الفصل الرابع

الاندراج

(1-4) مقدمة

كثيرا ما تصادفنا حالات في واقعنا العلمي يكون المطلوب فيها تخمين قيمة غير معروفة على ضوء قيم معلومة لمجموعة من الملاحظات فعلى سبيل المثل ترغب الدولة لاعتبارات خاصة معرفة عدد سكان مدينة بغداد في كل سنة ابتداء من عام 1930ولغاية عام 1985 . إن المعلومات المتوفرة لدى وزارة التخطيط بهذا الخصوص هي بعض الإحصائيات لعدد سكان مدينة بغداد حصلت عليها خلال التعداد السكاني للقطر في السنوات (1977, 1965,1957, 1947, 1937) وعلى ضوء هذه البيانات علينا تخمين عدد السكان في السنوات المطلوبة.
إن عملية تخمين عدد السكان في إحدى السنوات الواقعة ضمن الفترة مابين 1977-1934 تسمى بالاندراج (interpolation) كما إن تخمين عدد السكان في غير هذه السنين يدعى بالاستكمال (extrapolation).

الاندراج:- هو تقدير أو تخمين قيمة مجهولة على ضوء قيم معلومة لدينا عندما يكون تقدير داخل الفترة (x_0,x_n).
الاستكمال:- هو تقدير أو تخمين قيمة مجهولة على ضوء قيم معلومة لدينا عندما يكون تقدير خارج الفترة (x_0,x_n).

وهنالك طرق عدده لإيجاد النقطة داخل الفترة وهي:-

- طريقة الرسم.
- طريقة متعددة حدود لانكراج.
- طريقة الفروقات المنتهية.
- طريقة المربعات الصغرى .

- طريقة الرسم البياني:- إن تخمين القيمة المطلوبة للدالة f(x) من خلال هذه الطريقة تكون غير جيدة وغير دقيقة و تواجهه صعوبة في إيجاد تلك القيمة لذلك تستبعد هذه الطريقة في التخمين.

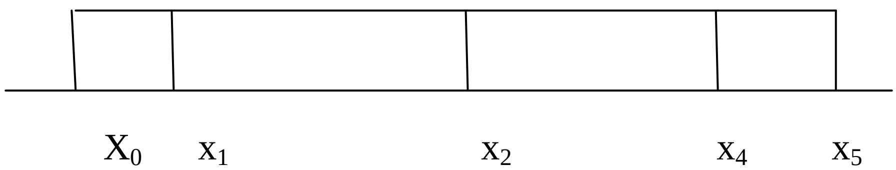
- طريقة متعددة الحدود لا نكرانج:- وهي طريقة سهلة وتحتاج إلى إجراء حسابات كثيرة خاصة إذا كان المطلوب تخمين قيمة f(x) لعدد من النقاط كما إن إضافة نقطة جديدة إلى البيانات الأولية لأجل زيادة الدقة يودي إلى إعادة الحسابات السابقة من البداية.

- أسلوب الفروقات المنتهية:- وهي طريقة سهلة تعتمد على قيمة الدوال ويستخدم هذا الأسلوب عادة عندما تكون f(x) قابلة للتقريب بمتعددة حدود بدرجة معينة وعندما تكون قيم الدالة معلومة في نقاط متتالية وبإبعاد متساوية كما أنها لا تحتوي على الميزة الموجودة في الطريقة السابقة والتي هي إعادة الحسابات من البداية كلما أضفنا قيمة جديدة.

- طريقة المربعات الصغرى:- فيمكن إيجاد الصيغة الرياضية للدالة باستخدام هذه الطريقة حيث إن هذا الأسلوب جيد ودقيق ولكن مع ذلك لا يعتبر الأمثل في هذا المجال وذلك لان علينا إعادة كافة العمليات الحسابية التي أجريت لإيجاد الدالة الاوفقية عند إضافة بيانات جديدة للبيانات الأصلية.

(2-4) طريقة لا نكرانج للاندراج Lagrange interpolation method

لتكن (f) دالة حقيقية مستمرة على الفترة [a , b] وقيمتها معلومة في النقاط $x_0, x_1,x_2,\ldots\ldots x_n$ لتخمين قيمة الدالة (f) في نقطة واحد أو عدة نقاط في الفترة [a, b] وتستخدم هذه الطريقة عندما تكون المسافات بين النقاط غير المتساوية فمثالا عندما تكون لدينا الفترة [a, b]



أما القانون المستخدم لهذه الطريقة

$$f(x)=p_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j).\pi_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

$$p_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i)l_{ij}$$

$$l_{ij}=\pi_{i=0}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

وان هذا الأسلوب يستخدم عندما تكون المسافات محددة وغير متساوية ويقسم إلى عدده أنواع:-

- الاندراج الخطي:- حيث يمثل المنحني بوتر رابط بين (x_0,x_1) حيث يمكن تحديد قيمة الدالة $f(x)$ عند x وذلك من خلال استخدام القانون الأتي:-

$$p(u)=f(x)=f(x_0)+u\Delta f(x_0)$$

$$u=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

مثال:- باستخدام الاندراج الخطي وبالاعتماد على الجدول الأتي جد قيمة الدالة عندما $x=9.2$

X	9.0	9.5	10.0
Ln(x)	2.1970	2.2510	2.3026

الحل:

$$p(u)=f(x)=f(x_0)+u\Delta f(x_0)$$

$$u=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{9.2-9.0}{9.5-9.0}=\frac{0.2}{0.5}=0.4$$

$$\Delta f(x_0)=f(x_1)-f(x_0)=2.2510-2.1970=0.0054$$

$$f(x)=\ln(9.2)=2.1970+(0.4)(0.054)=2.2186\cong 2.219$$

- الاندراج ألتربيعي:- يمكن تقريب المنحني الموصول بين النقطة (x_0) والنقطة (x_0+2h) بمنحني قطع مكافئ يمر بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1,f(x_1))$ و$(x_2,f(x_2))$ حيث يمثل هذا المنحني بالعلاقة الآتية:-

$$p(u)=f(x)=f(x_0)+u\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0).......,0\le u\le 1$$

مثال:- باستخدام الاندراج ألتربيعي وبالاعتماد على الجدول الأتي جد قيمة الدالة عندما $x=9.2$

X	9.0	9.5	10.0
Ln (x)	2.1970	2.2510	2.3026

الحل:-

$$p(u)=f(x)=f(x_0)+u\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)$$

$$\ln(9.2)=2.1970+(0.4)(2.2510-2.1970)+\frac{0.4(0.4-1)}{2!}(2.2510-2.1970)^2=2.2186$$

- **صيغة لانكرانج الاندراجيه للمتعددة الحدود**

يتم حساب قيمة الدالة f(x) عندما تكون المسافات غير متساوية بين الفترات (x_0,x_1) وذلك بالاعتماد على القوانين التالية:-

$$p_n(x) = f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} L_{ij} f(x_i)$$

$$L_{ij} = \pi_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

خوارزمية طريقة لانكرانج

- نقوم بإدخال كل من x_i , $f(x_i)$
- نقوم بحساب قيمة L_{ij} وذلك من خلال تطبيق القانون التالي:-

$$L_{ij}(x^*) = \underset{\substack{j=0 \\ j\neq i}}{\overset{n-1}{\pi}} \frac{(x^* - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

- ثم نقوم بتقدير قيمة الدالة عند نقطة معينة

$$p_n(x) = f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} L_{ij}(x^*) f(x_i)$$

- ثم نقوم بطابعة قيمة $f(x^*)$

مساوي طريقة لانكرانج

- كثرة العمليات الحسابية خصوصا عندما نقارنها مع المسائل الكبيرة حيث تحتاج إلى (3n+1) عملية من عمليات الضرب والقسمة و (2n+1) من عمليات الجمع والطرح.
- عند توفير بيانات جديدة ونرغب في استخدامها مع البيانات القديمة للحصول على تخمين أفضل فلابد من أعادة إجراء كافة العمليات السابقة.

مثال1:- جد تخمين لقيمة الدالة f(2.3) من الجدول الأتي:-

X	1.1	1.7	3.0
f(x)	10.6	15.2	20.3

الحل:-بما إن عدد النقاط المعطاة هو (3) لذا فان أعلى درجة لمتعددة حدود لاتكرانج هو (2) أي إن :-

$$p_n(x) = f(x_i) = \sum_{i=0}^{2} L_{ij}(x^*) f(x_i)$$

$$f(x=2.3) = \sum_{j=0}^{2} L_{ij} f(x_j) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1.7)(x - 3.0)}{(1.1 - 1.7)(1.1 - 3.0)} = \frac{1}{1.14}(x - 1.7)(x - 3.0)$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1.1)(x - 3.0)}{(1.7 - 1.1)(1.7 - 3.0)} = \frac{1}{-0.78}(x - 1.1)(x - 3.0)$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1.1)(x - 1.7)}{(3.0 - 1.1)(3.0 - 1.7)} = \frac{1}{2.47}(x - 1.1)(x - 1.7)$$

$$=\frac{1}{1.14}(x-1.7)(x-3.0)*(10.6)-\frac{1}{0.78}(x-1.1)(x-3.0)*(15.2)+\frac{1}{2.47}(x-1.1)(x-1.7)*(20.3)$$
$$=(9.29824)(x^2-4.7x+5.1)-(19.48717)(x^2-4.1x+3.3)+(8.21862)(x^2-2.8x+1.87)$$
$$=-1.98x^2+13.3x-1.56$$
$$f(2.3)=-1.98(2.3)^2+13.3(2.3)\ \ -1.56=18.53$$

X	1.1	1.7	2.3	3.0
f(x)	10.6	15.2	18.53	20.3

مثال2:-
باستخدام طريقة لانكرانج جد قيمة الدالة عند النقطة x =1.1 وذلك بالاعتماد على قيمة الجدول الأتي:-

X	1	3	4
f(x)	4	7	10

الحل:-

$$p_n(x)=f(x_i)=\sum_{i=0}^{2}L_{ij}(x^*)f(x_i)$$
$$f(x=2.3)=\sum_{j=0}^{2}L_{ij}f(x_j)=L_0f(x_0)+L_1f(x_1)+L_2f(x_2)$$
$$L_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=f(x_0)L_0$$
$$L_1=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=f(x_1)L_1$$
$$L_2=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=f(x_2)L_2$$
$$P(n)=(4)(\frac{(1.1-3)(1.1-4)}{(1-3)(1-4)})+(7)(\frac{(1.1-1)(1.1-4)}{(3-1)(3-4)})+(10)(\frac{(1.1-1)(1.1-3)}{(4-1)(4-3)})$$
$$P(n)=7.3467+1.015-0.6333=7.7284$$

X	1	1.1	3	4
f(x)	4	7.7284	7	10

(3-4) طريقة الاندراج العكسي Inverse interpolation method

لتكن x_i , $y_i= f(x_i)$ حيث إن i=0,1,2,3,4,….n مجموعة من النقاط المعطاة إذا كان المطلوب إيجاد قيمة x^* التي تقابل قيمة (y) (غير معطاة في الجدول) يعني y لا يساوي y_i فان هذه المسالة تسمى بالاندراج العكسي إذا إن أسلوب الحل يكمن في تطبيق صيغة لانكرانج مع إبدال كل x إلى y مكان بعضها البعض أي نعتبر (y) متغير مستقل و (x) متغير معتمد إي إن:-

$$y=f(x)\rightarrow x=G(y)$$
$$p_n(y)=\sum_{i=0}^{n}G(y_i)L_i(y)$$

ملاحظة:- يمكن اعتبار مسالة إيجاد الجذر (x^*) للمعادلة $f(x)=0$ بطريقة نيوتن- رافسون تطبيقا على الاندراج العكسي.
مثال:- إذا كانت لديك كل من $y(1)=12$ و$y(2)=15$ و$y(5)=25$ و$y(6)=30$ جد قيمة الدالة $y(4)$
الحل:-

$$L_0(y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y-y_3)}=\frac{(4-2)(4-5)(4-6)}{(1-2)(1-5)(1-6)}=-0.2$$

$$L_1(y)=\frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)}=\frac{(4-1)(4-5)(4-6)}{(2-1)(2-5)(2-6)}=0.5$$

$$L_2(y)=\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}=\frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(5-1)(5-2)(5-6)}=1$$

$$L_3(y)=\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}=\frac{(4-1)(4-2)(4-5)}{(6-1)(6-2)(6-5)}=-0.3$$

$$p(n)=f(x_0)L_0(x)+f(x_1)L_1(x)+f(x_2)L_2(x)+f(x_3)L_3(x)$$

$$p(n)=(12)(-0.2)+(15)(0.5)+(25)(1)+(30)(-0.3)=21.1$$

(4-4) الفروقات المنتهية Finite Differences

للتخمين قيمة الدالة عند نقطة معينة تستخدم هذه الطريقة في حالة كون النقاط ذات إبعاد متساوية حيث تعرف الفروقات المنتهية بأنها تلك الفروقات بين قيمتين من قيم الدالة وتسمى هذه الفروقات بالفروقات من الرتبة الأولى أما الفروقات من الرتبة الثانية فهي تلك الفروقات بين أي قيمتين وهو فرقين من الرتبة الأولى وهكذا بالنسبة للرتب المتبقية وبصورة عامة يعرف جدول الفروقات المنتهية بالشكل الأتي:-

x	f(x)	فرق من الرتبة 1	فرق من الرتبة 2	فرق من الرتبة 3	
a	a^-				
b	b^-	$(b^- - x^-)=x$			
c	c^-	$(c^- - b^-)=y$	$(y-x)=i$		
d	d^-	$(d^- - c^-)=z$	$(z-y)=j$	$(j-i)$	0

نلاحظ الجدول أعلاه يبدءا من أربعة نقاط وينتهي بالرتبة الثالثة ومن خصائص هذه الطريقة أنها تكون منتهية ولهذا تسمى بالفروقات المنتهية.

ملاحظة:- عندما تكون الدالة (f) متعددة حدود من الدرجة (n) فان عمود الفروقات وهو (n-1) والأعمدة التي تليه تحتوي على أصفار والعكس صحيح أي انه إذا ما وجدت عمود الفروقات يحتوي على أصفار فان قيم الدالة تقع على متعددة حدود بدرجة تساوي اعلى رتبة للعمود الفروقات غير الصفرية ومن الناحية الفعلية لا تحتوي أعمدة الفروقات على قيم متساوية إلى الصفر تماما بالقيم قريبة من الصفر وذلك للوجود أخطاء التدوير كما إن الدالة f(x) لا تكون متعدد حدود في الغالب.
تقسم الفروقات المنتهية الى ثلاثة أقسام

- الفروقات الأمامية.
- الفروقات الخلفية.
- الفروقات المركزية.

مثال:-

بين الفروقات المنتهية للدالة $f(x)= x^3-2x+1$ علما إن قيم $x=1,2,3,4,5,6$

x	f(x)	فرق من الرتبة 1	فرق من الرتبة 2	فرق من الرتبة 3	فرق منالرتبة4	فرق منالرتبة5
1	0					
2	5	5				
3	22	17	12			
4	57	35	18	6		
5	116	59	24	6	0	
6	205	89	30	6	0	0

(4-4أ) الفروقات الأمامية Forword Differences

إن القانون المستخدم للحساب الفروقات الأمامية هو كالأتي:-

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1}(f_{i+1} - f_i)$$
$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1}(f_{i+1}) - \Delta^{k-1}(f_i)$$

ملاحظة:- إذا كانت الفروقات بين قيم (x_i) متساوية هو فروقات منتهية أما إذا كانت القيم غير متساوية هو اندراج

مثال1:- ارسم جدول الفروقات الأمامية للبيانات الآتية:-

x_i	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

الحل:-

x	f(x)	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0	f_0				
x_1	f_1	$\Delta f_0=(f_1-f_0)$			
x_2	f_2	$\Delta f_1=(f_2-f_1)$	$\Delta^2 f_0=(\Delta f_1-\Delta f_0)$		
x_3	f_3	$\Delta f_2=(f_3-f_2)$	$\Delta^2 f_1=(\Delta f_2-\Delta f_1)$	$\Delta^3 f_0=(\Delta^2 f_1-\Delta^2 f_0)$	
x_4	f_4	$\Delta f_3=(f_4-f_3)$	$\Delta^2 f_2=(\Delta f_3-\Delta f_2)$	$\Delta^3 f_1=(\Delta^2 f_2-\Delta^2 f_1)$	$\Delta^4 f_0=(\Delta^3 f_1-\Delta^3 f_0)$

مثال2:- ارسم جدول الفروقات الأمامية للبيانات الآتية:-

x_i	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	5	10	17	26	37

الحل:-

x	f(x)	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2	5				
3	10	5			
4	17	7	2		
5	26	9	2	0	
6	37	11	2	0	0

(4-4ب) الفروقات الخلفية Backword Differences

ويعرف معامل المؤشر الفروقات الخلفية بالشكل الأتي (▼) فالفروقات الخلفية الأولى (▼) والثانية ($▼^2$) والثالثة ($▼^3$) ومن الرتبة k هي ($▼^k$) وان القانون المستخدم لهذه الطريقة هو

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1}(f_{i+1} - f_i)$$
$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1}(f_{i+1}) - \nabla^{k-1}(f_i)$$

مثال1:- ارسم جدول الفروقات الخلفية للبيانات الآتية:-

x_i	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

الحل:-

x	f(x)	▼	$▼^2$	$▼^3$	$▼^4$
x_0	f_0				
x_1	f_1	$▼f_1=(f_1-f_0)$			
x_2	f_2	$▼f_2=(f_2-f_1)$	$▼^2f_2$		
x_3	f_3	$▼f_3=(f_3-f_2)$	$▼^2f_3$	$▼^3f_3$	
x_4	f_4	$▼f_4=(f_4-f_3)$	$▼^2f_4$	$▼^3f_4$	$▼^4f_4$

مثال2:- ارسم جدول الفروقات الخلفية للبيانات الآتية:-

x_i	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	5	10	17	26	37

الحل:-

x	f(x)	$▼^1$	$▼^2$	$▼^3$	$▼^4$
2	5				
3	10	5			
4	17	7	2		
5	26	9	2	0	
6	37	11	2	0	0

(4-5أ) الفروقات التقدمية Forword Differences

إن مؤشر الفروق التقدمي هو $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ وقد عرف بهذا المصطلح نسبة إلى اعتماد المؤشر على قيمة الدالة y_i والقيمة التي تلها حيث يمكن إن نرمز للفروقات التقدمية بالرمز الأتي:- $y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \ldots..$
حيث إن القانون المستخدم لحساب الفروقات التقدمية بشكل عام يكون بالشكل الأتي:-

$$y_m = y_0 + \frac{m\Delta y_0}{1!} + \frac{m(m-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots\ldots\ldots..$$
$$h = x_1 - x_0$$
$$m = \frac{x_m - x_0}{h}$$

وهذه الصيغة تسمى بصيغة نيوتن التقدمية للاندراج حيث يقصد إن x_0 = تمثل أول قيمة بالجدول و x_m = تمثل القيمة المعطاة بالسؤال

مثال1:- جد القيمة التخمينية باستخدام صيغة نيوتن- التقدمية للاندراج علما إن قيمة $x_m= 150$ وذلك من خلال الاعتماد على الجدول الأتي:-

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	0	60	120	180	240	300
y	0	0.0824	0.2747	0.6502	1.3851	3.2224

الحل:-

x	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	0					
60	0.0824	0.0824				
120	0.2747	0.1923	0.1099			
180	0.6502	0.3755	0.1832	0.0733		
240	1.3851	0.7349	0.3594	0.1762	0.1029	
300	3.2224	1.8373	1.1029	0.7435	0.5668	0.4639

$$m=\frac{x_m-x_0}{h}=\frac{150-0}{60}=2.5$$

$$h=x_1-x_0=60-0=60$$

$$p_m=y_0+\frac{m\Delta y_0}{1!}+\frac{m(m-1)\Delta^2 y_0}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)\Delta^3 y_0}{3!}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\Delta^4 y_0}{4!}+$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\Delta^5 y_0}{5!}$$

$$p_n=0+\frac{(2.5)(0.824)}{1!}+\frac{(2.5)(2.5-1)(0.1099)}{2!}+\frac{(2.5)(2.5-1)(2.5-2)(0.0733)}{3!}+\frac{(2.5)(2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)(0.1029)}{4!}$$
$$\frac{(2.5)(2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)(2.5-4)(0.4639)}{4!}=0.4365$$

مثال2:- في الجدول الأتي جد عدد الطلبة الذين حصلوا على درجة اقل من (45) باستخدام طريقة نيوتن التقدمية.

الدرجات	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
عدد الطلبة	31	42	51	35	31

الحل

الدرجات	عدد الطلاب	x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
30-40	31	40	31				
40-50	42	50	73	42			
50-60	51	60	124	51	9		
60-70	35	70	159	35	-16	-25	
70-80	31	80	190	31	-4	12	37

$$m=\frac{x_m-x_0}{h}=\frac{45-40}{10}=0.5$$
$$h=x_1-x_0=40-30=10$$
$$p_m=y_0+\frac{m\Delta y_0}{1!}+\frac{m(m-1)\Delta^2 y_0}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)\Delta^3 y_0}{3!}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\Delta^4 y_0}{4!}$$
$$p_n=31+\frac{(0.5)(42)}{1!}+\frac{(0.5)(0.5-1)(9)}{2!}+\frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)(-25)}{3!}+\frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3)(37)}{4!}=47.868\cong 48$$

ملاحظة:- طريقة نيوتن- الأمامية (التقدمية) تستخدم عندما تكون (x) قريبة من النصف الأول للجدول أما طريقة نيوتن الخلفية (التراجعية) تستخدم عندما تكون (x) تقع في النصف الخلفي للجدول.

(4-5ب) الفروقات التراجعية Backword Differences

لإيجاد قيمة تقريبية ل f(x) عندما تكون (x) قرب نهاية الجدول وتسمى بصيغة نيوتن التراجعية للاندراج

$$y_m=y_0+\frac{m\nabla y_0}{1!}+\frac{m(m+1)\nabla^2 y_0}{2!}+\frac{m(m+1)(m+2)\nabla^3 y_0}{3!}+..........$$
$$h=x_1-x_0,\ m=\frac{x_m-x_0}{h}$$

مثال1:- جد تخمين لعدد الطلبة الذين حصلوا على درجة اقل من (75) للبيانات الآتية:-

الدرجات	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
عدد الطلبة	31	42	51	35	31

الحل:-

الدرجات	عدد الطلاب	x	y	∇	∇^2	∇^3	∇^4
30-40	31	40	31				
40-50	42	50	73	42			
50-60	51	60	124	51	9		
60-70	35	70	159	35	-16	-25	
70-80	31	80	190	31	-4	12	37

$$m=\frac{x_m-x_0}{h}=\frac{75-80}{10}=-0.5$$
$$h=x_1-x_0=40-30=10$$
$$p_m=y_0+\frac{m\nabla y_0}{1!}+\frac{m(m+1)\nabla^2 y_0}{2!}+\frac{m(m+1)(m+2)\nabla^3 y_0}{3!}+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)\nabla^4 y_0}{4!}$$
$$p_n=190+\frac{(-0.5)(31)}{1!}+\frac{(-0.5)(-0.5+1)(-4)}{2!}+\frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+2)(12)}{3!}+\frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+2)(-0.5+3)(37)}{4!}$$
$$=173.3$$

مثال2:- جد قيمة تقريبية للدالة cos(x) عندما تكون x= 0.25 بالاعتماد على الجدول الأتي:-

x	0	0.1	0.2	0.3
Cos(x)	1	0.995	0.98007	0.95534

الحل:-
نلاحظ من الجدول أعلاه إن قيم (x) متساوية لا يمكن استخدام الاندراج لذلك سوف نستخدم أسلوب الفروقات أما الأمامي (التقدمية) أو الخلفية (التراجعية)وبما إن قيمة x=0.25 وهي تقع في النصف الثاني من الجدول لذلك سوف نستخدم الفروقات التراجعية .

x	y=Cos(x)	∇^1	∇^2	∇^3
0	1			
0.1	0.995	-0.005		
0.2	0.98007	-0.01493	-0.00993	
0.3	0.95534	-0.02473	-0.0098	0.00013

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} = \frac{0.25 - 0.3}{0.1} = -0.5$$
$$h = x_1 - x_0 = 0.1 - 0 = 0.1$$
$$p_m = y_0 + \frac{m\nabla y_0}{1!} + \frac{m(m+1)\nabla^2 y_0}{2!} + \frac{m(m+1)(m+2)\nabla^3 y_0}{3!}$$
$$p_n = 0.95534 + \frac{(-0.5)(-0.02473)}{1!} + \frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.0098)}{2!} + \frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+2)(0.00013)}{3!}$$
$$= 0.96892$$

الفرق مابين الفروقات التقدمية والفروقات التراجعية

الفروقات التقدمية	**الفروقات التراجعية**
1- دائما تكون قيمة (x)تقع في بداية الجدول (أي في النصف الأول من الجدول)	1-دائما تكون قيمة (x)تقع في نهاية الجدول (أي في النصف الثاني من الجدول)
2- x_m يتم أخذها من السؤال x_0تمثل أول قيمة في الجدول من فيم (x)لذلك سوف تستخدم في القانون الأتي لحساب (m) $m = \frac{x_m - x_0}{h}$	2- x_m يتم أخذها من السؤال x_0تمثل أخر قيمة في الجدول من فيم (x)لذلك سوف تستخدم في القانون الأتي لحساب (m) $m = \frac{x_m - x_0}{h}$
3-تعتمد على جدول الفروقات الأمامية ونأخذ أول سطر من جدول الفروقات الأمامية والتي تمثل $\Delta y_0, \Delta y_0^2 \Delta y_0^3$	3-تعتمد على جدول الفروقات الخلفية ونأخذ أخر سطر من جدول الفروقات الخلفية والتي تمثل $\nabla y_0, \nabla^2 y_0\ \nabla^3 y_0$
4- يتم حسابها باستخدام القانون الأتي ويتم التوقف بقدر رتبة الفروقات بالجدول الفروقات الأمامية $y_m = y_0 + \frac{m\Delta y_0}{1!} + \frac{m(m-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)\Delta^3 y_0}{3!}$	4- يتم حسابها باستخدام القانون الأتي ويتم التوقف بقدر رتبة الفروقات بالجدول الفروقات الخلفية $y_m = y_0 + \frac{m\nabla y_0}{1!} + \frac{m(m+1)\nabla^2 y_0}{2!} + \frac{m(m+1)(m+2)\nabla^3 y_0}{3!}$

(6-4) الفروقات النسبية Divided Differences

إن صيغة الاندراج السابقة والتي تعتمد على الفروقات المنتهية الاعتيادية لا يمكن استخدامها عندما تكون قيم الدالة معلومة في نقاط لا تكون متساوية الإبعاد وذلك لان الفروقات المستعملة في تلك الصيغ لا تعتمد على التغير في قيم المتغير المستقل إذن علينا إيجاد نوع أخر من الفروقات الذي يأخذ بنظر الاعتبار هذا التغير يطلق على الفروقات التي تفي بهذا الغرض بالفروقات المنتهية النسبية.
لتكن لدينا مجموعة النقاط الآتية i=0,1,2,3,4….n و (x_i,y_i) حيث إن $y_i=f(x_i)$ وان قيم (x_i) ليست بالضرورة أن تكون تصاعدية أو تنازلية
إذن يعرف الفرق النسبي ذو الرتبة الأولى:-

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

لتكوين جدول الفروقات النسبية نتبع أسلوب مشابه لتكوين جدول الفروقات الاعتيادية وكما موضح بالجدول الأتي:-

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y	
x_0	y_0					
x_1	y_1	$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$				
x_2	y_2	$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0}$			
x_3	y_3	$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$	$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$		
x_4	y_4	$\Delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$	$\Delta^2 y_2 = \frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2}$	$\Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$	$\Delta^4 y_0 = \frac{\Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0}{x_4 - x_0}$	
x_5	y_5	$\Delta y_4 = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4}$	$\Delta^2 y_3 = \frac{\Delta y_4 - \Delta y_3}{x_5 - x_3}$	$\Delta^3 y_2 = \frac{\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2}{x_5 - x_2}$	$\Delta^4 y_1 = \frac{\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1}{x_5 - x_1}$	$\Delta^5 y_0 = \frac{\Delta^4 y_1 - \Delta^4 y_0}{x_5 - x_0}$

ملاحظة:- إذا كانت مجموعة البيانات من متعدد الحدود من الدرجة (n) فان العمود (n+1) في جدول الفروقات النسبية يحتوي على عناصر صفرية وبصيغة عامة يكون قانون الفروقات النسبية العام بالشكل التالي:-

$$y_m = y_0 + (x_m - x_0)\Delta y_0 + (x_m - x_0)(x_m - x_1)\Delta^2 y_0 + (x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2)\Delta^3 y_0 + ...$$

مثال1:- أكمل جدول الفروقات النسبية الآتية

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	-2	1	3	4	6
f(x)	-3	0	22	57	205

الحل:- نلاحظ إن قيم (x) غير متساوية وبما إن عدد x=5 إذن سوف نجد إلى الفرق الرابع وكالاتي:-

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0-(-3)}{1-(-2)} = 1$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{22-0}{3-1} = 11$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{57-22}{4-3} = 35$$

$$\Delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{205-57}{6-4} = 74$$

$$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} = \frac{11-1}{3-(-2)} = 2$$

$$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_2}{x_3 - x_1} = \frac{35-11}{4-1} = 8$$

$$\Delta^2 y_2 = \frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2} = \frac{74-35}{6-3} = 13$$

$$\Delta^3 y_0 \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0} = \frac{8-2}{4-(-2)} = 1$$

$$\Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1} = \frac{13-8}{6-1} = 1$$

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y
-2	-3				
1	0	1			
3	22	11	2		
4	57	35	8	1	
6	205	74	13	1	0

مثال2:- باستخدام صيغة الفروقات النسبية جد تخمين لقيمة f(2) امن جدول البيانات الآتية:-

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	1	4	6
f(x)	-10	20	14	30

الحل:-

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{20-(10)}{1-0} = 30$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14-20}{4-1} = -2$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{30-14}{6-4} = 8$$

$$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} = \frac{-2-30}{4-0} = -8$$

$$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_2}{x_3 - x_1} = \frac{8-(-2)}{6-1} = 2$$

$$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0} = \frac{2-(-8)}{6-0} = 1.667$$

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y
0	-10			
1	20	30		
4	14	-2	-8	
6	30	8	2	1.667

$$y_m = y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0 + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\Delta^3 y_0$$

$$y(2) = -10 + (2-0)(30) + (2-0)(2-1)(-8) + (2-0)(2-1)(2-4)(1.667) = 27.332$$