التاريخ :- ٢/١٠/٢٠١٢

# الفصل الأول

## المعادلات التفاضلية Differential Equations

تنشأ المعادلات التفاضلية من الظواهر الفيزيائية والطبيعية ولنأخذ على سبيل المثال جسم يقع على محور السينات ولنفرض إنه يقع في الموقع $X$ بعد زمن $t$ فإن

$$V = \frac{\text{تغير المسافة}}{\text{تغير الزمن}} = \frac{dx}{dt}$$

حيث $a$ هو التعجيل

$$a = \frac{\text{تغير السرعة}}{\text{تغير الزمن}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

وحسب قانون نيوتن الثاني $F = m.a$

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad --- *$$

اذا كانت $F$ دالة بالنسبة للزمن أو المسافة فإن المعادلة *

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

تمثل معادلة تفاضلية.

نماذج من الطبيعة تؤدي الى معادلات تفاضلية:
1) عمليات انصهار الجليد.
2) حركة الجسم المعلق بلولب شاقولي
3) البندول البسيط.
4) حركة الجسم في المستوى.
5) خطوط المجال المغناطيسي.

تعريف المعادلة التفاضلية: هي اي معادلة (ليست متطابقة) مكونة من دوال جبرية أو دوال مثلثية أو معاً وتحوي تفاضلات أو مشتقات.
أو هي علاقة بين دالة غير معروفة ومشتقاتها من المتغيرات المستقلة وتقسم المعادلات التفاضلية الى قسمين:

1) المعادلات التفاضلية الاعتيادية:
Ordinary differential Equation.
وهي المعادلات التي تحتوي على متغير مستقل واحد.
مثال.

$$y'' + y' = 5$$

متغير معتمد

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 5 \quad , \quad y = y(x)$$

متغير مستقل

2) المعادلات التفاضلية الجزئية:
Partial differential equation
وهي المعادلات التي تحتوي على أكثر من متغير مستقل واحد
مثال

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$F = F(x, y, z)$

* رتبة المعادلة التفاضلية: Order of Differential equation.

هي رتبة اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية

* درجة المعادلة التفاضلية: Degree of D.eq

هي درجة (اس) اعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية بعد جعل جميع اس المشتقات صحيحة.

أمثلة:

Ex:- $y'' + 3y = x^2$

رتبة الثانية الدرجة الاولى

Ex: $(3x+2y)^2 (y')^1 = 1$ رتبة الاولى الدرجة الاولى

Ex:- $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = K\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

لازم الاس يكون صحيح

بتربيع الطرفين

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = K^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

الرتبة الثانية الدرجة الثانية

Ex:- $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 2z$

الرتبة الاولى الدرجة الاولى

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 0$$

الرتبة ثانية درجة ثانية

حل المعادلة التفاضلية:
Solution of differential equation.
هو أي علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية ويتميز بما يلي:
1) خالي من المشتقات.
2) معرف على فترة معينة.
3) يحقق المعادلة التفاضلية (يحولها الى متطابقة)
ويسمى هندسياً منحنى تكامل المعادلة التفاضلية.
المتطابقة: تعني الطرف الايمن = الطرف الايسر

اثبت ان
$$y = x\ln x - x \quad , x > 0$$
هو حل المعادلة التفاضلية
$$x\frac{dy}{dx} = x + y$$

$$y = x\ln x - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot 1 + \ln x\cdot 1 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{1} + \ln x - \cancel{1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x$$
بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$x\cdot\ln x = x + y$$
$$x\ln x = \cancel{x} + x\ln x - \cancel{x}$$

$$x\ln x = x\ln x$$

هنالك ثلاثة أنواع من الحلول للمعادلات التفاضلية

1) الحل العام للمعادلة التفاضلية :- General Solution

هو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت بمقدار رتبة المعادلة.

2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :- Particular Solution

هو الحل الناتج من مجموعة الحل العام بعد التعويض عن الثوابت الاختيارية بقيم عددية معينة.

مثال :- حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = x\,dx$$

$$\int dy = \int x\,dx$$

$y = \frac{x^2}{2} + c$ الحل العام للمعادلة التفاضلية

نفرض $c = 1$

$y = \frac{x^2}{2} + 1$ الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

3) الحل المنفرد (الشاذ) للمعادلة التفاضلية :-

Singular Solution.

هو الحل الذي لا يمكن استنتاجه من مجموعة الحل العام مهما اعطينا الثوابت الاختيارية القيم.

من قيم

الخميس: ٤/١٠/٢٠١٢ $y = 0$ هو حلاً خاصاً.

حل المعادلة التفاضلية

$$2y' = 3y^{1/3}$$

$$2\frac{dy}{dx} = 3y^{1/3} \Rightarrow$$

$$2dy = 3y^{1/3}\,dx \Rightarrow \frac{2}{y^{1/3}}\,dy = 3dx$$

$$\int 2y^{-1/3}\,dy = \int 3dx$$

$$2\frac{y^{2/3}}{2/3} = 3x + c$$

$$3y^{2/3} = 3x + c$$

$$y^{2/3} = x + \frac{c}{3}$$

$$y^{2/3} = x + c_1 \qquad c_1 = \frac{c}{3}$$

$$y^2 = (x + c_1)^3$$ الحل العام للمعادلة

فإذا كانت النقطة المعطاة $(1, 2\sqrt{2})$ فالحل الخاص

$x \quad y$

$$(2\sqrt{2})^2 = (1 + c_1)^3$$

$$8 = (1 + c_1)^3$$

$$2 = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y^2 = (x+1)^3$$ الحل الخاص

نلاحظ ان عندما $y=0$ يحقق المعادلة التفاضلية.
$\therefore$ $y=0$ حلاً خاصاً
$\therefore$ $y=0$ لا يمكن استنتاجه من مجموعة الحل العام مهما اعطينا $c_1$ من قيم
$\therefore$ نسمي الحل $y=0$ بالحل المنفرد.

## تكوين المعادلة التفاضلية من مجموعة الحل العام.

يمكن ايجاد المعادلة التفاضلية اذا علمت مجموعة الحل العام وذلك بملاحظة العلاقة بين عدد الثوابت الاختيارية في مجموعة الحل العام ورتبة المعادلة التفاضلية.

مثال
جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو

$$y = c_1 X + c_2 X^3 \quad --- \; ①$$

حيث ان $c_1$ و $c_2$ ثوابت اختيارية.
الاشتقاق على عدد الثوابت
نلاحظ ان المعادلة ① تحتوي على ثابتين اختياريين ولهذا نشتق مرتين.

$$y' = c_1 + 3 c_2 X^2 \quad -- \; ②$$

$$y'' = 6 c_2 X \quad --- \; ③$$

$$c_2 = \frac{1}{6X} y'' \quad -- \; ④$$

بتعويض ④ في المعادلة ② نحصل على

$$y' = c_1 + 3 \frac{1}{6X} y'' X^2$$

$y' = C_1 + \frac{1}{2} y'' x$

$C_1 = y' - \frac{1}{2} x y''$ --- (5)

بتعويض المعادلة (4) و (5) في المعادلة (1) نحصل على

$y = \left(y' - \frac{1}{2} x y''\right) x + \frac{1}{6x} y'' x^3$

$y = y' x - \frac{1}{2} x^2 y'' + \frac{1}{6} x^2 y''$

$y = y' x - \frac{2}{6} x^2 y''$

$y = x y' - \frac{1}{3} x^2 y''$ المعادلة المطلوبة.

مثال: كون المعادلة التفاضلية من مجموعة الحل العام التالية

$y = A e^{x} - x$ --- (1)

حيث $A$ ثابت اختياري.

$y' = A e^{x} - 1$ أو عن طريق حل المعادلتين آنياً بالطرح

$y - y' = 1 - x$

$y = y' + 1 - x$

$A e^{x} = y' + 1$

$A = \frac{y' + 1}{e^{x}}$ --- (2)

بتعويض (2) في (1) نحصل على

$y = \frac{y' + 1}{\cancel{e^{x}}} \cdot \cancel{e^{x}} - x$

$y = y' + 1 - x$

$y - y' - 1 + x = 0$ المعادلة المطلوبة

التحقيق :

$y = Ae^{x} - x$

$y' + 1 - x = Ae^{x} - x$

$y' + 1 - x = \frac{y'+1}{\cancel{e^{x}}} \cdot \cancel{e^{x}} - x$

$y' + 1 - x = y' + 1 - x$

مثال

جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$y = A e^{x} \cos(3x + B)$

حيث $A$ , $B$ ثوابت اختيارية.

$y = Ae^{x} \cos(3x + B)$

$y' = Ae^{x} (-3\sin(3x+B)) + \cos(3x + B) \cdot Ae^{x}$

$y' = -3Ae^{x} \sin(3x + B) + Ae^{x} \cos(3x + B)$ — ①

$y'' = -3Ae^{x} \cos(3x + B) \cdot 3 + \sin(3x + B) \cdot (-3Ae^{x})$

$+ Ae^{x} (-\sin(3x + B) \cdot 3) + \cos(3x + B) \cdot Ae^{x}$

$y'' = -9Ae^{x} \cos(3x + B) - 3Ae^{x} \sin(3x + B)$

$- 3Ae^{x} \sin(3x + B) + Ae^{x} \cos(3x + B)$

$$y'' = -8Ae^{x}\cos(3x+B) - 6Ae^{x}\sin(3x+B) \quad — ②$$

نضرب ① بـ -٢ [illegible]

$$-2y' = 6Ae^{x}\sin(3x+B) - 2Ae^{x}\cos(3x+B)$$

$$y'' = -8Ae^{x}\cos(3x+B) - 6Ae^{x}\sin(3x+B)$$

$$-2y' + y'' = -10Ae^{x}\cos(3x+B)$$

$$y'' - 2y' = -10Ae^{x}\cos(3x+B)$$

$$y'' - 2y' = -10y$$

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$ المعادلة المطلوبة

جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو: ٢٠١٥ عام

$$y = ae^{bx} \quad — ①$$

حيث A, B ثابتات اختياريان.

$$y = abe^{bx}$$

$$y'' = ab^{2}e^{bx}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{ae^{bx}}{abe^{bx}} = \frac{1}{b} \quad — ②$$

$$\frac{y'}{y''} = \frac{ab\,e^{bx}}{ab^2\,e^{bx}} = \frac{1}{b} \quad \therefore \quad (3)$$

المعادلة (2) تساوي المعادلة (3)

$$\frac{y}{y'} = \frac{y'}{y''}$$

$$yy'' = (y')^2$$

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

نشتق بقدر عدد الثوابت

## الفصل الثاني

طرق ايجاد الحل للمعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

تكتب المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى كما يلي

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

أو

$$g(x,y) + h(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (1)$$

حيث ان $f$ و $g$ , $h$ دوال في المتغيرين $x$ و $y$ وتكون خالية من $y'$

على الرغم من بساطة المعادلة ① الا انه لا يوجد طريقة عامة للحل وعلى ذلك تنقسم المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى والتي يمكن ايجاد حلها بطريقة مباشرة الى عدة أنواع.

١) المعادلات التي تنفصل متغيراتها.
٢) المعادلات التفاضلية من النوع المتجانس.
٣) المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية.
٤) معادلات التفاضلية التامة.
٥) المعادلات التفاضلية الخطية.
٦) معادلة برنولي.

١) المعادلات التفاضلية التي تنفصل متغيراتها:
ابسط الحالات لهذا النوع من المعادلات يمكن وضعها بالشكل الاتي

$$F_1(X)\,dX + F_2(y)\,dy = 0$$

ويمكن ايجاد حلها باجراء التكامل المباشر عليها أي ان

$$\int F_1(X)\,dX + \int F_2(y)\,dy = C$$

مثال:
حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{X^3}{(y+1)^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

بالضرب ب $(y+1)^2 dX$

$$X^3\,dX + (y+1)^2\,dy = 0$$

باجراء التكامل للطرفين

$$\int X^3 dX + \int (y+1)^2 dy = 0$$

$$\frac{x^4}{4}+\frac{(y+1)^3}{3}=c$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية التالية

$$x\,dy-(1+x)y\,dx=0$$

نقسم على $xy$

$$\frac{dy}{y}-\frac{(1+x)}{x}dx=0$$

$$\int\frac{dy}{y}-\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\int 0$$

$$\ln y-(\ln x+x)=c$$

$$\ln y-\ln x-x=c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$(\sin x+\cos x)dy+(\cos x-\sin x)dx=0$$

بالقسمة على $(\sin x+\cos x)$

$$\frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)}dy+\frac{(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)}dx=0$$

$$\int\frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)}dy+\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$\int dy+\int\frac{(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)}dx=\int 0$$

$y + \ln|\sin x + \cos x| = c$

مثال :-

أوجد الحل العام للمعادلة

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{1+e^x}$

ثم اوجد الحل الخاص عند النقطة $x=0$ , $y=1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{1+e^x}$

$(1+e^x)\, dy = e^{x+y}\, dx$

$(1+e^x)\, dy = e^x . e^y\, dx$

نقسم على $e^y (1+e^x)$

$\int \frac{dy}{e^y} = \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

$\int e^{-y}\, dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

$\int -e^{-y}\, dy = \int \frac{e^x}{(1+e^x)}\, dx$

$-e^{-y} = \ln|1+e^x| + \ln c$ ممكن نوع صحيح لو صرها للرمز ثابت

$-e^{-y} = \ln|1+e^x| + \ln c$ الحل العام

الحل الخاص عندما $x=0$ , $y=1$

$-e^{-1} = \ln|1+e^0| + \ln c$

$-e^{-1} = \ln(1+1) + \ln c$

$-e^{-1} = \ln 2 + \ln c$

$-e^{-1} = \ln 2 + \ln c$

$\ln c = -e^{-1} - \ln 2$ نعوض في الحل العام .

$-e^{-y} = \ln|1+e^{x}| - e^{-1} - \ln 2$ الحل الخاص .

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x(y^2+1)$$

$$(x+1)\,dy = x(y^2+1)\,dx$$

نقسم على $(x+1)(y^2+1)$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{x}{x+1}\,dx$$

بالقسمة

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x+1 & x \\ & \mp x \mp 1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$$\tan^{-1} y = \int \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right) dx$$

$$\tan^{-1} y = \int \frac{(x+1)}{(x+1)}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\tan^{-1} y = x - \ln|x+1| + c$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \left(1 + \frac{-1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1|$$

٢) المعادلات التفاضلية من النوع المتجانس :-

يقال للدالة $F(x,y)$ بأنها متجانسة ومن الدرجة $n$
اذا تحقق الشرط التالي

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y)$$

مثال :-

بين فيما اذا كانت الدالة التالية متجانسة ام لا؟ اذكر درجة التجانس

$$F(x,y) = 7x^2 + 8xy - 9y^2$$

الحل :-

$$F(tx,ty) = 7(tx)^2 + 8(tx)(ty) - 9(ty)^2$$

$$= 7t^2x^2 + 8t^2xy - 9t^2y^2$$

$$= t^2(7x^2 + 8xy - 9y^2)$$

$$= t^2 F(x,y)$$

$$\therefore F(tx,ty) = t^2 F(x,y)$$

∴ الدالة متجانسة ومن الدرجة الثانية.

ملاحظة :-

كل دالة بصيغة $\frac{y}{x}$ ، $\frac{x}{y}$ تكون متجانسة ومن الدرجة صفر وذلك لأنه اذا كانت

$$F(x,y) = \frac{y}{x}$$

فإن

$$F(tx,ty) = \frac{ty}{tx} = t^0 F(x,y).$$

مثال:

اذكر درجة تجانس الدالة

$$F(x,y) = \frac{x-y}{y} + \tan\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{2x}{y}+1\right| + 8$$

$$F(x,y) = \frac{x-y}{y} + \tan\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{2x}{y}+1\right| + 8$$

$$F(tx,ty) = \frac{tx-ty}{ty} + \tan\frac{ty}{tx} + \ln\left|\frac{2tx}{ty}+1\right| + 8$$

$$F(tx,ty) = \frac{\cancel{t}(x-y)}{\cancel{t}y} + \tan\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{2x}{y}+1\right| + 8$$

$$F(tx,ty) = \frac{x-y}{y} + \tan\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{2x}{y}+1\right| + 8$$

$$F(tx,ty) = t^0\frac{(x-y)}{y} + t^0\tan\frac{y}{x} + t^0\ln\left|\frac{2x}{y}+1\right| + 8$$

لأن $t^0 = 1$ فما يؤثر

$$F(tx,ty) = t^0 F(x,y)$$

∴ درجة التجانس صفر

ملاحظة:

كل دالة ليست بصيغة $\frac{y}{x}$ , $\frac{x}{y}$ وتحتوي على

حد مطلق تكون غير متجانسة.

مثال:

$$F(x,y) = x^2+2xy+5$$

$$F(tx,ty) = t^2x^2+2t^2xy+5$$

∴ الدالة غير متجانسة $\neq t^n F(x,y)$

جميع الدوال المتسامية اذا لم تكن بصيغة $\frac{x}{y}$ , $\frac{y}{x}$

تكون غير متجانسة

مثال:

$$F(x,y)=e^{x+y}+\cos y$$

$$F(tx,ty)=e^{tx+ty}+\cos ty$$

$$\neq t^n F(x,y)$$

∴ الدالة غير متجانسة

يقال للمعادلة التفاضلية

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

بأنها متجانسة اذا كانت كل من $M$ , $N$ متجانستين

ومن نفس الدرجة

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية :-

$x\,dy = (x+y)\,dx$

$(x+y)\,dx - x\,dy = 0$

$M(x,y) = x+y$

$M(tx,ty) = tx+ty$
$= t(x+y)$
$= tM(x,y)$

$N(x,y) = -x$

$N(tx,ty) = -tx = t(-x) = tN(x,y)$

∴ المعادلة M متجانسة ومن الدرجة الاولى
N متجانسة ومن الدرجة الأولى
∴ M و N متجانستين ومن نفس الدرجة
∴ المعادلة التفاضلية متجانسة

let $y = vx \Rightarrow v = \frac{y}{x}$

$dy = v\,dx + x\,dv$

نعوض في المعادلة الاصلية

$(x+vx)\,dx - x(v\,dx + x\,dv) = 0$

$x\,dx + \cancel{vx\,dx} - \cancel{xv\,dx} - x^2\,dv = 0$

$\int x\,dx - \int x^2\,dv = \int 0 \qquad \div x^2$

$\int \frac{dx}{x} - \int dv = \int 0$

$\ln x - v = c$

$\ln x - \frac{y}{x} = c$ الحل العام للمعادلة

مثال حل المعادلة التفاضلية التالية :
اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$(2xy + y^2)\,dx - 2x^2\,dy = 0$

ثم أوجد الحل الخاص عند النقطة $(x,y)=(e,e)$

$M(x,y) = (2xy + y^2)$

$M(tx,ty) = 2tx\,ty + t^2y^2 = t^2(2xy + y^2)$

$= t^2 M(x,y)$

$N(x,y) = -2x^2$

$N(tx,ty) = -2t^2x^2 = t^2(-2x^2) = t^2 N(x,y)$

$\therefore$ $M$ متجانسة ومن الدرجة الثانية

$N$ متجانسة ومن الدرجة الثانية

$\therefore$ $M$ و $N$ متجانستين ومن نفس الدرجة

$\therefore$ المعادلة التفاضلية متجانسة

let $y = vx \Rightarrow v = \frac{y}{x}$

$dy = v\,dx + x\,dv$

$(2x\,vx + v^2x^2)\,dx - 2x^2(v\,dx + x\,dv) = 0$

$(2vx^2 + v^2x^2)\,dx - 2x^2(v\,dx + x\,dv) = 0$