الفصل السابع

الإحداثيات القطبية
Paler coordinates

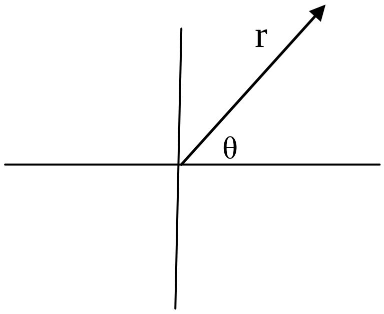
(1-7) المقدمة

الإحداثيات القطبية:- وهي الإحداثيات التي ترسم من القطب وتكون هذه الإحداثيات بدلالة $p(r,\theta)$.

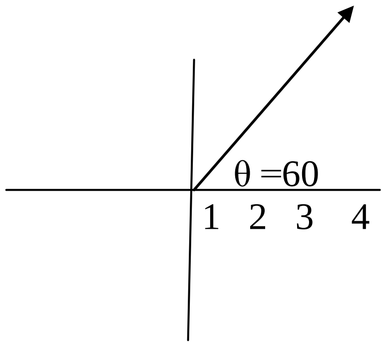
(r) :- تعني به طول الشعاع يرسم من القطب أو من نقطة الأصل إلى النقطة (m).

(θ):- وهي الزاوية المحصورة بين المحور (x) وبين الشعاع (r) إذا كانت (θ^{+}) موجبة تكون عكس عقارب الساعة أما إذا كانت (θ^{-}) سالبة تكون مع عقارب الساعة.

ملاحظة:- $\Pi = 180$



مثال:- إذا كانت لديك النقاط الآتية قم برسمها على محور الإعداد

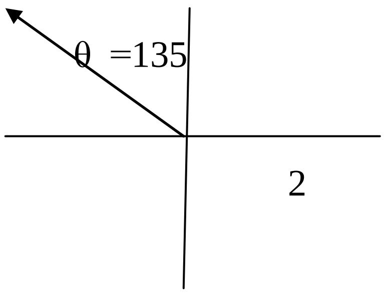


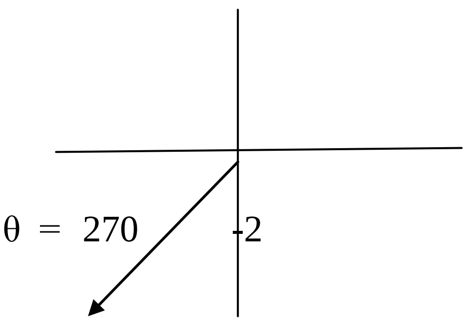
$1/\ p(r=4,\theta=\frac{\pi}{3}=60)$

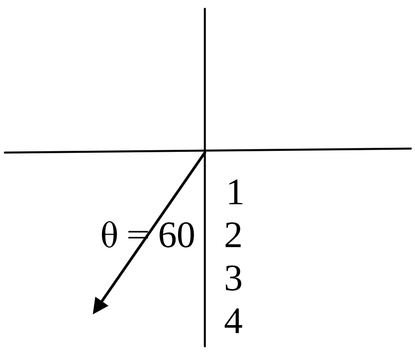
$2/\ p(r=2,\theta=\frac{3\pi}{4}=135)$

$3/\ p(r=-2,\theta=\frac{3}{2}\pi=270)$

$4/\ p(r=-4,\theta\frac{\pi}{3}=60)$







(2-7) لتحويل الإحداثيات من الاحداثي القطبي إلى الاحداثي الكارتيزي

الاحداثي القطبي يكتب بالشكل الأتي:- p(r, θ) أما الاحداثي الكارتيزي يكتب بالشكل الأتي:- p(x, y) حيث إن القوانين المستخدمة تكون بالشكل الأتي:-

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

أمثلة:- لتحويل النقاط من الاحداثي القطبي إلى الاحداثي الكارتيزي

$$1/\ p(3, \frac{\pi}{2}) \to p(x, y)$$

الحل

$$x = r\cos(\theta)$$
$$x = 3\cos(\frac{\pi}{2}) = 3\cos(90) = 3*0 = 0$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$y = 3*\sin(\frac{\pi}{2}) = 3\sin(90) = 3*1 = 3$$
$$p(x, y) = p(0,3)$$

$$2/\ p(2, \frac{-\pi}{6}) \to p(x, y)$$

الحل

$$x = r\cos(\theta)$$
$$x = 2\cos(\frac{-\pi}{6}) = 2\cos(-30) = 2*\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$y = 2*\sin(\frac{-\pi}{6}) = 2\sin(-30) = 2*\frac{-1}{2} = -1$$
$$p(x, y) = p(\sqrt{3}, -1)$$

$$3/\ p(7, 2\pi) \to p(x, y)$$

الحل

$$x = r\cos(\theta)$$
$$x = 7\cos(2\pi) = 7\cos(360) = 7*1 = 7$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$y = 7*\sin(2\pi) = 7\sin(360) = 7*0 = 0$$
$$p(x, y) = p(7,0)$$

ملاحظة:- دالة cos(θ) هي دالة زوجية أما دالة sin(θ) هي دالة فردية

(3-7) لتحويل الإحداثيات من الاحداثي الكارتيزي إلى الاحداثي القطبي

الاحداثي القطبي يكتب بالشكل الأتي:- p(r, θ) أما الاحداثي الكارتيزي يكتب بالشكل الأتي:- p(x, y) حيث إن القوانين المستخدمة تكون بالشكل الأتي:-

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = x = r\cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} = y = r\sin(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$$

حيث إن (r) تكون موجبة إذا كانت (p) واقعة على ضلع الانتهاء وان (r) تكون سالبة إذا كانت (p) واقعة على امتداد ضلع الانتهاء ومن العلاقة السابقة نحصل على

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \arctan(\frac{y}{x}) = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

أمثلة:- لتحويل النقاط من الاحداثي الكارتيزي إلى الاحداثي القطبي.

$$1/\ p(-1,-1) \rightarrow p(r,\theta)$$

الحل

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \pm\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-1}{-1} = 1$$

وان الزاوية (θ) التي ظلها يساوي (1) لها قيمة (Π / 4) ، (5Π/ 4) وبما إن الزاوية (Π/ 4) تقع في الربع الأول من محاور الإحداثيات وان النقطة (-1 ,-1) p تقع في الربع الثالث لذا فان النقطة p(r, θ) تقع على امتداد ضلع الانتهاء وان قيمة $r = -\sqrt{2}$ ولها الإحداثيات القطبية الأخرى (Π/4, $-\sqrt{2}$) و ($-\sqrt{2}$, -3Π/4) و ($-\sqrt{2}$, -7Π/4) (9Π/4 و $-\sqrt{2}$)

$$2/\ p(-5, 5\sqrt{3}) \rightarrow p(r,\theta)$$

الحل

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{-5} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{-\pi}{3} \rightarrow p(10, \frac{-\pi}{3}), p(10, \frac{2}{3}\pi)$$

(4-7) بعض المخططات باستخدام الإحداثيات القطبية

$$x^2 + y^2 = a^2 \rightarrow r^2 = a^2$$

$$\therefore r = a$$

تمثل معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل حيث إن الشعاع (r) =نصف القطر (a)

$$x^2+y^2=ax \rightarrow r^2=x^2+y^2$$

$$\frac{r^2}{r}=\frac{ar\cos\theta}{r}$$

$$r=a\cos(\theta)$$

معادلة دائرة مركزها محور السينات

$$x^2+y^2=ay \rightarrow r^2=x^2+y^2$$

$$\frac{r^2}{r}=\frac{ar\sin\theta}{r}$$

$$r=a\sin(\theta)$$

معادلة دائرة مركزها محور الصادات

(5-7) المعادلات القياسية بالإحداثيات الكارتيزية

- المعادلة القياسية للقطع الناقص:- حيث إن القانون المستخدم لحلها هو

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مثال1:- جد المعادلة القطبية للقطع الناقص إذا علمت إن المعادلة بالإحداثيات الكارتيزيه كانت كالأتي:-

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\therefore x=r\cos(\theta) \rightarrow x^2=r^2\cos^2(\theta)$$

$$\therefore y=r\sin(\theta) \rightarrow y^2=r^2\sin^2(\theta)$$

$$\frac{r^2\cos^2(\theta)}{25}+\frac{r^2\sin^2(\theta)}{36}=1 \rightarrow \times 900$$

$$\frac{900r^2\cos^2(\theta)}{25}+\frac{900r^2\sin^2(\theta)}{36}=900$$

$$36r^2\cos^2(\theta)+25r^2\sin^2(\theta)=900$$

$$r^2(36\cos^2(\theta)+25\sin^2(\theta))=900$$

- المعادلة القياسية للخط المستقيم:- حيث إن القانون المستخدم لحلها هو

$$ax+by+c=0$$

مثال1:- جد المعادلة القطبية للخط المستقيم إذا علمت إن المعادلة بالإحداثيات الكارتيزيه كانت كالأتي:-

$$3x+7y+8=0$$

الحل:-

$$3(r\cos(\theta))+7(r\sin(\theta))+8=0$$
$$r[3\cos(\theta)+7sun(\theta)]+8=0$$

أمثلة:- توضح كيفية يتم تحويل أي معادلة قطبية إلى معادلة كارتيزية

1/

$$r=\frac{4}{1-\cos(\theta)}$$
$$sol:-$$
$$r(1-\cos(\theta))=4$$
$$r-r\cos(\theta)=4$$
$$\pm\sqrt{x^2+y^2}-x=4\rightarrow\pm\sqrt{x^2+y^2}=4+x$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(4+x)^2$$
$$x^2+y^2=x^2+8x+16\Rightarrow y^2=x^2-x^2+8x+16$$
$$y^2=8x+16$$

$$2/r\cos(\theta)=2$$
$$sol:-$$
$$x=r\cos(\theta)$$
$$\therefore x=2$$

$$3/r^2\cos^2(\theta)-r^2\sin^2(\theta)=4$$
$$sol:-$$
$$x=r\cos(\theta)\rightarrow x^2=r^2\cos^2(\theta)$$
$$y=r\sin(\theta)\rightarrow y^2=r^2\sin^2(\theta)$$
$$x^2-y^2=4$$

مثال:- قم بتحويل المعادلة التالية من المعادلة ذات الصيغة الكارتيزية إلى الصيغة القطبية

$$x^2+(y-3)^2=9$$
$$sol:-$$
$$x^2+y^2-6y+9=9$$
$$r^2-6y=0$$
$$r^2-6(r\sin(\theta))=0$$
$$r^2-r6\sin(\theta)=0\rightarrow r(r-6\sin(\theta))=0$$
$$r=0$$
$$r-6\sin(\theta)=0\rightarrow r=6\sin(\theta)$$
$$r=\{0,6\sin(\theta)\}$$

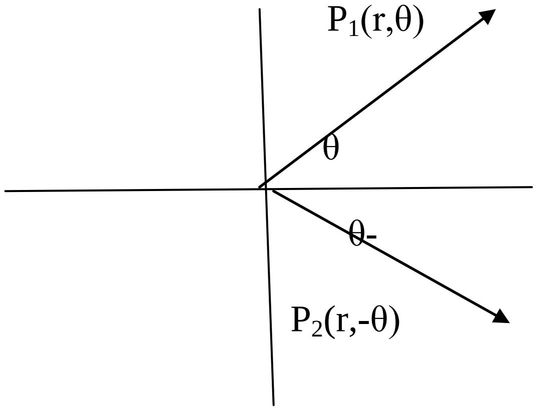
(6-7) تحليل المعادلة القطبية

هنالك بعض الاختبارات الأولية للمعادلة قبل حساب جدول القيم ومنها:-

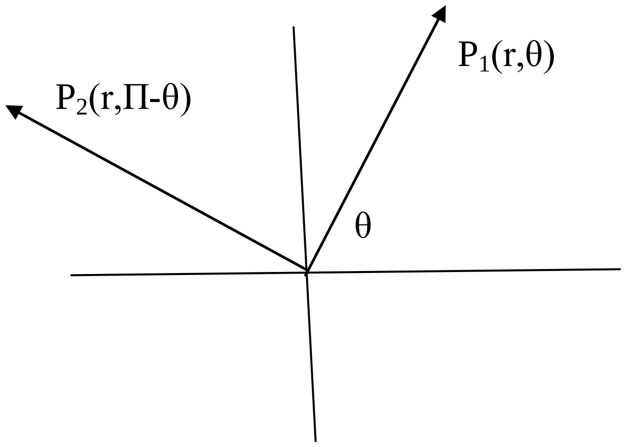
- التناظر بالنسبة للمحور القطبي:- $p(r, \theta)$, $p(r,-\theta)$ متناظرتان بالنسبة للمحور القطبي إذا لم تتغير المعادلة القطبية إذا تم تبديل (θ) بي ($-\theta$) في المعادلة القطبية كما في الشكل (1).

- النقطتان $p_1(r, \theta)$, $p_2(r,\Pi-\theta)$ متناظرة بالنسبة للمحور $\Pi/2$ وهكذا إذا لم تتغير المعادلة القطبية عند استبدال (θ) ب ($\Pi-\theta$) أينما وردت فان مخططها متناظرة بالنسبة للمحور $\Pi/2$ وكما في الشكل رقم (2).

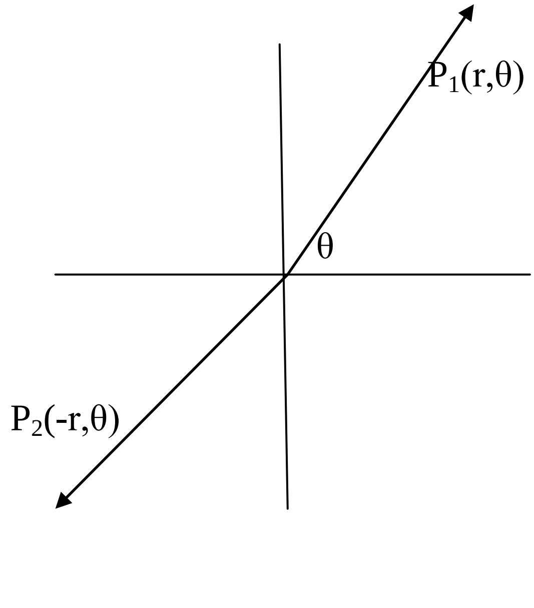
- النقطتان $p_1(r, \theta)$,$p_2(-r ,\theta)$ متناظرتان بالنسبة للقطب فإذا لم تتغير المعادلة القطبية عند استبدال r بي r– فان مخططها متناظر بالنسبة إلى القطب (على امتداد خط القطع)وكما في الشكل رقم (3)



الشكل رقم (1)



الشكل رقم (2)



الشكل رقم (3)

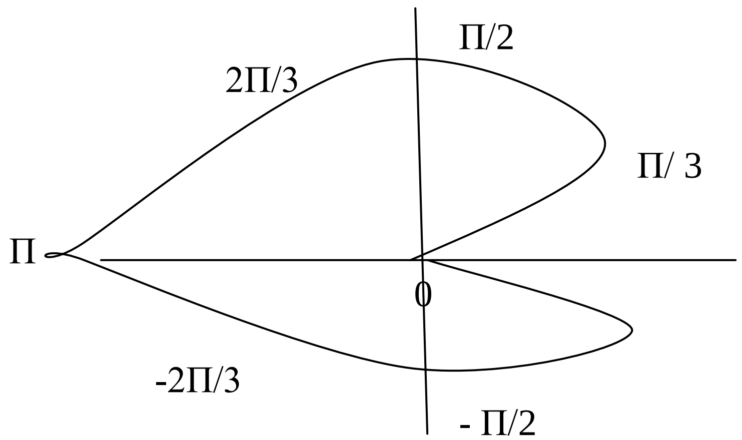
مثال1:- ارسم مخطط المعادلة $r = 1-\cos(\theta)$

الحل:- المنحني متناظر بالنسبة للمحور القطبي لان $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ عندما تزداد (الزاوية θ) من الصفر إلى Π فان $\cos(\theta)$ يقل تدريجيا من (1) إلى (-1)

$$0 \to \pi = \theta \text{تزداد}$$
$$1 \to -1 = \cos(\theta) \text{تقل}$$

وان $r = 1-\cos(\theta)$ يزداد من اقل قيمة وهي الصفر إلى أعلى قيمة وهي (2)وعندما تستمر (θ) بالزيادة من (Π) إلى (2Π) فان $\cos(\theta)$ يبدأ بالزيادة من (-1) إلى (1) وتبعا لذلك فان $r = 1-\cos(\theta)$ يبدأ بالتناقص من اعلى قيمة وهي(2) إلى أوطأ قيمة وهي الصفر.

θ	$r = 1-\cos(\theta)$
0	0
$\Pi/3$	1/2
$\Pi/2$	1
$2\Pi/3$	3/2
Π	2



يدعى هذا الشكل بمنحني القلب والتي معادلته تكون بالشكل الأتي: $r = 1-\cos(\theta)$

مثال2:- ارسم مخطط المعادلة $r^2 = 8\cos 2(\theta)$

الحل:-

المخطط متناظر حول المحور القطبي أي إن $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ أيضا المخطط متناظر حول المحور $\Pi/2$ أي إن

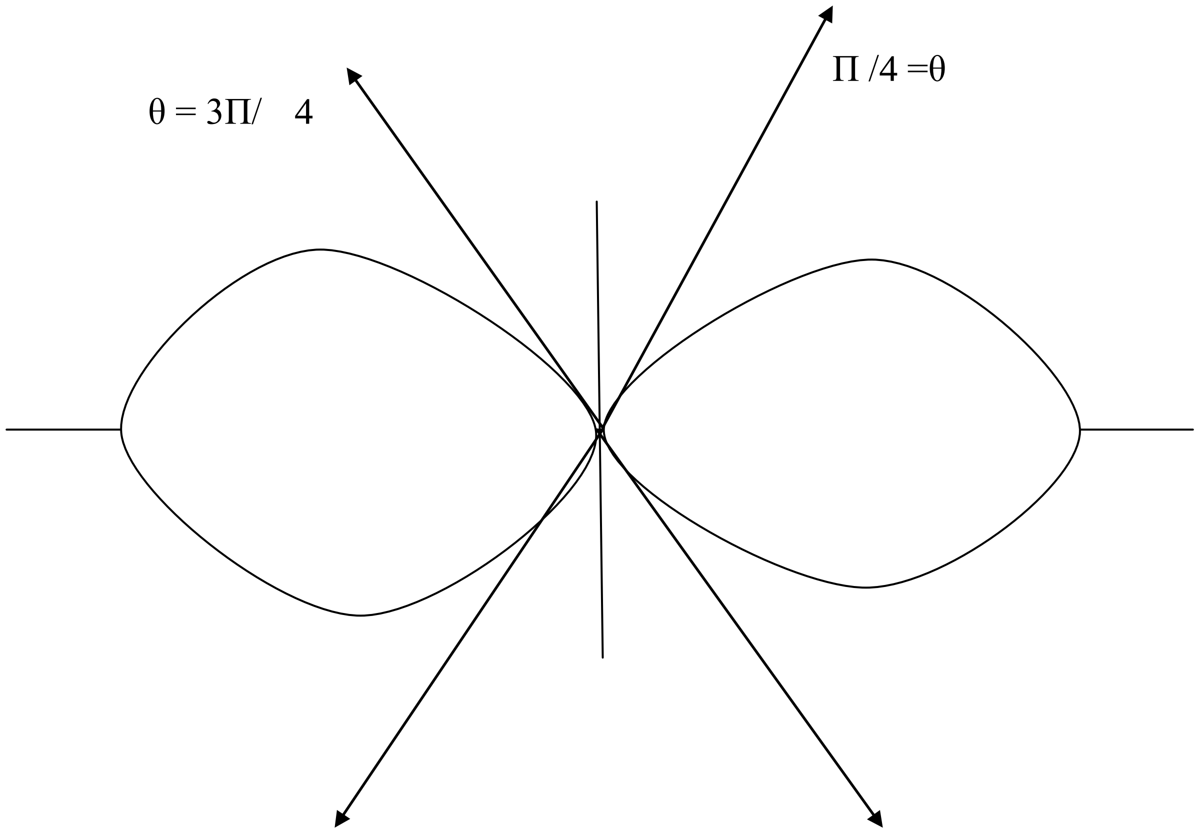
$$\cos 2(\pi-\theta) = \cos(-2\theta) = \cos(2\theta)$$

المخطط متناظر حول نقطة الأصل لان $r^2 = (-r)^2$ حيث إن من المفيد يتم أعادة كتابه المعادلة بالشكل الأتي:-

$$r^2 = 8\cos 2(\theta)$$
$$r = \sqrt{8\cos(\theta)}$$
$$r = \sqrt{4 \times 2\cos 2(\theta)}$$
$$r = \pm 2\sqrt{2\cos 2(\theta)}$$

والكمية تحت الجذر تكون (اكبر او تساوي صفر) لذلك فان قيمة (θ) تتراوح بين $(\Pi/4,0)$

θ	$r = 8\cos 2(\theta)$
0	2.8 -+
$\Pi/2$	2.6 -+
$\Pi/6$	2 -+
$\Pi/4$	0



يدعى هذا الشكل بمنحني ذو الورقتين والتي معادلته تكون بالشكل الأتي: $r = 8\cos 2(\theta)$

(7-7) الطول والمساحة في الإحداثيات القطبية

مساحة المنحني القطبي

إذا كانت الدالة $r = f(\theta)$ معرفة ضمن الفترة $\alpha \le \theta \le B$ فان مساحة المنطقة ضمن تلك الفترة تعرف كالأتي:-

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

مثال1:- جد مساحة المنطقة في المستوى والمحدد بمنحني القلب $r= 2(1-\cos(\theta))$

الحل:-

من الرسم نلاحظ إن نصف القطر (r) يمسح المنطقة بصورة كلية عندما تزداد الزاوية (θ) من ال(0) إلى (2Π) لذلك فان حدود التكامل تكون من θ و 2Π

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$A = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} 4(1+\cos(\theta))^2 d\theta$$

$$A = \int_{0}^{2\pi} 2(1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)) d\theta$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

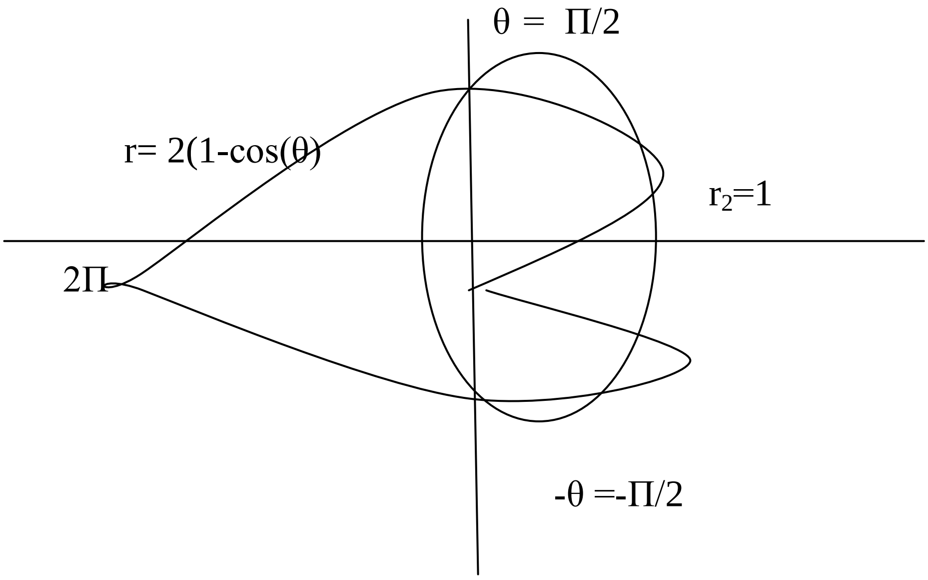
$$A=\int_{0}^{2\pi}(2+4\cos(\theta)+\frac{2(1+\cos 2(\theta))}{2})d\theta$$

$$A=\int_{0}^{2\pi}(3+4\cos(\theta)+\cos 2\theta)d\theta$$

$$A=\left[3\theta+4\sin(\theta)+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{0}^{2\pi}$$

$$A=\left[3(2\pi)+4\sin 2\pi+\frac{\sin 2(2\pi)}{2}\right]-\left[3(0)+4\sin(0)+\frac{\sin 2(0)}{2}\right]$$

$$A=\left[6\pi+0+0\right]-\left[0+4(0)+\frac{0}{2}\right]=6\pi$$



مثال2:- جد مساحة المنطقة المحصورة داخل الدائرة $r=1$ وخارج منحني القلب $r = 1-\cos(\theta)$.

الحل:-

نرسم المخطط لكل المنحنيين ثم نعيين المنطقة المطلوبة ويتم حساب مساحتها وكذلك إيجاد حدود التكامل ومن الرسم نلاحظ إن المنحني الداخلي هو $r = 1-\cos(\theta)$ وان نقاط التقاطع (إي حدود التكامل) هو من $\theta_1= -\Pi/2$ إلى $\theta_2 = \Pi/2$ لذلك فان:-

$$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2)d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2)d\theta$$

$$A=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}1-(1-2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)d\theta$$

$$A=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-1+2\cos(\theta)-\cos^2(\theta))d\theta$$

$$A=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos(\theta)-\frac{1+\cos 2(\theta)}{2})d\theta$$

$$A=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos(\theta)-\frac{1}{2}-\frac{\cos 2(\theta)}{2})d\theta$$

$$A=\left[2\sin(\theta)-\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A=\left[2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\sin 2\frac{\pi}{2}}{4}\right]-\left[2\sin(0)-\frac{0}{2}-\frac{\sin(0)}{4}\right]$$

$$A=\left[2-\frac{\pi}{4}-0\right]-[0-0-0]=2-\frac{\pi}{4}$$

$$A=2-\frac{\pi}{4}$$

طول منحني القطبي

للحصول على صيغة لحساب طول المنحني إذا كانت الدالة $r = f(\theta)$ معرفة ضمن الفترة $\alpha \le \theta \le B$ فان طول المنطقة ضمن تلك الفترة تستخدم الصيغ الآتية:-

$$x=r\cos(\theta)$$
$$x=f(\theta)\cos(\theta)$$
$$y=r\sin(\theta)$$
$$y=f(\theta)\sin(\theta)$$
$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\rightarrow \text{حفظ}$$

مثال1:- جد طول المساحة منحني القلب $r=1-\cos(\theta)$

الحل:-

أي نقطة على منحني الدالة تتحرك مرة واحدة على طول المنحني عندما تتغير (θ) من الصفر إلى 2Π أي إن حدود التكامل هي $0\le \theta\le 2\Pi$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta$$

$$r=1-\cos(\theta)\rightarrow\frac{dr}{d\theta}=\sin(\theta)$$

$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=(1-\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2$$
$$=1-2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)$$
$$=1-2\cos(\theta)+1$$
$$=2-2\cos(\theta)$$
$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos(\theta)}\,d\theta$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(\theta)}d\theta=\int\sqrt{2(2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta$$

$$L=\int_0^{2\pi}2\sin(\frac{\theta}{2})d\theta=\left[-4\cos(\frac{\theta}{2})\right]_0^{2\pi}$$

$$L=\left[-4\cos 2(\frac{\pi}{2})\right]-\left[-4\cos(\frac{0}{2})\right]=\left[-4(-1)\right]-\left[-4(1)\right]=4+4=8$$

ملاحظة:-

$$\sin^2(\theta)=\frac{1-\cos 2(\theta)}{2}$$

$$\sin(\frac{\theta}{2})=\frac{1-\cos(\theta)}{2}=2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos(\theta)$$

****الواجبات****

السؤال الأول:- جد المعادلة القطبية للقطع الناقص إذا علمت إن المعادلة بالإحداثيات الكارتيزيه كانت كالأتي:-

$$\frac{2x^2}{9}+\frac{3y^2}{16}=1$$

السؤال الثاني:- حول المعادلة قطبية إلى معادلة كارتيزية

$$1/r^2\cos(\theta)\sin(\theta)=4$$

$$2/r=1+2r\cos(\theta)$$