}{dX} + 2P\frac{dP}{dX}$$

$$X.\frac{dP}{dX} + 2P.\frac{dP}{dX} = 0$$

$$\frac{dP}{dX}(X+2P)=0$$

إما $\frac{dP}{dX}=0 \Rightarrow P=c$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$y=cX+c^2$ الحل العام

أو $X+2P=0 \Rightarrow 2P=-X \Rightarrow P=-\frac{1}{2}X$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$y=\left(-\frac{1}{2}X\right)X+\left(-\frac{1}{2}X\right)^2$$

$y=-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{4}X^2$ الحل المتفرد

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية.

$$X-2P-\log P=0$$

$$X=2P+\log P$$

$$\frac{dX}{dy}=2\frac{dP}{dy}+\frac{1}{P}\frac{dP}{dy}$$

$$\frac{1}{P}=\frac{dP}{dy}\left(2+\frac{1}{P}\right)$$

$$\int dy=\int(2P+1)\,dP$$

$$\left.\begin{aligned} y&=P^2+P+c \\ X&=2P+\log P \end{aligned}\right\}$$ تمثلان الحل العام

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة

المعادلة الخطية :

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(y) = f(x) \quad (1)$$

حيث

$a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ دوال مستمرة في x

اذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثوابت فإن المعادلة (1) تسمى معادلة خطية ذات معاملات ثابتة.

اذا كانت $f(x) = 0$ فإن المعادلة (1) تسمى معادلة تفاضلية خطية متجانسة واذا كانت $f(x) \neq 0$ فانها تسمى معادلة غير متجانسة.

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad (2)$$

مبرهنة :

اذا كانت الدوال $y_1, y_2, \ldots, y_n$ حلول المعادلة التفاضلية المتجانسة (2) وكانت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت فإن

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

وهو ايضاً حل المعادلة (2).

البرهان : (غير مطلوب ٢٠٢٢-٢٠٢١)

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy_1}{dx} + a_n y_1 = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy_2}{dx} + a_n y_2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n y_n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy_n}{dx} + a_n y_n = 0 \quad (2.n)$$

نضرب المعادلة الأولى (2.1) بـ C_1 والمعادلة (2.2) بـ C_2 الى المعادلة (2.n) بـ C_n ثم نجمع الحدود المتشابهة نحصل على

$$\frac{d^n}{dx^n}(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n)$$

$$+ \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dx}(c_1y_1 + \cdots + c_ny_n) + a_n(c_1y_1 + \cdots + c_ny_n) = 0$$

∴ نستنتج بأن

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

هو الحل لأنه يحقق المعادلة التفاضلية.

الدوال المستقلة خطياً والدوال المرتبطة خطياً.

تعريف:- يقال للدوال $y_1, y_2, \ldots, y_n$ انها مرتبطة خطياً في الفترة المفتوحة I اذا وجدت ثوابت $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ليست كلها مساوية للصفر بحيث أن $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0$

ويقال للدوال $y_1, y_2, \ldots, y_n$ بأنها مستقلة خطياً بالفترة المفتوحة I اذا وجدت ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ بحيث ان

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

أثبت ان الدوال $e^x , 3e^x$ ، $y_1 = e^x$ ، $y_2 = 3e^x$ مرتبطة خطياً.

$c_1 e^x + c_2(3e^x) = 0$

$W(e^x, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & 3e^x \\ e^x & 3e^x \end{vmatrix}$

$c_1 = -1 , \quad c_2 = \frac{1}{3}$

$= 3e^{2x} - 3e^{2x} = 0$

∴ الدوال مرتبطة خطياً

$c_1 = -3 , \quad c_2 = 1$

مثال اثبت ان الدوال $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ مرتبطة خطياً

$c_1 \sin^2 x + c_2 \cos^2 x + c_3 = 0$

$c_1 = 1 , \quad c_2 = 1 , \quad c_3 = -1$, أو $c_1 = -1 , c_2 = -1 , c_3 = 1$

$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - 1 = 0$

$1 - 1 = 0$

عند القيم [$c_3 = -1 , c_2 = 1 , c_1 = 1$] الدوال مرتبطة خطياً.

اثبت ان الدالتان e^x , e^{2x} مستقلتان خطياً:

نشتق بقدر عدد الدوال $- 1$

$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$

$c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0$ — ①

$c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} = 0$ — ②

نطرح ② من ① نحصل على

$c_2 e^{2x} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

بالتعويض في ① نحصل على

$c_1 e^x + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$c_1 = 0 , \quad c_2 = 0$

∴ الدالتان e^x , e^{2x} مستقلة خطياً.

مثال: اثبت ان الدوال X, X^2, X^3 مستقلة خطياً.

$$C_1X + C_2X^2 + C_3X^3 = 0 \quad — ①$$

$$C_1 + 2C_2X + 3C_3X^2 \quad — ②$$

$$2C_2 + 6C_3X \quad — ③$$

من المعادلة ③ نحصل على

$$2C_2 = -6C_3X \Rightarrow C_2 = -3C_3X$$

بالتعويض في المعادلة ② نحصل على

$$C_1 - 6C_3X^2 + 3C_3X^2 = 0$$

$$C_1 - 3C_3X^2 = 0 \Rightarrow C_1 = 3C_3X^2$$

بالتعويض في المعادلة الاولى نحصل على

$$\cancel{3C_3X^3} - \cancel{3C_3X^3} + C_3X^3 = 0$$

$$C_3 = 0$$

$$C_2 = 0 \;,\; C_1 = 0$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

∴ الدوال مستقلة خطياً

الأحد: ١٦/١٢/٢٠١٢

محدد رونسكي: نعرف محدد رونسكي لـ n من الدوال $y_1, y_2, \dots, y_n$ القابلة للاشتقاق حتى الرتبة $(n-1)$ في الفترة المفتوحة I بالشكل التالي $I=(-\infty,\infty)$

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مبرهنة:

اذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ حلول المعادلة المتجانسة (2) فإن الشرط الضروري والكافي لكي تكون $y_1, \dots, y_n$ مرتبطة خطياً بالفترة المفتوحة I هو

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

مبرهنة:

لتكن $a_0, \dots, a_n$ دوال مستمرة في الفترة المفتوحة I لكل $x \in I$ فإن الحلول $y_1, y_2, \dots, y_n$ للمعادلة التفاضلية المتجانسة (2) تكون مستقلة خطياً في الفترة I اذا وفقط اذا كان المحدد

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

مثال: بيّن ان الدوال $e^x, 2e^x, e^{-x}$ مرتبطة خطياً في الفترة المفتوحة $(-\infty,\infty)$

$$W(e^{-x}, 2e^x, e^x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & 2e^x & e^x \\ -e^{-x} & 2e^x & e^x \\ e^{-x} & 2e^x & e^x \end{vmatrix} = 0$$

$\because$ الصف الاول = الصف الثالث فإن المحدد يساوي صفر

$\therefore$ الدوال $e^x, 2e^x, e^{-x}$ مرتبطة خطياً

قيمة المحدد تساوي صفر وذلك لتطابق الصفين الاول والثالث
(خواص المحدد).

اثبت ان $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ هما حلان مستقلان خطياً للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$y_1 = \cos x$$
$$y_1' = -\sin x$$
$$y_1'' = -\cos x$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$-\cos x + \cos x = 0$$
$$0 = 0$$

$\therefore$ y_1 هو حل للمعادلة

$$y_2 = \sin x$$
$$y_2' = \cos x$$
$$y_2'' = -\sin x$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية (1) نحصل على

$$-\sin x + \sin x = 0$$
$$0 = 0$$

$\therefore$ هو حل للمعادلة y_2

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

$\therefore$ الدوال مستقلة خطياً.

ملاحظة:
لا نستخدم المبرهنة الاخيرة لاختبار الدوال المستقلة خطياً ما لم تكن الدوال حلول للمعادلة المتجانسة (2)

المؤثر D :-

يستخدم الرمز D في المعادلات التفاضلية ليمثل اشتقاقات دالة بالنسبة الى المتغير المستقل فمثلاً اذا كان المتغير المستقل هو X فان $D = \frac{d}{dX}$ وعلى هذا يمكن كتابة المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (٩) بدلالة المؤثر D وبالشكل التالي .

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

أو

$$F(D) y = 0$$

حيث

$$F(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

كذلك يمكن التعبير عن الدالة $F(D)$. بدلالة عواملها الاولية وبالشكل التالي

$$F(D) = (D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_n)$$

خواص المؤثر:

اذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق و m, n اعداد صحيحة موجبة فإن

1) $D^m f(x) + D^n f(x) = D^n f(x) + D^m f(x)$

2) $D^m D^n f(x) = D^n D^m f(x) = D^{m+n} f(x)$

3) $D^n \{f(x) \mp g(x)\} = D^n f(x) \mp D^n g(x)$

4) $D^n (c f(x)) = c D^n f(x)$ اذا كان c ثابت فان

امثلة على الخواص.

1) $D^2 e^{2X} + D e^{2X}$
$= 4e^{2X} + 2e^{2X} = 6e^{2X}$

2) $D^2 D e^{2X} = D^3 e^{2X} = 8e^{2X}$

3) $D^2 \{2X + \sin X\} = D^2(2X) + D^2 \sin X$
$= 0 - \sin X = -\sin X$

4) $D(5\tan X) = 5D(\tan X) = 5\sec^2 X$

خواص مؤثر متعدد الحدود.

ليكن $F(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$
مؤثر متعدد الحدود

مبرهنة:

اذا كانت b عدد فإن
$F(D) e^{bX} = F(b) e^{bX}$

البرهان:

$F(D) = (D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)$

$F(D) e^{bX} = D^n e^{bX} + a_1 D^{n-1} e^{bX} + \cdots + a_{n-1} D e^{bX} + a_n e^{bX}$ — ⊛

$D e^{bX} = b e^{bX}$

$D^2 e^{bX} = b^2 e^{bX}$

$\vdots \qquad \vdots$

$D^n e^{bX} = b^n e^{bX}$

بالتعويض في ⊛ نحصل على

$F(D) e^{bX} = b^n e^{bX} + a_1 b^{n-1} e^{bX} + \cdots + a_{n-1} b e^{bX} + a_n e^{bX}$
$= (b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1} b + a_n) e^{bX}$
$F(D) e^{bX} = F(b) e^{bX}$

مثال: جد $(D^2+1)^2 e^{2X}$

$F(D)e^{bx} = F(b)e^{bx}$

$b=2$

$F(D) = (D^2+1)^2$

$F(b) = (b^2+1)^2$

$F(2) = (2^2+1)^2 = (4+1)^2 = 25$

$(D^2+1)^2 e^{2X} = 25 e^{2X}$

مبرهنة:

اذا كانت y دالة قابلة للاشتقاق وb عدد حقيقي

$F(D)\{e^{bX}y\} = e^{bX} F(D+b)y$

البرهان:

$F(D)(e^{bX}y) = (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n)(e^{bX}y)$

$= D^n(e^{bX}y) + a_1 D^{n-1}(e^{bX}y) + \dots + a_{n-1}D(e^{bX}y) + a_n e^{bX}y$ ⊛

$D(e^{bX}y) = e^{bX}Dy + be^{bX}y$

$D(e^{bX}y) = e^{bX}(D+b)y$

$D^2(e^{bX}y) = e^{bX}(D+b)(D+b)y = e^{bX}(D+b)^2 y$

$\vdots$

$D^n(e^{bX}y) = e^{bX}(D+b)^n y$

بالتعويض في المعادلة ⊛ نحصل على:

$F(D)(e^{bX}y) = e^{bX}(D+b)^n y + a_1 e^{bX}(D+b)^{n-1}y + \dots + a_{n-1}e^{bX}(D+b)y$
$+ a_n e^{bX}y$

$$= e^{bx}\left[(D+b)^n + a_1(D+b)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(D+b) + a_n\right]y$$

$$= e^{bx} f(D+b)y$$

$$\therefore F(D)(e^{bx}y) = e^{bx} F(D+b)y$$

مثال جد

$$\underbrace{(D^2-5D+6)}_{F(D)} x e^x$$

$b=1,\ y=x$

$$F(D+b) = F(D+1) = (D+1)^2 - 5(D+1) + 6$$

$$= D^2 + 2D + 1 - 5D - 1 + 6$$

$$F(D+b) = D^2 - 3D + 2$$

$$(D^2-5D+6)xe^x = e^x(D^2-3D+2)x$$

$$= e^x(xD^2 - 3Dx + 2x)$$

$$= e^x(0 - 3 + 2x)$$

$$= (-3+2x)e^x = -3e^x + 2xe^x$$

مبرهنة : اذا كان b عدد ثابت فإن

$$F(D^2)\sin bx = f(-b^2)\sin bx$$

$$F(D^2)\cos bx = f(-b^2)\cos bx$$

البرهان :

$$F(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

$$F(D^2) = (D^{2n} + a_1 D^{2(n-1)} + \cdots + a_{n-1} D^2 + a_n)\sin bx$$

$$F(D^2)\sin bx = D^{2n}\sin bx + a_1 D^{2(n-1)}\sin bx + \cdots + a_{n-1} D^2 \sin bx + a_n \sin bx \quad (*)$$

$$D^2 \sin bx = (-b^2)\sin bx \qquad D^2 \cos bx = (-b^2)\cos bx$$

$$D^4 \sin bx = (-b^2)^2 \sin bx \qquad D^4 \cos bx = (-b^2)^2 \cos bx$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$D^{2n}\sin bx = (-b^2)^n \sin bx \qquad D^{2n}\cos bx = (-b^2)^n \cos bx$$

بالتعويض في معادلة (*) نحصل على

$$F(D^2)\sin bx = (-b^2)^n \sin bx + (-b^2)^{n-1} a_1 \sin bx + \cdots + a_{n-1}(-b^2)\sin bx + a_n \sin bx$$

$$F(D^2)\sin bx = \left[(-b^2)^n + a_1(-b^2)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(-b^2) + a_n\right]\sin bx$$

$$F(D^2)\sin bx = f(-b^2)\sin bx$$

حل $(D^4+3D^2-1)\sin 2X$

لو كان D^3

$D^2 . D$

$(-b^2)D$

$b=2$

$F(D)=D^4+3D^2-1$

$F(D^2)=(D^2)^2+3D^2-1$

$F(-b^2)=(-b^2)^2+3(-b^2)-1$

$F(-2^2)=(-2^2)^2+3(-2^2)-1$

$=16-12-1=3$

$(D^4+3D^2-1)\sin 2X=3\sin 2X$

حل $(D^4+3D^2-1)\cos 2X$

$b=2$

$F(D)=D^4+3D^2-1$

$F(D^2)=(D^2)^2+3D^2-1$

$F(-b^2)=(-b^2)^2+3(-b^2)-1$

$F(-2^2)=(-2^2)^2+3(-2^2)-1$

$=16-12-1=3$

$F(D^2)\cos bX=F(-b^2)\cos bX$

$(D^4+3D^2-1)\cos 2X=3\cos 2X$

حل المعادلات التفاضلية الخطية بتخفيضها الى الرتبة الاولى:
الصيغة العامة للمعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة هي

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

حيث a_1 و a_2 و ...... a_n هي ثوابت والتي يمكن كتابتها بصيغة المؤثر بالشكل التالي

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = F(x)$$

أو بدلالة عواملها الخطية اي بالصيغة

$$(D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_n) y = F(x) \quad \text{--- } ①$$

نفرض ان

$$u_1 = (D - m_2)(D - m_3) \cdots (D - m_n) y$$

عند ذلك تتحول المعادلة ① من الرتبة n الى معادلة خطية من الرتبة الاولى

$$(D - m_1) u_1 = F(x)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل

$$\frac{du_1}{dx} - m_1 u_1 = F(x) \quad \text{--- } ②$$

المعادلة ② معادلة خطية من الرتبة الاولى وعامل التكامل هو

$$e^{-m_1 x}$$

فإذا ضربنا المعادلة ② بعامل التكامل فسوف نحصل على

$$u_1 e^{-m_1 x} = \int e^{-m_1 x} F(x)\, dx$$

$$u_1 = e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} F(x)\, dx$$

ثم نعوض عن u_1 بقيمتها الاصلية فتصبح

$$(D - m_2)(D - m_3) \cdots (D - m_n) y = e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} F(x)\, dx \quad \text{--- } ③$$

نفرض

$$u_2 = (D-m_3)(D-m_4)\dots(D-m_n)y$$

ونعوضها في المعادلة ③ فتصبح

$$(D-m_2)u_2 = e^{m_1x}\int e^{-m_1x} f(x)\,dx \quad —— ④$$

المعادلة ④ معادلة خطية من الرتبة الاولى وعامل تكاملها هو

e^{-m_2x} نضرب المعادلة ④ بعامل التكامل فينتج

$$u_2 e^{-m_2x} = \int e^{-m_2x}\left[e^{m_1x}\int e^{-m_1x} f(x)\,dx\right]dx$$

$$u_2 = e^{m_2x}\left[\int e^{-m_2x}\left[e^{m_1x}\int e^{-m_1x} f(x)\,dx\right]dx\right]$$

ويمكن الاستمرار بهذه الطريقة الى ان نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية بصيغتها العامة .

$$y = e^{m_nx}\int e^{-m_nx}\cdot e^{m_{n-1}x}\int\dots\int e^{-m_1x} f(x)\,dx\dots dx$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية بتخفيضها الى الرتبة الاولى .

$$y'' - 6y' + 8y = e^x$$

$$(D^2 - 6D + 8)y = e^x$$

$$(D-4)\underbrace{(D-2)y} = e^x$$ نفرض القوس الثاني

$$\text{Let } (D-2)y = u_1$$

$$(D-4)u_1 = e^x$$

$$\frac{du_1}{dx} - 4u_1 = e^x$$

$$M(x) = e^{\int -4\,dx} = e^{-4x}$$

$$u_1 e^{-4x} = \int e^{-4x} \cdot e^{x}\,dx$$

$$u_1 e^{-4x} = \int e^{-3x}\,dx = \frac{-1}{3} e^{-3x} + C_1$$

$$u_1 = \frac{-1}{3} e^{x} + C_1 e^{4x}$$

$$(D-2)y = \frac{-1}{3} e^{x} + C_1 e^{4x}$$

$$\frac{dy}{dx} - 2y = \left(\frac{-1}{3} e^{x} + C_1 e^{4x}\right)$$

$$M(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$$

$$y e^{-2x} = \int e^{-2x} \left(\frac{-1}{3} e^{x} + C_1 e^{4x}\right) dx$$

$$y e^{-2x} = \int \left(\frac{-1}{3} e^{-x} + C_1 e^{2x}\right) dx$$

$$y e^{-2x} = \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{1}{2} C_1 e^{2x} + C_2$$

$$y = \frac{1}{3} e^{x} + \frac{1}{2} C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$$ الحل العام

أول محاضرة بعد نصف السنة

الخميس : ٢١ / ٢ / ٢٠١٣

حل المعادلات الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هي :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \quad \text{—— (1)}$$

حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثوابت

كذلك يمكن كتابتها بالشكل

$$[D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n] y = 0$$

أو بدلالة عوامل التأثير

$$(D - m_1)(D - m_2) \cdots (D - m_n) y = 0$$

أو

$$F(D) y = 0$$

تسمى المعادلة الجبرية

$$F(m) = (m - m_1)(m - m_2) \cdots (m - m_n) = 0$$

بالمعادلة المساعدة

أو المعادلة $m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$

فإنها تمثل المعادلة المميزة للمعادلة (1)

لكي نجد الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة ينبغي أن نعتمد طريقة التخفيض للرتبة الأولى وللإعطاء طريقة عامة لحل مثل هذا النوع من المعادلات نتناول

1) معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الثانية أولاً وحينئذٍ نقوم بتعميمها بعد ذلك للرتبة n

الصيغة العامة للمعادلة الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة هي :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 \quad \text{—— (2)}$$

حيث a_1 و a_2 ثوابت

نحل هذه المعادلة بطريقة التخفيض للرتبة الاولى نكتب
هذه المعادلة بدلالة عوامل التأثير وبالشكل التالي

$$[D^2 + a_1 D + a_2]\, y = 0$$

$$(D - m_1)(D - m_2)\, y = 0$$

let $u = (D - m_2)\, y$

$$(D - m_1)\, u = 0$$

$$\frac{du}{dx} - m_1 u = 0 \quad , M(x) = e^{\int -m_1 dx} = e^{-m_1 x}$$

$$u e^{-m_1 x} = \int 0 \, dx$$

$$u e^{-m_1 x} = a$$

$$u = a e^{m_1 x}$$

$$(D - m_2)\, y = a e^{m_1 x}$$

$$\frac{dy}{dx} - m_2 y = a e^{m_1 x} \quad , M(x) = e^{-m_2 x}$$

$$y e^{-m_2 x} = a \int e^{m_1 x} \cdot e^{-m_2 x} \, dx$$

$$y e^{-m_2 x} = a \int e^{(m_1 - m_2) x} \, dx \quad \text{—— (3)}$$

يمكن ان يكون جذرا المعادلة المميزة بثلاث حالات

1) اذا كانت جذرا المعادلة المميزة حقيقيين ومختلفين

اي ان $m_1 \neq m_2$ فعند ذلك يكون حل المعادلة (3)