الفصل الخامس

التكامل

Integration

(1-5) المقدمة

التكامل :- هو عكس التفاضل (الاشتقاق) فإذا كانت لديك الدالة f(x) وقمنا باستخراج مشتقتها $f'(x)$ فان عملية التكامل تعني الحصول على الدالة الأصلية وذلك بالاعتماد على مشتقة الدالة وهنالك نوعين من التكامل:-

- التكامل غير المحدد Indefinite integrel

$$\int f(x)dx$$

- التكامل المحدد definite integrel

$$\int_a^b f(x)dx$$

وحسب التعريف أعلاه يمكن توضيح التكامل بالشكل الأتي:-

$$f(x)=5x^2+10$$
$$f'(x)=10x$$
$$\int f'(x)dx=\frac{10x^2}{2}+c=5x^2+c$$
$$f(x)\leftrightarrow f'(x)\leftrightarrow\int f''(x)dx$$

(2-5) خواص التكامل الغير محدد

$$1\int dx=x+c\leftrightarrow\int 1.dx=x+c$$
$$2\int kdx=k\int dx=kx+c$$
$$3\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$
$$4\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$
$$5\int -f(x)dx=-\int f(x)dx$$
$$6\int(ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^n}{n+1}.\frac{1}{a}+c\rightarrow(a,b)cons\tan ts$$
$$7\int\left(f(x)\right)^n.f'(x)dx=\frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}+c\rightarrow n\neq-1$$

EX:-Find the integral of the functions

$$1\int\left[5x^6-2x^4-6\right]dx$$
$$2\int\left[x^2+2x-5\right][x+1]dx$$
$$3\int(1-x)\sqrt{x}dx$$
$$4\int\frac{(1+x^2)^2}{\sqrt{x}}dx$$
$$5\int(1-u)(1+u+u^2)du$$

$1\int\left[5x^6-2x^4-6\right]dx$

$sol:-$

$\int 5x^6dx-\int 2x^4dx-\int 6dx$

$5\int x^6dx-2\int x^4dx-6\int dx$

$\frac{5x^7}{7}-2\frac{x^5}{5}-6x+c$

****

$2\int\left[x^2+2x-5\right]\left[x+1\right]dx$

$\frac{1}{2}\int(x^2+2x-5)2(x+1)dx$

$\frac{1}{2}\int(x^2+2x-5)(2x+2)dx$

$\frac{1}{2}\frac{\left[x^2+2x-5\right]^2}{2}+c$

$\frac{(x^2+2x-5)^2}{4}+c$

****

$3\int(1-x)\sqrt{x}dx$

$\int(1-x)x^{\frac{1}{2}}dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-x^{1+\frac{1}{2}})dx$

$\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{\frac{3}{2}}dx$

$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c$

$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c$

****

$4\int\frac{(1+x^2)^2}{\sqrt{x}}dx$

$\int(1+x^2)^2x^{\frac{-1}{2}}dx=\int(1+2x^2+x^4)(x^{\frac{-1}{2}})dx$

$\int(x^{\frac{-1}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{7}{2}})dx=\int x^{\frac{-1}{2}}dx+2\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{7}{2}}dx$

$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}+2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}+c$

$2x^{\frac{1}{2}}+\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9}+c$

$$5\int(1-u)(1+u+u^2)dx$$

$$\int(1+u+u^2-u-u^2-u^3)du$$

$$\int(1-u^3)du=\int 1du-\int u^3du=u-\frac{u^4}{4}+c$$

(3-5) التكامل محدد

إن التكامل المحدد هو نفس التكامل الغير محدد لكن محدود بحد أدنى هو (a) وحد أعلى هو (b)

$$\int_a^b f(x)dx$$

&**نظرية**& إذا كانت (f) الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [a ,b] فان التكامل المحدد ل (f) من a إلى b موجود.

(4-5) خواص التكامل محدد

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

$$2\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

$$3\int_a^b -f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx=f(x)exists$$

$$4\,f(x)\geq 0, when\rightarrow a\leq x\leq b\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

$$5\,f(x)\leq g(x), when\rightarrow a\leq x\leq b\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

$$6\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx,\ f(x)..cont[a,b]where, a\prec x\prec b$$

$$7\int_a^b x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b=\frac{1}{n+1}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]$$

EX1:-Find the integral of the functions

$$1\int_1^4 (x^3-2)dx$$

$$2\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$3\int_{-2}^0 \frac{dt}{(t+3)^2}$$

$$1\int_1^4 (x^3-2)dx$$

$$\int_1^4 x^3dx-2\int_1^4 dx \to \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^4 - [2x]_1^4$$

$$\left[\frac{(4)^4}{4}-2(4)+c\right]-\left[\frac{(1)^4}{4}-2(1)+c\right]$$

$$\frac{256}{4}-8+c-\frac{1}{4}+2-c=57.75$$

****

$$2\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\int_0^4 (x^2+9)^{\frac{-1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 (x^2+9)^{\frac{-1}{2}}\,2xdx$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^4=\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$

****

$$3\int_{-2}^0 \frac{dt}{(t+3)^2}$$

$$\int_{-2}^0 (t+3)^{-2}dt=\left[\frac{(t+3)^{-1}}{-1}\right]_{-2}^0=\frac{(0+3)^{-1}}{-1}-\frac{(-2+3)^{-1}}{-1}=\frac{(3)^{-1}}{-1}-\frac{(1)^{-1}}{-1}$$

$$\frac{-1}{3}+\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

Ex2:-

$$if\int_0^2 (5f(x)+2g(x))dx=30,\int_0^2 2f(x)dx=8 find\int_0^2 3g(x)dx=?$$

$sol:-$

$$5\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^2 g(x)dx=30$$

$$\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\frac{8}{2}=\int_0^2 f(x)dx=4$$

$$5(4)+2\int_0^2 g(x)dx=30$$

$$\frac{2}{2}\int_0^2 g(x)dx=\frac{30-20}{2}\Rightarrow\int_0^2 g(x)dx=\frac{10}{2}=5\to\int_0^2 g(x)dx=5$$

وبالتعويض عن قيم التكاملات أعلاه نحصل على

$$3\int_0^2 g(x)dx = 3(5) = 15$$

Ex3:-

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 3x^2, x \geq 2 \\ 4x, x \prec 2 \end{Bmatrix} find the$$

$$\int_0^5 f(x)dx = ?$$

Sol:-

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 4xdx + \int_2^5 3x^2dx$$

$$= \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{3x^3}{3}\right]_2^5 = \left[2x^2\right]_0^2 + \left[x^3\right]_2^5$$

$$= \left[2(2)^2 - 2(0)^2\right] + \left[(5)^3 - (2)^3\right] = 125$$

Ex4:-

$$\int_{-2}^2 |x-1|dx$$

Sol:-

$$\int_{-2}^2 |x-1|dx = |x-1| = \begin{Bmatrix} x-1, x \geq 1 \\ -x+1, \prec 1 \end{Bmatrix}$$

$$\int_{-2}^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^1 + \left[\frac{x^2}{x} - x\right]_1^2$$

$$\left[\left(1 - \frac{(1)^2}{2}\right) - (-2 - \left(\frac{-2}{2}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2\right] - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + 2 + \frac{4}{2} + \frac{4}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 = 5$$

<u>Double Integral التكامل الثنائي (5-5)</u>

$$\iint_D f(x,y)dA$$

$$D = [a,b],[c,d]$$

$$dA = \rightarrow dy.dx$$

$$dA = \rightarrow dx.dy$$

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d f(x,y)dx = \int_a^b Ldy$$

The properties of the Double integral خواص التكامل الثنائى (6-5)

$$1-\int_a^b\int_c^d kf(x,y)dxdy = k\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$$

$$2-\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA \pm \iint_D g(x,y)dA$$

$$3\iint_D f(x,y)dA \geq 0$$

$$4\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA,\ f(x,y)\geq g(x,y)$$

$$5\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D1} f(x,y)dA + \iint_{D2} f(x,y)dA + \dots\dots\dots\dots \iint_{DN} f(x,y)dA$$

$$\int_0^4 f(x) = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$$

Theorem1:- If f(x, y) continuous on [a ,b], [c ,d] then

$$\int_a^b\int_{f1(x)}^{f2(x)} f(x,y)dxdy = \int_c^d\int_{g1(y)}^{g2(y)} f(x,y)dydx$$

$EX1:-$

$$\int_0^1\int_0^x (-x-y)dydx$$

$sol:-$

$$\int_0^x (-x-y)dy = \left[-xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \left[-x(x)-\frac{x^2}{2}\right]-\left[-x(0)-\frac{0^2}{2}\right] = -x^2-\frac{x^2}{2}-0$$

$$=\frac{-2x^2-x^2}{2} = -\frac{3x^2}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{-3x^2}{2}dx = \frac{-3}{2}\int_0^1 x^2dx = \frac{-3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{-3}{2}\left[\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right] = \frac{-3}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$\int_0^1\int_y^1 (-x-y)dxdy$$

$sol:-$

$$\int_y^1 (-x-y)dx = \left[\frac{-x^2}{2}-yx\right]_y^1 = \left[\frac{-1}{2}-y\right]-\left[\frac{-y^2}{2}-y^2\right] = \frac{-1}{2}-y+\frac{y^2}{2}+y^2$$

$$\int_0^1 \left(\frac{-1}{2}-y+\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy = \left[\frac{-1}{2}y-\frac{y^2}{2}+\frac{3}{2}\frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

$$\left[\frac{-1}{2}(1)-\frac{(1)^2}{2}+\frac{(1)^3}{2}\right]-\left[\frac{-1}{2}(0)-\frac{(0)^2}{2}+\frac{(0)^3}{2}\right] = \frac{-1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$EX\,2:-$

$$\int_0^1\int_1^2 (x+y)dxdy$$

$sol:-$

$$\int_1^2 (x+y)dx = \left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_1^2 = \left[\frac{(2)^2}{2}+2y\right]-\left[\frac{1}{2}+y\right] = 2+2y-\frac{1}{2}-y = \frac{3}{2}+y$$

$$\int_0^1\left(\frac{3}{2}+y\right)dy = \left[\frac{3}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{3}{2}(0)+\frac{0}{2}\right] = \frac{4}{2} = 2$$

$EX\,3:-$

$$\int_0^1\int_0^1 (xy)dydx$$

$sol:-$

$$\int_0^1\left[\int_0^1 xydy\right]dx = \left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{x(1)^2}{2}-\frac{x(0)^2}{2}\right] = \frac{x}{2}-0 = \frac{1}{2}x$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1)^2}{2}-\frac{(0)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-0\right] = \frac{1}{4}$$

Theorem2:- If f(x, y) continuous on [a ,b], [c ,d] then

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d\int_b^a f(x,y)dydx$$

$$EX\,1:-find\iint_s f(x,y)dA, where. f(x,y) = xy(\sin xy^2)$$

$$s = \left[0,\frac{\pi}{2}\right],[0,1], dA = dydx$$

$SOL:-$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \left(xy\sin(xy^2)\right)dydx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \sin xy^2\, 2xydy\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-1}{2}\cos xy^2\right]_0^1 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-1}{2}\cos(1)^2+\frac{1}{2}\cos(0)\right]dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{-1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{-\pi}{2}}(-\cos x+1)dx = \frac{1}{2}\left[-\sin x+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\sin(\frac{\pi}{2})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-1\right] = \frac{1}{2}[90-1] = 44.5$$

(7-5) تطبيقات عن التكامل Applications of Integration

وتقسم إلى قسمين:-

- إيجاد المساحة بين منحني الدوال وبين المحاور x ,y.
- إيجاد الحجوم.
- إيجاد الأطوال.

(a7-5) إيجاد المساحة بين منحني الدالة وبين المحاور

(1a-7-5) إيجاد المساحة بين منحني الدالة وبين المحورx

لتكن لدينا الدالة y =f(x) مستمرة على الفترة المغلقة [a ,b] فان المساحة المحصورة بين الدالة والمحور x هي كالأتي:-

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ملاحظات:-

- إذا كانت $f(x) \geq 0$ فهذا يؤدي إلى أن تكون المساحة بين المنحني وأعلى المحور x.
- أما إذا كانت $f(x) < 0$ فهذا يؤدي إلى أن تكون المساحة بين المنحني وأسفل المحور x.
- قد يكون منحني الدالة ضمن الفترة المغلقة [a ,b] جزء منه فوق المحور x والجزء الأخر تحت المحور x وبذلك تكون المساحة كالأتي:-

$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

وهنالك حالتين لهذه الحالة:-

أ- إيجاد المساحة بين المنحني والمحور x مع وجود فترة مغلقة معطاة في هذه الحالة نقوم بإيجاد نقاط التقاطع وذلك بعد مساواة $f(x) = 0$ فإذا كانت النقاط المستخرجة تقع ضمن الفترة نجزأ التكامل أما إذا لا فلا يتم تجزأ التكامل.

EX1:- Find the area between the curve y = x^3 and the x-axis of [2 ,4]

Sol:-

$$f(x) = x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \notin [2,4]$$

$$A = \int_2^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 = \left[\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}\right] = 64 - 4 = 60unit$$

بما إن النقطة x=0 لا تقع ضمن الفترة أعلاه لذلك لن نلجأ إلى تجزأ التكامل.

EX2:- Find the area between the curve y = x-1 and the x-axis of [-1 ,2]

$$f(x) = x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \in [-1,2]$$

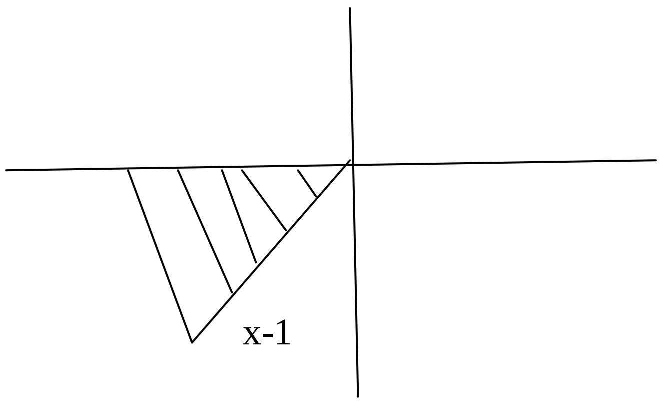
$$A = \int_{-1}^{1} f(x)dx \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} (x-1)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$A=\left[\frac{(1)^2}{2}-1\right]-\left[\frac{(-1)^2}{2}-(-1)\right]+\left[\frac{(2)^2}{2}-2\right]-\left[\frac{(1)^2}{2}-1\right]$$

$$A=\left[\frac{1}{2}-1\right]-\left[\frac{1}{2}+1\right]+\left[\frac{4}{2}-2\right]-\left[\frac{1}{2}-1\right]$$

$$A=\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}-1+2-2-\frac{1}{2}+1=\frac{-3}{2}unit$$



ب- إيجاد المساحة بين المنحني والمحور x مع عدم وجود فترة مغلقة معطاة في هذه الحالة نلجأ إلى نقاط التقاطع للمنحني مع المحور x وذلك بجعل f(x) =0 ومن ثم إيجاد نقاط التقاطع وهي تمثل حدود التكامل أما إذا كانت نقاط التقاطع للمنحني مع المحور x أكثر من نقطتين ففي هذه الحالة نجزأ التكامل.

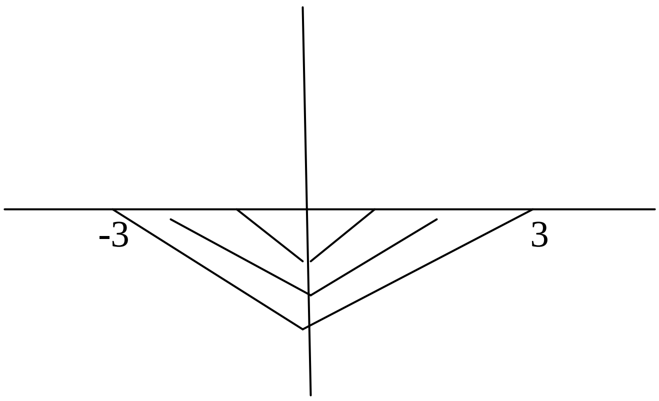
EX1:- Find the area between the curve $y = x^2-9$ and the x-axis of

$$f(x)=x^2-9=0\rightarrow x^2=9\rightarrow x=\pm 3$$

$$A=\int_{-3}^{3} f(x)dx=\int_{-3}^{3} x^2-9dx=\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_{-3}^{3}$$

$$A=\left[\left(\frac{3}{3}\right)^2-9(3)\right]-\left[\left(\frac{-3}{3}\right)^3-9(-3)\right]$$

$$A=\left(\frac{27}{3}-27\right)-\left(\frac{-27}{3}+27\right)=9-27+9-27=18-54=-36unit$$



EX2:- Find the area between the curve y = x^3-3x^2-x+3 and the x-axis of

$$sol:-$$
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - (x-3) = 0$$
$$f(x) = x^2(x-3) - (x-3) = 0$$
$$(x-3)(x^2-1) = 0$$
$$x-3 = 0 \rightarrow x = 3$$
$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \pm 1$$
$$\therefore x = -1,1,3$$
$$A = \int_{-1}^{1} x^3 - 3x^2 - x + 3dx + \int_{1}^{3} x^3 - 3x^2 - x + 3dx$$
$$A = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{3}$$
$$A = \left[\left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1)\right)\right] +$$
$$\left[\frac{(3)^4}{4} - (3)^3 - \frac{(3)^2}{2} + 3(3)\right] - \left[\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right]$$
$$A = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} + 3\right] + \left[\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3\right]$$
$$A = 4 + \frac{80}{4} - \frac{8}{2} - 20 = 4 + 20 - 4 - 20 = 0unit$$

(2a-7-5) إيجاد المساحة بين منحنى الدالة وبين المحورy

أـ إيجاد المساحة بين المنحني والمحور y مع وجود فترة مغلقة معطاة في هذه الحالة نقوم بإيجاد نقاط التقاطع وذلك بعد مساواة f(x) =0 فإذا كانت النقاط المستخرجة تقع ضمن الفترة نجزأ التكامل أما إذا لا فلا يتم تجزأ التكامل. حيث إن القانون المستخدم بهذه الطريقة

$$A = \int_{a}^{b} g(y)dy$$

EX1:- Find the area between the curve x=8+2y-y^2 and the y-axis of [-1 ,3]

$$x = 0 \rightarrow (8 + 2y - y^2) \times -1$$
$$y^2 - 2y - 8 = 0$$
$$(y-4)(y+2) \rightarrow y - 4 = 0 \rightarrow y = 4$$
$$A = \int_{-1}^{3} g(y)dy = \int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)dy = \left[8y - \frac{2y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3}$$
$$A = \left[8(3) + (3)^2 - \frac{(3)^3}{3}\right] - \left[8(-1) + (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \left[24 + 9 - \frac{27}{3}\right] - \left[-8 + 1 + \frac{1}{3}\right]$$
$$A = [33 - 9] - \left[-7 + \frac{1}{3}\right] = \frac{92}{3}$$

ب- إيجاد المساحة بين المنحني والمحورy مع عدم وجود فترة مغلقة معطاة في هذه الحالة نلجأ إلى نقاط التقاطع للمنحني مع المحورy وذلك بجعل $f(x) =0$ ومن ثم إيجاد نقاط التقاطع وهي تمثل حدود التكامل أما إذا كانت نقاط التقاطع للمنحني مع المحور yأكثر من نقطتين ففي هذه الحالة نجزأ التكامل.

(3a-7-5) إيجاد المساحة بين منحنيين

أ- لتكن $y_1= f(x)$ و $y_2 = g(x)$ داليتين مستمرتين في الفترة المغلقة [a ,b] وكانت

$$g(x) \le f(x), \forall x \in [a,b]$$

فان المساحة المحصورة بينهما تعرف بالشكل الأتي:-

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

ب لتكن $x_1=f(y)$ و$x_2 =g(y)$ داليتين مستمرتين في الفترة المغلقة [c ,d] فان المساحة المحصورة بينهما تعرف بالشكل الأتي:-

$$A = \int_c^d (x_1 - x_2)dy$$

$$A = \int_c^d f(y) - g(y)dy$$

أما طريقة الحل فهي:-

- نرسم الدالتين.
- إيجاد النقاط للتقاطع بين المنحنيين وذلك بجعل $y_1=y_2$ هذا بالنسبة إلى المتغير y أو $x_1=x_2$ وهذا بالنسبة للمتغير x.
- فإذا كانت نقطة التقاطع تنتمي إلى الفترة نجزأ التكامل وإلا لا يتم تجزأ التكامل (ملاحظة عندما الفترة تكون معطاة بالسؤال) إذا لم يذكر بالسؤال الفترة فان نقاط التقاطع بين المنحنيين هي تمثل حدود التكامل فإذا كانت أكثر من اثنين نجزأ التكامل.

EX1:- Find the area between the curves $y_1=x^2$ and $y_2=1/x$ in the travel [0.5,2]

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 = \frac{1}{x} = x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \in [0.5,2]$$

$$A = \int_{0.5}^{2} (y_1 - y_2)dx = \int_{0.5}^{1} (y_2 - y_1)dx + \int_{1}^{2} (y_1 - y_2)dx$$

$$A = \int_{0.5}^{1} (\frac{1}{x} - x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - \frac{1}{x})dx$$

$$A = \left[\ln(x) - \frac{x^3}{3} \right]_{0.5}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \ln(x) \right]_{1}^{2} =$$

EX2:- Find the area between the curves $y_1=2x$ and $y_2=x^2$

$$y_1 = y_2$$
$$2x = x^2 \rightarrow x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

نأخذ رقم (1) من ضمن الفترة [0,2] ونعوضها بالدوال

$$y_1 = 2(1) = 2$$
$$y_2 = (1)^2 = 1$$
$$y_1 \succ y_2$$
$$A = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 (y_1 - y_2)dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx$$
$$A = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[4 - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right] = 4 - \frac{8}{3}$$
$$A = \frac{4}{3} unit$$

EX3:- Find the area between the curves $y=(x)^{1/2}$ and $2y^2=3x$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow x = y^2$$
$$2y^2 = 3 - x \rightarrow x = 3 - 2y^2$$

يجب إيجاد حدود التكامل لأنه لم يتم أعطاه بالسؤال لذلك نعمل$x_1=x_2$

$$y^2 = 3 - 2y^2$$
$$y^2 + 2y^2 = 3$$
$$\frac{3y^2}{3} = \frac{3}{3} \rightarrow y^2 = 1, y = \pm 1$$
$$A = \int_{-1}^{1} [x_2 - x_1] dy$$

نأخذ رقم (0) لأنه يقع ضمن الفترة [1,1-] ثم نعوضه بالدوال.

$$x_1 = y^2 = (0)^2 = 0$$
$$x_2 = 3 - 2y^2 = 3 - 2(0)^2 = 3$$
$$x_2 \prec x_1$$
$$A = \int_{-1}^{1} \left[3 - 2y^2 - y^2\right] dy = \int_{-1}^{1} \left[3 - 3y^2\right] dy$$
$$A = \left[3y - \frac{3y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left[3(1) - (1)^3\right] - \left[3(-1) - (-1)^3\right]$$
$$A = (3-1) - (-3+1) = 4 unit$$

إيجاد الحجوم (b7-5)

الحالة الأولى:- لإيجاد الحجم مابين منحي الدالة والمحور (x) والتي يتم من خلال تطبيق القانون التالي:-

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

ونتبع نفس الأسلوب السابق في حالة إيجاد المساحة سواء كانت الفترة معطاة أو لم تكن معطاة

الحالة الثانية:- لإيجاد الحجم مابين منحي الدالة والمحور (y) والتي يتم من خلال تطبيق القانون التالي:-

$$V = \pi \int_c^d (f(y))^2 dx$$

الحالة الثالثة:- إيجاد الحجم مابين منحنين عند المحور السيني

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx$$

إيجاد الحجم مابين منحنين عند المحور الصادي

$$V = \pi \int_c^d \left[f^2(y) - g^2(y) \right] dy$$

EX1:-Find the volume of solid oblaind by rotating the region under the curve $y=(x)^{1/2}$ From 0 to 1 about x-axis

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{0}{2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

EX2:-Find the volume of solid that results when the given en closed by the given region the curve about the x-axis $y_1=x^2$, $y_2=0$, $x_1=0$, $x_2=2$

$$V = \pi \int_0^2 \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(x^2 \right)^2 - (0)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 \left[x^4 \right] dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{0}{5} \right]$$

$$V = \frac{32\pi}{5}$$

EX3:- Find the volume of the solid that results when the region enclosed by cueves $y=1+x^3$, $x=1$,$y=9$ is revolted about y-axis

$$x_2 = 1$$

$$y = 1 + x^3 \rightarrow x^3 = y - 1 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{y-1}$$

وبما إن المنحنيات دورانها حول المحور y

$$x_1 = \sqrt[3]{y-1}$$
$$x_2 = 1$$
$$x_1 = x_2$$
$$\sqrt[3]{y-1} = 1 \rightarrow y-1 = 1$$
$$y = 1+1 \rightarrow y = 2, [a = 2, b = 9]$$
$$V = \pi \int_2^9 f^2(y) - g^2(y) dy$$
$$V = \pi \int_2^9 \left(\sqrt[3]{y-1}\right)^2 - (1)^2 dy = \pi \int_2^9 (y-1)^{\frac{3}{2}} - 1 dy$$
$$V = \pi \left[\frac{3}{5}(y-1)^{\frac{5}{3}} - y \right]_2^9$$
$$= \pi \left[\frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{8}\right)^5 - 9 \right] - \left[\frac{3}{5}\left(\sqrt[3]{1}\right)^5 - 2 \right]$$
$$= \pi \left[\frac{3}{5}(32) - 9 \right] - \left[\frac{3}{5}(1) - 2 \right] = \pi \left[\frac{96}{5} - \frac{3}{5} - 9 + 2 \right] =$$
$$V = \frac{58}{5}\pi$$

EX4:- Find the volume of the solid that results when the region enclosed by cueves $x=y^2$, $x=y+2$ about y-axis

لان حدود التكامل لم تعطى نساوي $x_1=x_2$ لإيجاد حدود التكامل

$$y^2 = y+2 \rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow (y-2)(y+1) = 0$$
$$(y-2) = 0 \rightarrow y = 2$$
$$(y+1) = 0 \rightarrow y = -1$$
$$V = \pi \int_{-1}^{2} (y+2)^2 - (y^2)^2 dy$$
$$V = \pi \left[\frac{(y+2)^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^{2}$$
$$V = \pi \left[\frac{(2+2)^3}{3} - \frac{(2)^5}{5} \right] - \left[\frac{(-1+2)^3}{3} - \frac{(-1)^5}{5} \right]$$
$$V = \pi \left[\frac{64}{3} - \frac{32}{5} \right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right] = \pi \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3} - \frac{32}{5} - \frac{1}{5} \right]$$
$$V = \frac{72\pi}{5}$$

(c7-5) إيجاد الأطوال

Theorem:-

If f(x) is smooth function on [a , b] then the arc length = L of the curve y=f(x)from x =a to x = b is defined by:-

$$x \rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$y \to L = \int_a^b \sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\, dy$$

EX1:-Find the arc length of the curve y =2x
1/ using [1,2] from x-axis
2/ using [2,4] from y-axis

$sol:-$

$$1- L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$y = 2x \to \frac{dy}{dx} = 2, \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+4}dx = \int_1^2 \sqrt{5}dx = \sqrt{5}\int_1^2 dx = \left[\sqrt{5}x\right]_1^2$$

$$L = \sqrt{5}(2-1) = \sqrt{5}$$

$$2 - \frac{y}{2} = \frac{2x}{2} \to x = \frac{y}{2} \to \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}, \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{1}{4}}dy = \int_2^4 \sqrt{\frac{5}{4}}dy$$

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_2^4 dy = \frac{\sqrt{5}}{2}[y]_2^4 = \frac{\sqrt{5}}{2}[4-2] = \frac{\sqrt{5}}{2}[2]$$

$$L = \sqrt{5}$$

EX2:-Find the arc length of the curve y of [0 ,1]

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}} - 1$$

$sol:-$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}\sqrt{2}.\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{2x} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (2\sqrt{2x})^2 = 8x$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+8x}dx = \int_0^1 (1+8x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{8}\int_0^1 (1+8x)^{\frac{1}{2}} 8dx$$

$$L = \frac{1}{8}\left[\frac{(1+8x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.\frac{2}{3}\left[1+8(1)^{\frac{3}{2}} + (1+8(0)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$L=\frac{1}{12}\left[(9)^{\frac{3}{2}}+1\right]=\frac{1}{12}\left[\sqrt{(9)^{3}}+1\right]=\frac{14}{6}unit$$

EX3:-Find the arc length of the curve y of [0 ,1]

$$x=\frac{1}{3}(y^{2}+2)^{\frac{3}{2}}$$

$sol:-$

$$\frac{dx}{dy}=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(y^{2}+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}(2y)$$

$$\frac{dx}{dy}=y\sqrt{y^{2}+2},\left(\frac{dx}{dy}\right)^{2}=\left(y\sqrt{y^{2}+2}\right)^{2}=y^{2}(y^{2}+2)$$

$$L=\int_{0}^{1}\sqrt{1+y^{2}(y^{2}+2)}dy=\int_{0}^{1}\sqrt{1+y^{4}+2y^{2}}dy$$

$$L=\int_{0}^{1}\sqrt{y^{4}+2y^{2}+1}dy=\int_{0}^{1}\sqrt{(y^{2}+1)^{2}}dy=\int_{0}^{1}y^{2}+1dy$$

$$L=\left[\frac{y^{3}}{3}+y\right]_{0}^{1}=\left[\frac{(1)^{3}}{3}+1-\frac{(0)^{3}}{3}-0\right]=\frac{4}{3}unit$$

الواجبات

Q1/ Find the integral of the function

$1\int (3x^2+4)^2\,dx$

$2\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$3\int (3x+2)^5\,dx$

Q2/ Find the integral of the function

$1\int_{1}^{4} (7z^6-6z^5-22)dz$

$2\int_{1}^{4} \left(\frac{2}{5w^2}\right)dw$

$3\int_{-5}^{2} (4x^3+7)dx$

$4\int_{5}^{8} \left(\sqrt{3y+1}\right)dy$

$5\int_{-1}^{2} x^3\sqrt{3x^4+1}dx$

Q3/

$if \int_{2}^{5} f(x)dx = 7, \int_{-2}^{5} f(x)dx = 4 \, find \int_{-2}^{2} f(x)dx$

Q4/ Find the Double integral of the functions

$1\int_{1}^{2}\int_{2}^{4} (x^2+x^3y^3)dxdy$

$2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}}\int_{\frac{1}{3}}^{1} e^x y\,dxdy$

Q5/

$$\int_0^2\int_1^2 (x + xy)\,dxdy$$

Q6/ Find the Double integral of the functions

1/ $\int_0^1\int_0^2 (xy^2)\,dxdy$

2/ $\int_0^4\int_0^{\frac{x^2}{2}} (x)\,dydx$

3/ $\int_0^1\int_1^5 (r)\,drds$

4/ $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\sin x}^{\cos x} (x + 2y)\,dydx$

Q7:- Find the area between the curve $y=x^2$ and the y-axis of [1 ,2]