$$z = -4y^3 e^{-2y^2} + c e^{-2y^2}$$

$$z = x^{-2}$$

$$x^{-2} = -4y^3 e^{-2y^2} + c e^{-2y^2}$$ الحل العام

المعادلات التفاضلية الآنية :-

تعتمد المعادلات التفاضلية الآنية على متغير مستقل واحد ومتغيرات معتمدة بعدد عدد المعادلات ويمكن تحويل هذه المعادلات الى معادلة واحدة بمتغير مستقل واحد ومتغير معتمد واحد كالمعادلات السابقة.

الصيغة العامة لهذه الانواع من المعادلات هي :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad —— ①$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y,t) \quad —— ②$$

حيث t هو المتغير المستقل و x و y هي المتغيرات المعتمدة

نعالج المعادلة ① بالطرق السابقة لانها بمتغيرين ونعوض الناتج في المعادلة ② فتصبح معادلة بمتغيرين ونحلها بالطرق السابقة ويكون الجواب النهائي بصيغة المعادلة الوسيطية.

الخميس : ٢٩/١١/٢٠١٢

مثال حل المعادلتين الآنيتين الآتيتين :

$$\frac{dx}{dt} + x = e^{t} \quad \text{—— ①}$$

$$\frac{dy}{dt} = x \quad \text{—— ②}$$

$$\frac{dx}{dt} + x = e^{t} \quad \text{—— ①}$$

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\,x = Q(t) \quad , \; P(t) = 1 \, , \; Q(t) = e^{t}$$

$$M(t) = e^{\int dt} = e^{t}$$

$$M(t)\,x = \int M(t)\,Q(t)\,dt + c$$

$$e^{t} x = \int e^{t} \cdot e^{t}\,dt + c$$

$$x e^{t} = \int e^{2t}\,dt + c$$

$$x e^{t} = \frac{1}{2} e^{2t} + c$$

$$x = \frac{1}{2} e^{t} + c e^{-t} \quad \text{—— ③}$$

بتعويض ③ في ② ينتج

$$\frac{dy}{dt} = x \quad \text{—— ②} \longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} e^{t} + c e^{-t}$$

$$dy = \int \left(\frac{1}{2} e^{t} + c e^{-t}\right) dt$$

$$y = \frac{1}{2}e^{t} - c e^{-t} + C_1 \quad \text{---} (4)$$

المعادلة (3) و (4) تمثلان الحل العام

مثال: حل معادلتين الاتيتين :-

$$\frac{dx}{dt} + y = x \quad \text{---} (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y \quad \text{---} (2)$$

حل المعادلة (2)

$$\frac{dy}{dt} = 3y \Rightarrow dy = 3y\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3\,dt$$

بأخذ اللوغ $\ln y = 3t + c$

$$y = e^{3t+c} = e^{3t} \cdot e^{c}$$

$$e^{c} = A$$

$$\therefore y = A e^{3t} \quad \text{---} (3)$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$\frac{dx}{dt} + A e^{3t} = x$$

$$\frac{dx}{dt} - x = -A e^{3t}$$

$$P(t) = -1 \quad , \quad Q(t) = -A e^{3t}$$

$$M(t) = e^{\int -dt} = e^{-t}$$

$$M(t)x = \int M(t)\,Q(t)\,dt + c$$

$$xe^{-t} = \int -Ae^{3t}\cdot e^{-t}\,dt + c$$

$$xe^{-t} = -A\int e^{2t}\,dt + c$$

$$xe^{-t} = -\frac{1}{2}Ae^{2t} + c$$

$$x = -\frac{1}{2}Ae^{3t} + ce^{t} \quad —— (4)$$

∴ المعادلة (3) و (4) تمثلان الحل العام.

متغير معتمد

$y' = \frac{dy}{dx}$

متغير مستقل

تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية:

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هي:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad —— (1)$$

ويمكن ايجاد الحل المعادلات من الرتبة الثانية وذلك بتحويلها الى معادلات من الرتبة الاولى وحسب نوعيتها.

1) اذا لم يظهر المتغير المعتمد (y) في المعادلة (1) عندئذٍ نفرض

$$y' = p$$

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx}$$

وبذلك تصبح المعادلة (1) بالصيغة

$$G(x, p, p') = 0$$

وهذه معادلة من الرتبة الاولى في p نحلها من اجل x, p ثم نرجع $p = \frac{dy}{dx}$ ونحلها من اجل x, y

مثال :- حل المعادلة التفاضلية التالية

$$xy'' = y'$$

let $y' = P$

$$y'' = P' = \frac{dP}{dx}$$

$$x \cdot \frac{dP}{dx} = P$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln P = \ln x + \ln c$$ باخذ الطرفين

$$P = xc \quad , \quad P = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = xc$$

$$\int dy = \int xc\, dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 c + c_1$$ الحل العام

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية .

$$x^2 y'' - y'^2 - 2x y' = 0$$

let $y' = P$, $y'' = P' = \frac{dP}{dx}$

$$x^2 \frac{dP}{dx} - P^2 - 2xP = 0 \qquad \div x^2$$

$$\frac{dP}{dx} - \frac{P^2}{x^2} - \frac{2}{x} P = 0$$

$$\frac{dP}{dx} - \frac{2}{x} P = \frac{P^2}{x^2} \qquad * P^{-2}$$

$$P^{-2} \frac{dP}{dx} - \frac{2}{x} P^{-1} = \frac{1}{x^2} \quad \text{—— } (*)$$

let $Z = P^{-1}$, $\frac{dZ}{dx} = -P^{-2} \frac{dP}{dx}$

$$-\frac{dZ}{dx} = P^{-2} \frac{dP}{dx}$$

بالتعويض في (*) نحصل على

$$-\frac{dZ}{dx} - \frac{2}{x} Z = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dZ}{dx} + \frac{2}{x} Z = -\frac{1}{x^2}$$

$$M(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$x^2 z = \int \frac{-1}{x^2} \cdot x^2 \, dx + c$$

$$x^2 z = -x + c$$

$$z = \frac{-1}{x} + c x^{-2}$$

$$p^{-1} = \frac{-1}{x} + \frac{c}{x^2}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{-x+c}{x^2}$$

$$p = \frac{x^2}{-x+c} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{-x+c}$$

$$(-x+c)\,dy = x^2 dx$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{-x+c}\right) dx$$

بالقسمة

$$\begin{array}{r|l} & -x-c \\ -x+c & x^2 \\ & \underline{\mp x^2 \pm cx} \\ & -cx \\ & \underline{\mp cx \pm c^2} \\ & c^2 \end{array}$$

$$\int dy = \int \left[(-x-c) + \frac{c^2}{c-x}\right] dx$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - cx - c^2 \ln|c-x| + c_1$$

الحل العام

* أو طريقة أخرى للحل

$$\int dy = \int \frac{x^2}{-(x-c)} dx$$

$$\int dy = -\int \frac{x^2 - c^2 + c^2}{x-c} dx = -\int \left[\frac{(x^2-c^2)}{x-c} + \frac{c^2}{x-c}\right] dx$$

$$= -\int \frac{\cancel{(x-c)}(x+c)}{\cancel{(x-c)}} + \frac{c^2}{x-c} \, dx$$

$$y = -\left(\frac{1}{2}x^2 + cx + c^2 \ln|x-c|\right) + c_1$$

الحل العام

٢) اذا لم يظهر المتغير المستقل X في المعادلة ① عندئذ نعرف

$$y' = P \quad , \quad y'' = P' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P\frac{dP}{dy}$$

وبذلك تصبح المعادلة ① بالصيغة

$$F\left(y, P, P\frac{dP}{dy}\right) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى بمتغير مستقل y ومتغير معتمد P نحلها من أجل y و P وبعد ذلك نعوض عن $P = \frac{dy}{dx}$ ونحلها من أجل X و y .

2013

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$yy'' + y'^2 = 0$$

let $y' = P$, $y'' = P \cdot \frac{dP}{dy}$

نعوض بالمعادلة الاصلية نحصل على

$$yP\frac{dP}{dy} + P^2 = 0$$

$$P\left(y\frac{dP}{dy} + P\right) = 0$$

إما $P = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow y = c$ الحل المنفرد

أو

$$y\frac{dP}{dy} + P = 0$$

$$y\frac{dP}{dy} = -P$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\ln P + \ln y = \ln c$$

$$Py = c$$

$$P = \frac{c}{y} \quad , \quad P = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{y}$$

$$\int y\,dy = \int c\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + c_1$$ الحل العام

* طريقة ثانية

$$yy'' + y'^2 = 0$$

$$y \cdot P \frac{dP}{dy} + P^2 = 0$$

$$y \cdot P \frac{dP}{dy} = -P^2 \Rightarrow \frac{dP}{dy} = \frac{-P}{y}$$

$$y\,dP = -P\,dy$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int -\frac{dy}{y}$$

$$\ln P = -\ln y + \ln c$$

$$P = y^{-1} \cdot c = \frac{c}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{y} \Rightarrow y\,dy = c\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = cx + c_1$$ الحل العام

مثال: حل المعادلة التفاضلية

$yy'' + y'^3 = 0$

let $y' = P$, $y'' = P\cdot\frac{dP}{dy}$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$yP\frac{dP}{dy} + P^3 = 0$

$P\left(y\frac{dP}{dy} + P^2\right) = 0$

$P = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = c$ الحل المنفرد

$y\frac{dP}{dy} + P^2 = 0$

$y\frac{dP}{dy} = -P^2$

$y\,dP = -P^2\,dy$

$\frac{dP}{P^2} = \frac{-dy}{y} \Rightarrow \frac{dP}{P^2} + \frac{dy}{y} = 0$

$\int P^{-2}\,dP + \int\frac{dy}{y} = \int 0$

$\frac{P^{-1}}{-1} + \ln y = c$

$\frac{-1}{P} + \ln y = c$

$$\frac{1}{p} = \ln y - c$$

$$\frac{dx}{dy} = \ln y - c$$

$$\int dx = \int (\ln y - c)\, dy$$

بالتجزئ $u = \ln y$, $\int \ln y\, dy$
$dv = dy$, $du = \frac{1}{y} dy$, $v = y$
$\int \ln y\, dy = y \ln y - \int y \cdot \frac{1}{y} dy$
$= y \ln y - y + c$ الحل التام

$$x = y \ln y - y - cy + c_1$$ الحل العام

ملاحظة:
يمكن معالجة بعض المعادلات التفاضلية الخاصة ومن رتب أعلى من الرتبة الثانية وذلك بفرض $y'' = q$

$$\Rightarrow y''' = q' = \frac{dq}{dx}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية:

$$x y''' - 2y'' = 0$$

let $y'' = q$, $y''' = \frac{dq}{dx}$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$x \frac{dq}{dx} - 2q = 0$$

$$\frac{dq}{q} - \frac{2}{x} dx = 0$$

$$\ln q - \ln x^2 = \ln c$$

$$\ln \frac{q}{x^2} = \ln c$$

$$\frac{q}{x^2} = c$$

$$q = cx^2$$

$$\int y'' = \int cx^2$$

$$y' = \frac{1}{3}cx^3 + c_1$$

$$y = \frac{1}{12}cx^4 + c_1x + c_2$$ الحل العام

ملاحظة :-

بالنسبة المعادلات التفاضلية التي لا تظهر فيها X أو y من الاسهل حلها باعتبار ان y غير موجودة

مثال :- حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$y''' - y'' = 1$$

let $q = y''$, $y''' = \frac{dq}{dx}$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$\frac{dq}{dx} - q = 1$$

$$\frac{dq}{dx} = 1 + q$$

$$\frac{dq}{1+q} = dx$$

$\ln|1+q| = x + c$ باخذ الطرفين

$1+q = e^{x+c}$

$1+q = e^{x} \cdot e^{c}$, $e^{c} = c_1$

$1+q = c_1 e^{x}$

$q = c_1 e^{x} - 1$

$\int y'' = c_1 e^{x} - 1$

$\int y' = c_1 e^{x} - x + c_2$

$y = c_1 e^{x} - \frac{1}{2} x^2 + c_2 x + c_3$ الحل العام.

أو

$\frac{dq}{dx} - q = 1$, $P(x) = -1$, $Q(x) = 1$

$M(x) = e^{\int -dx} = e^{-x}$

$M(x) q = \int M(x) Q(x) dx + c$

$e^{-x} q = \int e^{-x} \cdot dx + c$

$e^{-x} q = -e^{-x} + c$

$q = -1 + c e^{x}$

$y'' = -1 + c e^{x}$

$y' = c e^{x} - x + c_1$

$y = c e^{x} - \frac{1}{2} x^2 + c_1 x + c_2$

المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى ولكن من درجات أعلى

الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة n هو

$$p^n + a_1(x,y)p^{n-1} + \quad a_{n-1}(x,y)p + a_n(x,y) = 0 \quad — ①$$

$$n = 2, 3, 4, \ldots \quad , \quad p = \frac{dy}{dx}$$

تنقسم المعادلات التفاضلية القابلة للحل من هذا النوع الى ثلاثة أقسام من حيث طرق حلها

1) معادلات قابلة للحل بالنسبة لـ p :

اذا أمكن تحليل المعادلة التفاضلية ① بالصورة

$$(p - Q_1(x,y))(p - Q_2(x,y)) \quad — \quad (p - Q(x,y)) = 0 \quad — ②$$

فإن كل قوس بعد مساواته بالصفر يكون معادلة تفاضلية يجري حلها باحدى الطرق السابقة ولتكن حلول هذه المعادلات هي

$$g_1(x,y,c) = 0 \quad , \quad g_2(x,y,c) = 0 \; , \; g_n(x,y,c) = 0$$

ويكون الحل العام للمعادلة ① هو حاصل ضرب هذه الحلول

$$g_1(x,y,c)\, g_2(x,y,c) \; --- \; g_n(x,y,c) = 0$$

ملاحظة:

إن الثابت الاختياري c في معادلات الاقواس المضروبة هو نفسه لأن المعادلة التفاضلية لا من الرتبة الاولى

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$y^2P^2-3xyP+2x^2=0$$

$$(yP-2x)(yP-x)=0$$

$$yP-2x=0 \quad , \quad yP-x=0$$

$$y\cdot\frac{dy}{dx}-2x=0 \quad , \quad y\cdot\frac{dy}{dx}-x=0$$

$$y\,dy-2x\,dx=0 \quad , \quad y\,dy-x\,dx=0$$

$$\frac{1}{2}y^2-x^2+C=0 \quad , \quad \frac{1}{2}y^2-\frac{x^2}{2}+C=0$$

$$(y^2-2x^2+C_1)=0 \quad , \quad (y^2-x^2+C_1)=0$$

$$(y^2-2x^2+C_1)(y^2-x^2+C_1)=0$$ الحل العام

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$$P^2+Px+yP+xy=0$$ بالتجزئة

$$P(P+x)+y(P+x)=0$$

$$(P+x)(P+y)=0$$

$$P+x=0 \quad or \quad P+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}+x=0 \quad , \quad \frac{dy}{dx}+y=0$$

$dy + x\,dx = 0 \quad , \quad \frac{dy}{y} + dx = 0$

$y + \frac{x^2}{2} + c = 0 \quad , \quad \ln y + x + c = 0$

$\left(y + \frac{x^2}{2} + c\right)\left(\ln y + x + c\right) = 0$ الحل العام

مثال: $(p - 2x)^2 = 2p - 6x \Rightarrow p^2 - 4px + 4x^2 = 2p - 6x$

$p^2 - 4px - 2p + 4x^2 + 6x = 0 \Rightarrow p^2 - p(4x + 2) + 4x^2 + 6x = 0$

$A = 1 \ , \ B = -(2 + 4x) \ , \ C = 4x^2 + 6x$

$$p = \frac{(2+4x) \mp \sqrt{(2+4x)^2 - 4(1)(4x^2 + 6x)}}{2(1)}$$

$$p = \frac{2(1+2x) \mp \sqrt{4 - 8x}}{2} = \frac{2(1+2x) \mp 2\sqrt{1-2x}}{2}$$

$p = 1 + 2x \mp \sqrt{1 - 2x}$

$p = 2x + 1 + \sqrt{1 - 2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + 1 + \sqrt{1 - 2x} \Rightarrow dy = 2x + 1 + \sqrt{1-2x}\,dx$

$y - \left(x^2 + x - \frac{1}{3}(1 - 2x)^{\frac{3}{2}}\right) + c = 0$

$y - x^2 - x + \frac{1}{3}(1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + c = 0$

أو $p = 2x + 1 - \sqrt{1 - 2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + 1 - \sqrt{1 - 2x}$

$dy - (2x + 1 - \sqrt{1 - 2x})\,dx = 0$

$y - \left(x^2 + x + \frac{1}{3}(1 - 2x)^{\frac{3}{2}}\right) + c = 0$

$y - x^2 - x - \frac{1}{3}(1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + c = 0 \qquad * 3$

$3y - 3x^2 - 3x - (1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + 3c = 0 \qquad 3c = c_1$

$\left(3y - 3x^2 - 3x + (1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + c_1\right)\left(3y - 3x^2 - 3x + (1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + c_1\right) = 0$

الحل العام

الخميس : ٦ / ١٢ / ٢٠١٢

٢) معادلات تفاضلية قابلة للحل بالنسبة لـ y

اذا امكن كتابة المعادلة التفاضلية $f(x, y, p)=0$ —— ①

من أجل y اي أن $y=f(x,p)$ —— ②

نفاضل y بالنسبة لـ x ونعوض عن $\frac{dy}{dx}=p$

فتصبح خالية من y وتكون بدلالة $(p, x, \frac{dp}{dx})$ ثم نحلها عن أجل p بدلالة x وليكن

هذا الحل هو $\phi(x,p,c)=0$ —— ③

وبحذف الوسيط p بين المعادلتين ② و ③ نحصل على علاقة بـ (x, y, c) وهو الحل المطلوب.

ملاحظة:

في بعض الاحيان يكون من الصعب حذف الوسيط p وعليه نعبر عن كلاً من x و y منفصلين بدلالة p ونعتبره حلاً للمعادلة.

ملاحظة:

قد تظهر حلول اضافية زائدة مثل هذه الحلول تسمى بالحلول المتفردة.

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$y=p^2-px+\frac{x^2}{2}$ $\rightarrow$ او $p^2-px+\frac{x^2}{2}-y=0$

$$\frac{dy}{dx}=2p\frac{dp}{dx}-\left(p+x\frac{dp}{dx}\right)+x$$

$$\frac{dy}{dx}=2p\frac{dp}{dx}-\left(p+x\frac{dp}{dx}\right)+x$$

$$p=2p\frac{dp}{dx}-p-x\frac{dp}{dx}+x$$

$$2p\frac{dp}{dx}-p-x\frac{dp}{dx}+x-p=0$$

$$\frac{dP}{dx}(2P-X)-2P+X=0$$

$$\frac{dP}{dx}(2P-X)-(2P-X)=0$$

$$(2P-X)\left(\frac{dP}{dx}-1\right)=0$$

إما $2P-X=0 \Rightarrow 2P=X \Rightarrow P=\frac{1}{2}X$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$y=\frac{1}{4}X^2-\cancel{\frac{1}{2}X^2}+\cancel{\frac{1}{2}X^2}$$

$$y=\frac{1}{4}X^2$$ الحل المنفرد

أو $\frac{dP}{dx}-1=0$

$$dP-dX=0$$

$$P-X=C \Rightarrow P=X+C$$

بالتعويض بالمعادلة الاصلية نحصل على

$$y=(X+C)^2-(X+C)X+\frac{X^2}{2}$$ الحل العام

مثال :- حل المعادلة التفاضلية التالية :- $5PX+5X^2+P^2-y=0$

$$y=5PX+5X^2+P^2$$

$$\frac{dy}{dx}=5P+X\cdot5\frac{dP}{dx}+10X+2P\frac{dP}{dx}$$

$$P=5P+5X\frac{dP}{dx}+10X+2P\frac{dP}{dx}$$

$$5P + 5X\frac{dP}{dX} + 10X + 2P\frac{dP}{dX} - P = 0$$

$$4P + \frac{dP}{dX}(5X + 2P) + 10X = 0$$

$$2(2P + 5X) + \frac{dP}{dX}(5X + 2P) = 0$$

$$(2P + 5X)\left(2 + \frac{dP}{dX}\right) = 0$$

إما

$$2P + 5X = 0 \Rightarrow 2P = -5X \Rightarrow P = -\frac{5}{2}X$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$y = 5\left(-\frac{5}{2}X\right)X + 5X^2 + \left(-\frac{5}{2}X\right)^2$$ الحل المنفرد

أو

$$2 + \frac{dP}{dX} = 0$$

$$2dX + dP = 0$$

$$2X + P = C \Rightarrow P = C - 2X$$

بالتعويض بالمعادلة الاصلية نحصل على

$$y = 5(C - 2X)X + 5X^2 + (C - 2X)^2$$ الحل العام

٣) معادلات قابلة الحل بالنسبة لـ x.

اذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية $f(x,y,p)=0$ ①

من أجل x اى ان $x = f(y,p)$ ②

نفاضل x بالنسبة لـ y ونعوض عن $\frac{1}{p}=\frac{dx}{dy}$

فتصبح خالية من x وتكون بدلالة $\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$

ثم نحلها من أجل p بدلالة y وليكن هذا الحل هو

$$\psi(y,p,c)=0 \quad ③$$

ولأجل الحصول على الحل العام للمعادلة ① نحذف p من المعادلة ② و ③ اذا كان ذلك ممكناً والا نعبر عن كل من x, y منفصلين بدلالة p

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $px = y + p^3$

تعتبر المعادلة قابلة الحل بالنسبة لـ x جد حلها العام

$$x = \frac{y}{p} + p^2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p \cdot 1 - y\frac{dp}{dy}}{p^2} + 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} + 2p\frac{dp}{dy}$$

$$\cancel{\frac{1}{p}} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} + 2p\frac{dp}{dy} - \cancel{\frac{1}{p}} = 0$$

$$-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} + 2p\frac{dp}{dy} = 0$$

$$\frac{dp}{dy}\left(2p - \frac{y}{p^2}\right) = 0$$

ملاحظة حدان ⟸ قوسان $\underbrace{(p+y)\frac{dp}{dy}=0}_{\text{أو اما}}$

ثلاثة حدود ⟸ فصل متغيرات $p=(2y+3p)\frac{dp}{dx}$

اربعة حدود ⟸ تحليل بالتجزئة

$$\frac{dp}{dy}\left(2p-\frac{y}{p^2}\right)=0$$

$$2p-\frac{y}{p^2}=0$$

$$2p=\frac{y}{p^2}$$

$$2p^3=y \Rightarrow p^3=\frac{1}{2}y \Rightarrow p=\left(\frac{1}{2}y\right)^{1/3}$$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$\left(\frac{1}{2}y\right)^{1/3}x=y+\frac{1}{2}y$$ الحل المفرد

2) $\frac{dp}{dy}=0 \Rightarrow dp=0 \Rightarrow p=c$

بالتعويض في المعادلة الاصلية نحصل على

$$cx=y+c^3$$ الحل العام

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$4px-2y=p^3y^2$$

$$4px=p^3y^2+2y$$

$$x=\frac{p^2y^2}{4}+\frac{y}{2p}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{4}\left(p^2\cdot 2y+y^2\cdot 2p\frac{dp}{dy}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{p\cdot 1-y\cdot\frac{dp}{dy}}{p^2}\right)$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}p^2y+\frac{1}{2}y^2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{2p}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{2}p^2y+\frac{1}{2}y^2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{2p}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}-\frac{1}{p}=0$$

$$\frac{-1}{2p}+\frac{1}{2}p^2y+\frac{1}{2}y^2p\frac{dp}{dy}-\frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}=0$$