الفصل السادس

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية

(1-6) مقدمة

إن كثير من المسائل في الحقول العلمية المختلفة تؤدي إلى معادلات تفاضلية اعتيادية أو جزئية يكون حل البعض منها بسيطا يمكن إيجاده باستخدام الطرق المعروفة لحلول المعادلات التفاضلية ولكن هنالك العديد من هذه المسائل لا يمكن التغلب عليها ألا باستعمال الحلول العددية.

(2-6) طرق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية عدديا

- طريقة تأيلور Taylor Method.
- طريقة اويلر Euler Method.
- طريقة رانج –كوتا Runge- Kutta Method.
- طريقة أدم- مولتن (ادم- بشفورث) Adam- Moulton (Adam-Bash forth) Method

(a2-6) طريقة تأيلور Taylor Method

تعتبر طريقة تايلور من الطرق المهمة في حلول المعادلات التفاضلية لأنها تعطي حلول جيدة عندما يكون المرء مستعدا لإدخال حدود أكثر أي بقوة أعلى إلى (h) في المتسلسلة ولكن عملية حساب المشتقات تزداد صعوبة جدا بعد أخر مما يجعل أكثر الباحثين في الموضوع اقل ميلا لاستخدام هذه الطريقة من بعض الطرق الأخرى التي تعطي الدقة مقاربة بدون الحاجة إلى حساب المشتقات العالية وان الصيغة العامة لطريقة تايلور هي:-

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + ...$$

بخطأ بتر مقداره $0(h^k)$ وهكذا خطوة بعد أخرى نقوم بإيجاد ...... $y_1, y_2,$ كقيم تقريبية إلى ..... $y(x_1), y(x_2),$

مثال:- جد أسلوب سلسلة تايلور للمشتقة التالية

$$y' = x - y; y_0 = 1, x_0 = 0$$
$$h = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$$

الحل:-

$$y'_0 = x - y \rightarrow y'_0 = 0 - 1 = -1$$
$$y''_0 = 1 - y' \rightarrow 1 - x + y \rightarrow y''_0 = 1 - 0 + 1 = 2$$
$$y'''_0 = -1 + y' = -1 + x - y \rightarrow -1 + 0 - 1 = -2$$
$$y''''_0 = 1 - x + y = 1 - 0 + 1 = 2$$

وعند بتر المتسلسلة بعد الحد h^4 نحصل على:-

$$y_1 = y_0 + h_1 y' + \frac{h_1^2}{2!}y'' + \frac{h_1^3}{3!}y''' + \frac{h_1^4}{4!}y''''$$
$$y_1 = 1 + (0.1)(-1) + \frac{(0.1)^2}{2!}(2) + \frac{(0.1)^3}{3!}(-2) + \frac{(0.1)^4}{4!}(2)$$
$$y_1 = 0.909675$$
$$y_2 = y_0 + h_2 y' + \frac{h_2^2}{2!}y'' + \frac{h_2^3}{3!}y''' + \frac{h_3^4}{4}y''''$$
$$y_2 = 1 + (0.2)(-1) + \frac{(0.2)^2}{2!}(2) + \frac{(0.2)^3}{3!}(-2) + \frac{(0.2)^4}{4!}(2)$$
$$y_2 = 0.837463$$

$$y_3 = y_0 + h_3 y' + \frac{h_3^{\,2}}{2!} y'' + \frac{h_3^3}{3!} y''' + \frac{h_3^4}{4!} y''''$$

$$y_3 = 1 + (0.3)(-1) + \frac{(0.3)^2}{2!}(2) + \frac{(0.3)^3}{3!}(-2) + \frac{(0.3)^4}{4!}(2)$$

$$y_3 = 0.781636$$

$$y_4 = y_0 + h_4 y' + \frac{h_4^2}{2!} y'' + \frac{h_4^3}{3!} y''' + \frac{h_4^4}{4} y''''$$

$$y_4 = 1 + (0.4)(-1) + \frac{(0.4)^2}{2!}(2) + \frac{(0.4)^3}{3!}(-2) + \frac{(0.4)^4}{4!}(2)$$

$$y_2 = 0.740640$$

إن متسلسلة تايلور تعتبر مرجعا رئيسيا في تنصيف الطرق العددية المختلفة لحلول المعادلات التفاضلية من ناحية أخرى تعتبر غير ملائمة لاستعمالها على الآلة الحاسبة الالكترونية بسبب الحاجة إلى حساب المشتقات العالية والذي يزداد صعوبة لكما ازدادت الدالة $f(x, y)$ تعقيدا.

(b2-6) طريقة أويلر Euler Method

تتلخص هذه الطريقة بتوفير الشروط عند أول نقطة أو ما يسمى بالقيمة الابتدائية للمسالة وتمثل هذه الطريقة للحل التكاملي بالبدء عند النقطة المعرفة والتقدم خطوة خطوة باتجاه مجال التكامل الدالة وتعتبر هذه الطريقة ابسط الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية حيث إن الحل يعتمد على تقسيم مجال الحل التكاملي إلى خطوات متعددة ذات عرض (h) على طول الاحداثي (x) كما مبين في الشكل التالي والذي فيه ابتعاد الحل العددي (التقريبي) على المنحني الصحيح إذ يمكن القول بان هذه الطريقة غير قادرة على أعطاء الحلول المضبوطة مهما كانت قيمة (h) صغيرة جدا.
والقاعدة المتبعة لاحتساب الدالة (y) عند أي قيمة بالنسبة (x) من خلال متسلسلة تايلور والتي تنص على أيجاد الدالة (y) بجوار نقطة $(x = x_0)$ والتي تبعد بمسافة (h) هي:-

$$y_{(x+h)} = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} y^n \ldots\ldots\ldots 1$$

فلو أخذنا قيمة (h) صغيره جدا فان قيم $h^2, h^3, h^4, \ldots\ldots h^n$ تصبح صغيرة جدا خاصة وإنها تقسم على المقام وبذلك يمكن إهمال المعاملات من الدرجة الثانية أو أكثر وبذلك تختزل متسلسلة تايلور إلى حدين فقط وكما يلي:-

$$y_{(x+h)} = y(x) + hy'(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

وهذه هي المعادلة التي تم افتراضها من قبل اويلر في طريقته العددية المبسطة في حين يمكن التنويه إن بالإمكان استخدام معادلة (1) بتفاضلها ولكن من الصعوبة تضمين جميع مشتقات الدالة وحدودها المتعددة واعتمادا على المعادلة (2) يمكن إيجاد قيمة (y) على طول مجال التكامل العددي ويمكن توضيح **خوارزمية طريقة اويلر** كما يأتي:-

$$1/\; x_i = a + ih$$

$$2/\; h = \frac{b-a}{n}$$

$$3/\; y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

$$\vdots$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

مثال:-

حل السؤال التالي باستخدام طريقة اويلر إذا علمت إن الفترة المغلقة [0 ,1] وان قيمة $y_0 = 1$ حيث إن n =5

dy/dx= x +y

$$1/\ x_i = a + ih, i = 1,2,3,4,4$$
$$x_0 = 0 + 0 \times 0.2 = 0$$
$$x_1 = 0 + 1 \times 0.2 = 0.2$$
$$x_2 = 0 + 2 \times 0.2 = 0.4$$
$$x_3 = 0 + 3 \times 0.2 = 0.6$$
$$x_4 = 0 + 4 \times 0.2 = 0.8$$
$$x_5 = 0 + 5 \times 0.2 = 1.0$$

$$2/\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$
$$i = 0$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + (0.2)[x_0 + y_0] = 1 + 0.2[0 + 1] = 1.2$$
$$i = 1$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.2 + (0.2)[x_1 + y_2] = 1.2 + (0.2)[0.2 + 1.2] = 1.48$$
$$i = 2$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.48 + (0.2)[x_2 + y_2] = 1.48 + (0.2)[0.4 + 1.48] = 1.856$$
$$i = 3$$
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)$$
$$y_4 = 1.856 + (0.2)[0.6 + 1.856] = 2.347$$
$$i = 4$$
$$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4)$$
$$y_5 = 2.347 + (0.2)[0.8 + 2.347] = 2.976$$

واجب:-

حل السؤال التالي باستخدام طريقة اويلر إذا علمت إن الفترة المغلقة [2 ,1] وان قيمة $y_0 = 0.5$ حيث إن n =5

dy/dx= 1 +y/x

(c2-6) طريقة رانج-كوتا (رنكة-كتا) Euler Method

تعود هذه الطريقة إلى العالمان الألمانيان رانج -كوتا وتعتبر هذه الطريقة من الطرق الواسعة الاستعمال لكونها من الطرق التي تحتاج إلى قيمة أولية واحدة معلومة للبدء بالحل وتتجنب المشتقات من الدرجات العليا وفي نفس الوقت نحصل على نتائج جيدة ودقيقة مقارنة بالعمليات الحسابية المستخدمة والعمليات الحسابية المتكررة التي نحتاجها فقط هي إيجاد قيمة الدالة (f) عند نقاط مختارة يمكن اشتقاق جميع طرق رانج-كوتا باستخدام متسلسلة تايلور ويمكن الحصول على صيغ مختلفة لهذه الطرق وتكون الدرجة الثانية والثالثة والرابعة.

وتعتبر طريقة رانج –كوتا من الدرجة الرابعة أفضل هذه الطرق بسبب قلة العمليات الحسابية المستخدمة للحصول على نتائج دقيقة جدا مقارنة بالطرق الأخرى ومن الدرجة العليا.

(صيغة رانج –كوتا ذات الرتبة الثانية)

حيث إن القوانين المستخدمة في هذه الطريقة هي:-

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n), k_2 = hf(x_{n+h}, y_{n+k_1})$$

مثال1:- حل المعادلة التفاضلية التالية عدديا باستخدام طريقة رانج –كوتا ذات الرتبة الثانية علما إن المعلومات المتوفرة هي كالأتي:-
dy/dx= x +y,   n =5 حيث إن $y_0 = 1$. وان قيمة [1, 0]

$$1/\ x_i = a + ih, i = 1,2,3,4,4$$
$$x_0 = 0 + 0 \times 0.2 = 0$$
$$x_1 = 0 + 1 \times 0.2 = 0.2$$
$$x_2 = 0 + 2 \times 0.2 = 0.4$$
$$x_3 = 0 + 3 \times 0.2 = 0.6$$
$$x_4 = 0 + 4 \times 0.2 = 0.8$$
$$x_5 = 0 + 5 \times 0.2 = 1.0$$

$$2/\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$
$$i = 0$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] = 1 + \frac{1}{2}[0.2 + 0.28] = 1.24$$
$$k_1 = hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0.2(0+1) = 0.2$$
$$k_2 = hf(x_{0+h}, y_{0+k_1}) = 0.2[(0+0.2) + (1+0.2)] = 0.28$$

$$i = 1$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] = 1.24 + \frac{1}{2}[0.288 + 0.384] = 1.576$$
$$k_1 = hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0.2[0.2 + 1.24] = 0.288$$
$$k_2 = hf(x_{1+h}, y_{1+k_1}) = 0.2[(0.2+0.2) + (1.24 + 0.288] = 0.384$$

$$i = 2$$
$$y_3 = y_2 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] = 1.576 + \frac{1}{2}[0.3952 + 0.51424] = 2.0307$$
$$k_1 = hf(x_2, y_2) = 0.2(0.4 + 1.576) = 0.3952$$
$$k_2 = hf(x_{2+h}, y_{2+k_1}) = 0.2[(0.4+0.2) + (1.576 + 0.3952)] = 0.51424$$

$$i = 3$$
$$y_4 = y_3 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] = 2.0307 + \frac{1}{2}[0.52614 + 0.671368] = 2.629454$$
$$k_1 = hf(x_3, y_3) = h(x_3 + y_3) = 0.2[0.6 + 2.0307] = 0.52614$$
$$k_2 = hf(x_{3+h}, y_{3+k_1}) = 0.2[(0.6+0.2) + (2.0307 + 0.52614] = 0.671368$$

$$i = 4$$
$$y_5 = y_4 + \frac{1}{2}[k_1 + k_2] = 2.629454 + \frac{1}{2}[0.6858908 + 0.863069] = 3.4039339$$
$$k_1 = hf(x_4, y_4) = h(x_4 + y_4) = 0.2[0.8 + 2.629454] = 06858908$$
$$k_2 = hf(x_{4+h}, y_{4+k_1}) = 0.2[(0.8+0.2) + (2.629454 + 0.6858908)] = 0.863069$$

(صيغة رانج ـكوتا ذات الرتبة الثالثة)

حيث إن القوانين المستخدمة في هذه الطريقة هي:-

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left[L_1 + 4L_2 + L_3\right]$$

$$L_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$L_2 = hf(x_{n+\frac{h}{2}}, y_{n+\frac{L_1}{2}})$$

$$L_3 = hf(x_{n+h}, y_{n+2L_1-L_1})$$

مثال2:- حل المعادلة التفاضلية التالية عدديا باستخدام طريقة رانج ـكوتا ذات الرتبة الثالثة علما إن المعلومات المتوفرة هي كالأتي:-

dy/dx= x +y,   n =5 حيث إن y_0 = 1. وان قيمة [1, 0]

$$1/\, x_i = a + ih, i = 1,2,3,4,4$$
$$x_0 = 0 + 0 \times 0.2 = 0$$
$$x_1 = 0 + 1 \times 0.2 = 0.2$$
$$x_2 = 0 + 2 \times 0.2 = 0.4$$
$$x_3 = 0 + 3 \times 0.2 = 0.6$$
$$x_4 = 0 + 4 \times 0.2 = 0.8$$
$$x_5 = 0 + 5 \times 0.2 = 1.0$$

$$2/\, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

3/

$i = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left[L_1 + 4L_2 + L_3\right] = 1 + \frac{1}{6}\left[0.2 + 0.96 + 0.296\right] = 1.242667$$
$$L_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2(x_0 + y_0) = 0.2(0+1) = 0.2$$
$$L_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{L_1}{2}) = (0.2)(0 + 0.1 + 1 + 0.1) = 0.24$$
$$L_3 = hf(x_0 + h, y_0 + 2L_2 - L_1) = 0.2(0 + 0.2 + 1 + 0.48 - 0.2) = 0.296$$

$i = 1$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}\left[L_1 + 4L_2 + L_3\right] = 1.242667 + \frac{1}{6}\left[0.2885334 + 1.34954696 + 0.405781\right] = 1.583310$$
$$L_1 = hf(x_1, y_1) = 0.2(0.2 + 1.242667) = 0.2885334$$
$$L_2 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{L_1}{2}) = 0.2\left[0.2 + 0.1 + 1.242667 + 0.1442667\right] = 0.33738674$$
$$L_3 = hf(x_1 + h, y_1 + 2L_2 - L_1) = 0.2\left[0.2 + 0.2 + 1.242667 + 0.7477348 - 0.2885334\right]$$
$$L_3 = 0.405781$$

$i = 2$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}\left[L_1 + 4L_2 + L_3\right] = 1.583310 + \frac{1}{6}\left[0.396662 + 1.8253128 + 0.53986088\right] = 2.04361$$

$$L_1 = hf(x_2, y_2) = 0.2(0.4 + 1.583310) = 0.396662$$
$$L_2 = h(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{L_1}{2}) = 0.2\left(0.4 + 0.1 + 1.583310 + 0.198331\right) = 0.4563282$$
$$L_3 = hf(x_1 + h, y_1 + 2L_2 - L_1) = 0.2\left[0.4 + 0.2 + 1.583310 + 0.9126564 - 0.396662\right]$$
$$L_3 = 0.53986088$$

$$i = 3$$
$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}\left[L_1 + 4L_2 + L_3\right]$$
$$L_1 = hf(x_3, y_3) = 0.2\left[0.6 + 2.04361\right] = 0.528722$$
$$L_2 = hf(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{L_1}{2}) = 0.2\left[0.6 + 0.1 + 2.04361 + 0.264361\right] = 0.6015942$$
$$L_3 = hf(x_3 + h, y_3 + 2L_2 - L_1) = 0.2\left[0.6 + 0.2 + 2.04361 + 1.2031884 - 0.528722\right]$$
$$L_3 = 0.70361528$$
$$y_4 = 2.04361 + \frac{1}{6}\left[0.528722 + 2.4063768 + 0.70361528\right] = 2.650062$$

$$i = 4$$
$$y_5 = y_4 + \frac{1}{6}\left[L_1 + 4L_2 + L_3\right]$$
$$L_1 = hf(x_4, y_4) = 0.2\left[0.8 + 2.650062\right] = 0.6900124$$
$$L_2 = hf(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{L_1}{2}) = 0.2\left[0.8 + 0.1 + 2.650062 + 0.3450062\right] = 0.77901364$$
$$L_3 = hf(x_4 + h, y_4 + 2L_2 - L_1) = 0.2\left[0.8 + 0.2 + 2.650062 + 1.55802728 - 0.6900124\right]$$
$$L_3 = 0.903615376$$
$$y_5 = 2.650062 + \frac{1}{6}\left[0.6900124 + 3.11605456 + 0.903615376\right] = 3.435009$$

(صيغة رانج –كوتا ذات الرتبة الرابعة)

حيث إن القوانين المستخدمة في هذه الطريقة هي:-

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4\right]$$
$$m_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$m_2 = hf(x_{n+\frac{h}{2}}, y_{n+\frac{m_1}{2}})$$
$$m_3 = hf(x_{n+\frac{h}{2}}, y_{n+\frac{m_2}{2}})$$
$$m_4 = hf(x_{n+h}, y_{n+m_3})$$

مثال3:- حل المعادلة التفاضلية التالية عدديا باستخدام طريقة رانج –كوتا ذات الرتبة الرابعة علما إن المعلومات المتوفرة هي كالأتي:-

dy/dx= x +y, n =5 حيث إن $y_0 = 1$. وان قيمة [1, 0]

الحل:-

$$1/\,x_i = a + ih, i = 1,2,3,4,4$$
$$x_0 = 0 + 0 \times 0.2 = 0$$
$$x_1 = 0 + 1 \times 0.2 = 0.2$$
$$x_2 = 0 + 2 \times 0.2 = 0.4$$
$$x_3 = 0 + 3 \times 0.2 = 0.6$$
$$x_4 = 0 + 4 \times 0.2 = 0.8$$
$$x_5 = 0 + 5 \times 0.2 = 1.0$$

$$2/\,h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

3/

$i = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4] = 1 + \frac{1}{6}[0.2 + 0.48 + 0.488 + 0.2888] = 1.2428$$
$$m_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2(0+1) = 0.2$$
$$m_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{m_1}{2}) = 0.2\left[0 + \frac{0.2}{2} + 1 + \frac{0.2}{2}\right] = 0.24$$
$$m_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{m_2}{2}) = 0.2\left[0 + \frac{0.2}{2} + 1 + \frac{0.24}{2}\right] = 0.244$$
$$m_4 = hf(x_0 + h, y_0 + m_3) = 0.2[0 + 0.2 + 1 + 0.244] = 0.2888$$

$i = 1$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4] = 1.2428 + \frac{1}{6}[0.28856 + 3.37416 + 0.954536 + 0.4240136] = 2.0830116$$
$$m_1 = hf(x_1, y_1) = 0.2(0.2 + 1.2428) = 0.28856$$
$$m_2 = hf(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{m_1}{2}) = 0.2[0.2 + 0.1 + 1.2428 + 0.14428] = 1.68708$$
$$m_3 = hf(x_1 + h, y_1 + \frac{m_2}{2}) = 0.2[0.2 + 0.1 + 1.2428 + 084354] = 0.477268$$
$$m_4 = hf(x_1 + h, y_1 + m_3) = 0.2[0.2 + 0.2 + 1.2428 + 0.477268] = 0.4240136$$

$i = 2$

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4] = 2.0830116 + \frac{1}{6}[0.49660 + 1.13252 + 1.14644 + 0.65124] = 2.65414$$
$$m_1 = hf(x_2, y_2) = 0.2[0.4 + 2.0830116] = 0.49660$$
$$m_2 = hf(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{m_1}{2}) = 0.2[0.4 + 0.1 + 2.0830116 + 0.2483] = 0.56626$$
$$m_3 = hf(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{m_2}{2}) = 0.2[0.4 + 0.1 + 2.0830116 + 0.28313] = 0.57322$$
$$m_4 = hf(x_2 + h, y_2 + m_3) = 0.2[0.4 + 0.2 + 2.0830116 + 0.57322] = 0.65124$$

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4] = 2.65414 + \frac{1}{6}[0.650828 + 1.4718216 + 1.48882 + 0.83971] = 3.39600$$
$$m_1 = hf(x_3, y_3) = 0.2[0.6 + 2.65414] = 0.650828$$
$$m_2 = hf(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{m_1}{2}) = 0.2[0.6 + 0.1 + 2.65414 + 0.325414] = 0.7359108$$
$$m_3 = hf(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{m_2}{2}) = 0.2[0.6 + 0.1 + 2.65414 + 0.3679554] = 0.74441$$
$$m_4 = hf(x_3 + h, y_3 + m_3) = 0.2[0.6 + 0.2 + 2.65414 + 0.74441] = 0.83971$$

$$i = 4$$
$$y_5 = y_4 + \frac{1}{6}[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4] = 3.39600 + \frac{1}{6}[0.8392 + 1.88624 + 1.907024 + 1.0699024] = 4.3463944$$
$$m_1 = hf(x_4, y_4) = 0.2(0.8 + 3.39600) = 0.8392$$
$$m_2 = hf(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{m_1}{2}) = 0.2[0.8 + 0.1 + 3.39600 + 0.4196] = 0.94312$$
$$m_3 = hf(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{m_2}{2}) = 0.2[0.8 + 0.1 + 3.39600 + 0.47156] = 0.95312$$
$$m_4 = hf(x_4 + h, y_4 + m_3) = 0.2[0.8 + 0.2 + 3.39600 + 0.953512] = 1.0699024$$

(d2-6) طريقة ادم –بشفورت(ادم-مولتن) Adam- Moulton (Adam-Bash forth) Method

إن الخوارزمية المستخدمة للحساب طريقة ادم هي كالأتي:-

- نقوم بحساب

$$h = \frac{b-a}{n}$$

- نحسب كل من

$$x_i = a + ih$$

- نقوم بإيجاد كل من y_1, y_2, y_3 باستخدام إحدى الطرق تايلور أو اويلور أو رانج –كوتا.
- نقوم بحساب y_{i+1} عندما تكون قيمة $i = 3,4,5,\ldots$ باستخدام القانون الأتي:-

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}[(55 f_i) - (59 f_{i-1}) + (37 f_{i-2}) - (9 f_{i-3})]$$

مثال 1:- حل المعادلة التفاضلية التالية عدديا باستخدام طريقة ادم – مولتن علما إن المعلومات المتوفرة هي كالأتي:-
dy/dx= x +y, n =5 حيث إن $y_0 = 1$. وان قيمة [0.5, 0]

$$1/h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0}{5} = 0.1$$

$$2/x_i = a + ih, i = 1,2,3,4,5$$
$$x_0 = 0 + 0 \times 0.1 = 0$$
$$x_1 = 0 + 1 \times 0.1 = 0.1$$
$$x_2 = 0 + 2 \times 0.1 = 0.2$$
$$x_3 = 0 + 3 \times 0.1 = 0.3$$
$$x_4 = 0 + 4 \times 0.1 = 0.4$$
$$x_5 = 0 + 5 \times 0.1 = 0.5$$

نحسب كل من y_1,y_2,y_3 وكالاتي:-

$$3/\ y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0+1) = 1.1$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1+1.1) = 1.22$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2+1.22) = 1.362$$

ولحساب كل من y_4, y_5 سوف نستخدم طريقة ادم –بشفورت وحسب القانون الأتي:-

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[(55 f_i) - (59 f_{i-1}) + (37 f_{i-2}) - (9 f_{i-3})\right]$$
$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\left[55 f_3 - 59 f_2 + 37 f_1 - 9 f_0\right]$$
$$y_4 = 1.362 + \frac{0.1}{24}\left[(55)(1.662) - (59)(1.42) + (37)(1.2) - (9)(1)\right] = 1.5412$$
$$f_3 \to f(x_3, y_3) = 0.3 + 1.362 = 1.662$$
$$f_2 \to f(x_2, y_2) = 0.2 + 1.22 = 1.42$$
$$f_1 \to f(x_1, y_1) = 0.1 + 1.1 = 1.2$$
$$f_0 \to f(x_0, y_0) = 0 + 1 = 1$$
$$y_5 = y_4 + \frac{h}{24}\left[55 f_4 - 59 f_3 + 37 f_2 - 9 f_1\right]$$
$$f_4 = f(x_4, y_4) = 0.4 + 1.5412 = 1.9412$$
$$y_5 = 1.5412 + \frac{0.1}{24}\left[(55)(1.9412) - (59)(1.662) + (37)(1.42) - (9)(1.2)\right] = 1.7514$$

x	y
0	1
0.1	1.1
0.2	1.22
0.3	1.362
0.4	1.5412
0.5	1.7515

مثال 2:- حل المعادلة التفاضلية التالية عدديا باستخدام طريقة ادم – مولتن علما إن المعلومات المتوفرة هي كالأتي:-
$dy/dx = y^2$, $n = 4$ حيث إن $y_0 = 1$. وان قيمة [5, 1]

الحل:-

$$1/\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

$$2/\ x_i = a + ih, i = 1,2,3,4,5$$
$$x_0 = 1 + 0\times 1 = 1$$
$$x_1 = 1 + 1\times 1 = 2$$
$$x_2 = 1 + 2\times 1 = 3$$
$$x_3 = 1 + 3\times 1 = 4$$
$$x_4 = 1 + 4\times 1 = 5$$

$$3/\ y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 1(1)^2 = 2$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2 + 1(2)^2 = 6$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 6 + 1(6)^2 = 42$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[(55 f_i) - (59 f_{i-1}) + (37 f_{i-2}) - (9 f_{i-3})\right]$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}\left[55 f_3 - 59 f_2 + 37 f_1 - 9 f_0\right]$$

$$y_4 = 42 + \frac{1}{24}\left[(55)(1764) - (59)(36) + (37)(4) - (9)(1)\right] = 4001.791667$$

$$f_3 \rightarrow f(x_3, y_3) = (y_3)^2 = (42)^2 = 1764$$

$$f_2 \rightarrow f(x_2, y_2) = (y_2)^2 = (6)^2 = 36$$

$$f_1 \rightarrow f(x_1, y_1) = (y_1)^2 = (2)^2 = 4$$

$$f_0 \rightarrow f(x_0, y_0) = (y_0)^2 = (1)^2 = 1$$

x	y
1	1
2	2
3	6
4	42
5	4001.791667