الفصل الثاني

الدوال

The Functions

(1-2) مقدمة

الدالة:- هي قاعدة تقابل بين مجموعتين غير خاليتين من العناصر A, B تدعى الأولى مجال الدالة أو منطلق الدالة (Domian) والثانية تدعى المجال المقابل أو المدى (Range) بحيث إن كل عنصر بالمنطلق يقابل عنصر واحد فقط في المدى وكل عنصر في المدى هو المقابل العنصر واحد على الأقل في المنطلق وغالبا ما تسمى الدالة بالتطبيق.

EX:- Graph the function y=2x+3 find D_f and R_f

$$Sol:-$$
$$let: x \Rightarrow y = 2x+3$$
$$-2 \Rightarrow 2(-2)+3=-1$$
$$-1 \Rightarrow 2(-1)+3=1$$
$$0 \Rightarrow 2(0)+3=3$$
$$1 \Rightarrow 2(1)+3=5$$
$$2 \Rightarrow 2(2)+3=7$$
$$D_f = \{x : \backslash x \in (-\infty, \infty)\} = R$$
$$R_f = \{y : \backslash y \in (-\infty, \infty)\} = R$$

منطلق الدالة f(x):- هو مجموعة قيم x التي تنتمي للمجموعة A وتحقق الدالة (f) ويرمز لها بالرمز (D_f).
مدى الدالة f(x):- هو مجموعة قيم y التي تنتمي للمجموعة B وتحقق الدالة (f) ويرمز لها بالرمز (R_f).

(2-2) إيجاد المنطلق والمدى للدوال

يعتمد إيجاد المنطلق والمدى للدوال (f) على نوع الدالة وكما يأتي:-

- إذا كان لدينا دالة متعددة الحدود فان منطلقها هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ومداها يستخرج من عمل جدول قيم موجبة وسالبة وصفر لقيم (x) وحسب الأمثلة الآتية:-

EX1:- find the domain and range of the function $y=x^2$

x	$Y=x^2$
-2	4
-1	1
0	0 ⟶ اقل قيمة
1	1
2	4
3	9
…..	…….

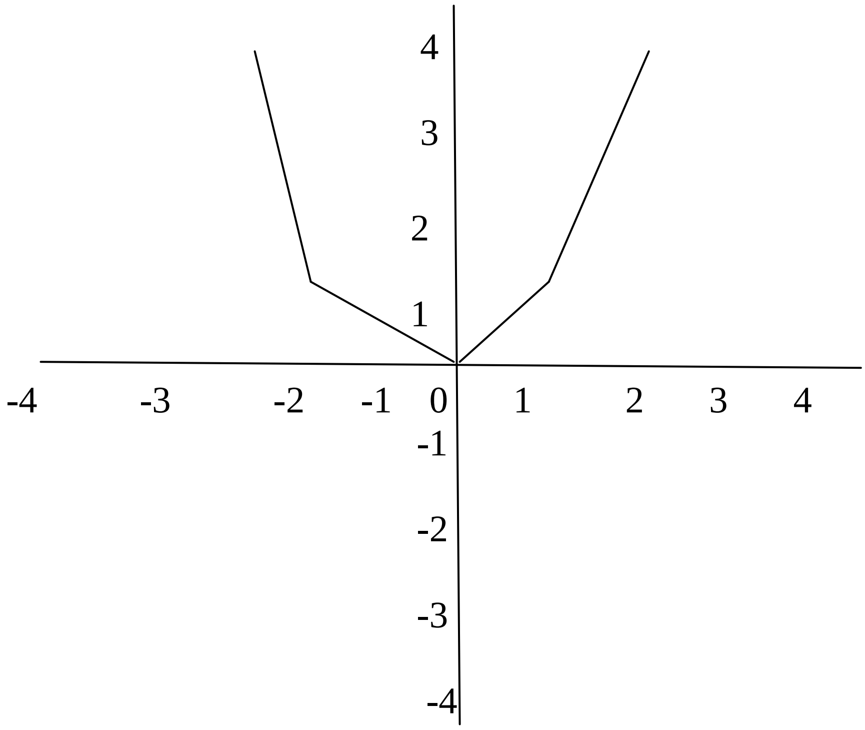
$$D_f = R \rightarrow D_f = \{x : -\infty \prec x \prec \infty\}$$
$$R_f = \{y : 0 \le y \prec \infty\}$$

ملاحظة:-
إذا كان لديك دالة متعددة الحدود وذكر فيها قيمة المتغير (x) فلإيجاد المنطلق فهو المعطى بالسؤال أما المدى فنقوم بعمل جدول خاص لإيجاده.

EX2:- find the domain and range of the function $y=x^2$ Where $-2\le x\le 2$ and graph

$$D_f = \{x : x \in R; -2 \le x \le 2\}$$
$$R_f = \{y : y \in R; 0 \le y \le 4\}$$

x	$Y=x^2$
-2	4 $\rightarrow$ اكبر قيمة
-1	1
0	0 $\rightarrow$ اقل قيمة
1	1
2	4



- إذا كان دالة تحتوي على جذور فعند إيجاد المنطلق (D_f) نجعل المقدار <u>تحت الجذر اكبر أو يساوي صفر</u> أما بالنسبة للإيجاد المدى (R_f) فنعمل جدول ومن ثم نعوض في الدالة

EX1:- find the domain and range of the function

$$y=\sqrt{x-3}$$

SOL:-

$$y=\sqrt{x-3}$$
$$x-3\geq 0$$
$$x\geq 3$$
$$D_f=\{x:,x\in R,x\geq 3\}$$
$$R_f=\{y:,y\in R,y\geq 0\}$$

حيث تم إيجاد قيم المدى من خلال عمل الجدول الأتي:-

x	$y=\sqrt{x-3}$
3	0
4	1
5	$\sqrt{2}$
6	$\sqrt{3}$
7	2

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

SOL:

$$y=\sqrt{4-x^2}$$
$$y=4-x^2 \geq 0$$
$$-x^2 \geq -4$$
$$x^2 \leq 4$$
$$\left|x^2\right| \leq 4$$
$$-2 \leq x \leq 2$$
$$D_f=\{x : x \in R; -2 \leq x \leq 2\}$$
$$R_f=\{y : y \in R; 0 \leq y \leq 2\}$$

حيث تم إيجاد قيم المدى من خلال عمل الجدول الأتي:-

x	$y=\sqrt{4-x^2}$
-2	0
-1	$\sqrt{3}$
0	2
1	$\sqrt{3}$
2	0

ملاحظة:- إذا ضربت المتباينة أو قسمت على الإشارة السالبة ففي كل الأحوال يجب تغير اتجاه المؤشر > إلى <

- إذا كانت لديك دالة كسرية (نسبية) فان منطلقها يمثل جميع الإعداد الحقيقية ماعدا القيم التي تجعل المقام يساوي صفر

EX1:- find the domain and range of the function y=1/x

SOL:-

$$D_f=\{x : x \in R; x \neq 0\}$$
$$R_f=\{y : y \in R; y \neq 0\}$$

أو يمكن كتابتها بالشكل الأتي:-

$$R/\{0\} or R-\{0\}$$

EX2:- find the domain and range of the function y=1/x-1

SOL:-

$$D_f=\{x : x \in R; x \neq 1\}$$
$$R_f=\{y : y \in R; -\infty \prec y \leq 1\}$$

ملاحظة لقد تم استبعاد الرقم (1) لأنه يجعل المقام كمية غير معرفة

x	$y=\dfrac{1}{x-1}$
-2	-1/3
-1	-1/2
0	-1
2	1
3	1/2
4	1/3
5	1/4

EX3:- find the domain and range of the function

$$y=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

من ملاحظة الدالة أعلاه والتي هي عبارة عن دالة كسرية جذرية وبما إن الجذر واقع في المقام لذلك نأخذ حالة الأكبر من الصفر دون الأخذ بالمساواة للصفر لان الدالة هي كسرية ولإيجاد المنطلق والمدى سوف يكون الحل بالشكل الأتي:-

$$x-2\succ 0$$

$$x\succ 2$$

$$D_f=\{x:x\in R;x\succ 2\}$$

$$R_f=\{y:y\in R;0\prec y\le 1\}$$

x	$y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$
3	1
4	$1/\sqrt{2}$
5	$1/\sqrt{3}$
6	1/2
…..	……

- دالة الثابت الو الدالة الثابتة

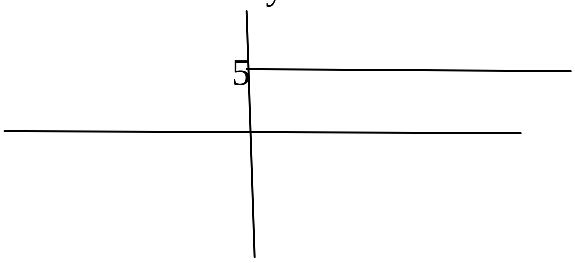
إن الشكل العام لهذه الدالة $f(x) = k\ ;\ k \in R$

فان منطلقها $D_f = R$ $\quad R_f = \{K\}$

EX1:- find the domain and range of the function and draw the function y=5

Sol:

$R_f = \{5\}$ $\quad D_f = R$



- الدالة متعددة الحدود الخطية

إن الشكل العام لهذه الدالة $f(x) = a + bx$

فان منطلقها $D_f = R$ $R_f = R$

- الدالة متعددة الحدود التربيعية

إن الشكل العام لهذه الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$

فان منطلقها $D_f = R$ $R_f = R$

- الدالة الذاتية

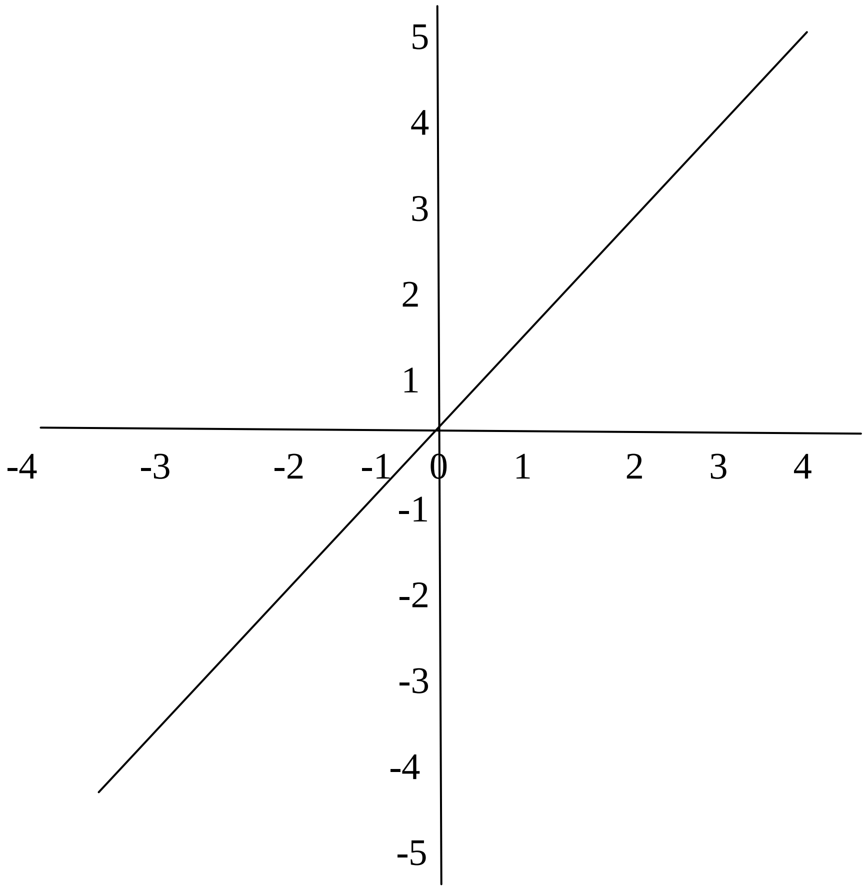
إن الشكل العام لهذه الدالة $f(x) = x$

فان منطلقها $D_f = R$ $R_f = R$

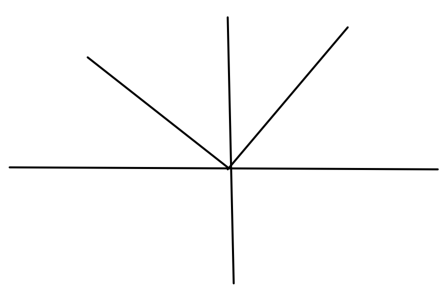
مثال:- لتكن لدينا الدالة الذاتية الآتية:- $f(x) = x$

الحل:-

x	Y=x
-5	-5
-2	-2
0	0
+2	+2
+5	+5



- دالة القيمة المطلقة



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x \prec 0 \end{cases}$$

$$D_f = R$$

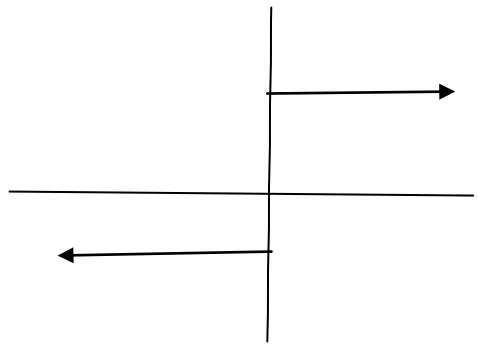
$$R_f = [0, \infty)$$

- دالة الإشارة

$$f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 : x \succ 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x \prec 0 \end{cases}$$

$D_f = R$

$R_f = [-1,0,1]$



- الدالة الفردية هي الدالة التي تحقق الشرط الأتي:- $f(-x) = -f(x)$

مثال:- $f(x) = x^3$

الحل:-

$f(1) = (1)^3 = 1$

$f(-1) = (-1)^3 = -1$

$f(-x) = f(-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

- الدالة الزوجية هي الدالة التي تحقق الشرط الأتي:- $f(-x) = f(x)$

مثال:- $f(x) = x^2$

الحل:-

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(-x) = f(-x)^2 = x^2 = f(x)$

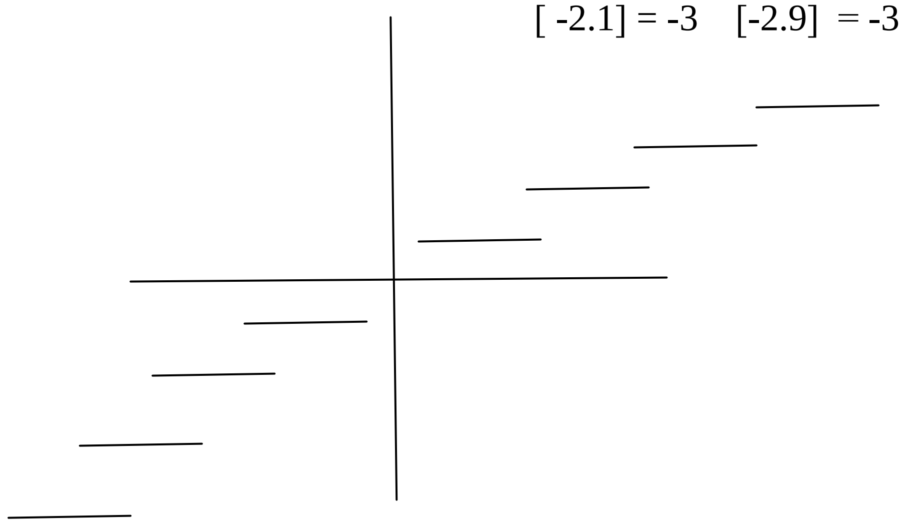
- دالة أعظم عدد صحيح : هذه الدالة تعمل على تحويل كل عدد عشري إلى عدد صحيح اقل أو يساوي x ويرمز لها بالرمز [x]

أمثلة:-

في حالة الموجب :- [2.9] = 2 [2.1] = 2 [2] = 2

في حالة السالب :- [-3.7] = -4 [-2.9] = -3 [-2.1] = -3

حيث إن $D_f = R$, $R_f = Z$



**أمثلة متنوعة عن الدوال **

EX1:- find the domain and range of the functions

$1 y = \sqrt{16 - x^2}$

Sol:

$y = 16 - x^2 \geq 0$

$-x^2 \geq 16$

$x^2 \le 16$

$\sqrt{x^2} \le \sqrt{16}$

$x \le 4$

$-4 \le x \le 4 \Rightarrow [-4,4]$

$D_f = \{x : x \in R; -4 \le x \le 4\}$

$R_f = \{y : y \in R, 0 \le y \le 4\}$

x	$y = \sqrt{16 - x^2}$
4	اقل قيمة0
3	$\sqrt{7}$
2	$\sqrt{12}$
1	$\sqrt{15}$
0	4
-1	$\sqrt{15}$
-2	$\sqrt{12}$
-3	$\sqrt{7}$
-4	0

$$2..\sin g(x) = \begin{Bmatrix} 1 \to x-3 \succ 0 \Rightarrow x \succ 3 \\ 0 \to x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ -1 \to x-3 \prec 0 \Rightarrow x \prec 3 \end{Bmatrix}$$

$D_f = \{x : x \in R; -\infty \prec x \prec \infty\}$

$R_f = \{y : y \in R; y = [1,0,-1]\}$

x	y
-3	-1
-2	-1
-1	-1
0	-1
1	-1
2	-1
3	0
4	1
5	1

let:- X	y
0	0
1.1	1
-1.1	-2
-2.5	-3
2.7	2

$3 f(x)=[x]$

$D_f = R$

$R_f = Z$

EX2:- find the domain of the functions

Sol:-

$1- f(x)=1/[x]$

$D_f = R-[0,1)$

$\sin ce[x]=0 \Rightarrow 0 \le x \prec$

$0.1=0$

$0.2=0$

$0.3=0$

$0=0$

$$2- f(x)=\frac{x(x+1)}{x}$$

$D_f = R-\{0\}$

$3- f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

$D_f = R$

ملاحظة:- الجذور الفردية يكون منطلقها معرف على جميع الأعداد الحقيقية لأنها معرفة على القيم الموجبة والسالبة

$$4- f(x)=\frac{1}{x+|x|}=\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x+x}=\frac{1}{2x}, x \succ 0 \Rightarrow x^{+} \\ \frac{1}{x+0}=\frac{1}{x}, x=0 \\ \frac{1}{x+(-x)}=\frac{1}{0}=\infty, x \prec 0 \Rightarrow x^{-} \end{array}\right\}$$

$$\sin ce \frac{1}{x+|x|} \neq -x$$

$D_f = [0,\infty) \Rightarrow \{x : x \in R; 0 \le x \prec \infty\}$

ملاحظة:- إذا كانت لدينا دالة كسرية وجذرية معا فنضع إشارة $0 <$ وليس $0 \le$ وذلك لان الصفر يستبعد من الحل.

Operations of functions العمليات على الدوال (3-2)

لتكن لدينا الدالة f(x) والدالة g(x) فان العمليات التي تجري عليها تكون كالأتي:-

$$1(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$2(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$
$$3(f / g)(x) = f(x) / g(x); g(x) \neq 0$$
$$4(g / f)(x) = g(x) / f(x); f(x) \neq 0$$
$$5(cf(x)) = cf(x)$$

أما لإيجاد المنطلق لكل من الداليتين يكون بالشكل الأتي:-

$$1D_{(f \pm g)} = D_f \cap D_g$$
$$2D_{(f * g)} = D_f \cap D_g$$
$$3D_{(f / g)} = D_f \cap D_g - g(x)$$
$$4D_{(g / f)} = D_f \cap D_g - f(x)$$

EX:- If the function f(x) = x+1/x and g(x) = -1/x find

$1(f \pm g)(x)$	$5D_{(f \pm g)}$
$2(f * g)(x)$	$6D_{(f * g)}$
$3f(x)/g(x)$	$7D_{(f / g)}$
$4g(x)/f(x)$	$8D_{(g / f)}$

Sol:-

$$1(f+g)(x) = x + 1/x + (-1/x) = x$$

$$(f-g)(x) = x + (1/x) - (-1/x) = x + (1/x) + (1/x) = \frac{x^2+2}{x}$$

$$2(f * g)(x) = (x + (1/x)) * (-1/x) = \frac{-x}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$= -1 - \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2-1}{x^2} = \frac{-(x^2+1)}{x^2}$$

$$3(f/g)(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x}}$$

$$4(g/f) = \frac{-\frac{1}{x}}{x + 1/x}$$

$5D_{(f\pm g)} = D_f \cap D_g = IR/\{0\} \cap IR/\{0\} = IR/\{0\}$
$6D_{(f*g)} = D_f \cap D_g = IR/\{0\} \cap IR/\{0\} = IR/\{0\}$
$7D_{(f/g)} = IR/\{0\} - (g(x) = 0)$
$8D_{(g/f)} = IR/\{0\} - (f(x) = 0)$

Equality of functions تساوي الدوال (4-2)

We say that two functions f(x) and g(x) are equal if f(x) and g(x) have the some domain $D_f=D_g$ and f=g for each (x) in the common domain

وحسب الملاحظة أعلاه يقال لأي داليتين إنهما متساويتان إذا توفره الشروط الآتية:-

$1D_{f(x)} = D_{g(x)}$
$2\, f(a) = g(a); \forall x \in R$

EX1:- Find the equality of functions if

$f(x) = \sqrt{x^2}$
$g(x) = |x|$

Sol :-

$f(x) = g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow x = x$
$1D_f = D_g = IR$
$2\, f(x) = g(x)$
$let : x = 1 \rightarrow \sqrt{x^2} \neq or = |x|$
$f(x) = f(x=1) = \sqrt{(1)^2} = 1$
$g(x) = g(x=1) = |1| = 1$
$f(x=-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1$
$q(x=-1) = |-1| = 1$
$f(x) = g(x)$

EX2:- Find the equality of functions if

$f(x) = (\sqrt{x})^2$
$g(x) = |x|$

Sol:-

$$
\begin{aligned}
&1\, f(x) = (\sqrt{x})^2 \\
&D_f = R^+ \cup \{0\} \\
&g(X) = |x| \\
&D_g = IR \\
&D_g \neq D_f \\
&2\, f(1) = \left(\sqrt{1}\right)^2 \\
&g(1) = |1| = 1 \\
&f(1) = g(1) \\
&f(x) \neq g(x)
\end{aligned}
$$

EX3:- Find the equality of functions if

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \frac{2x - x^2}{x} \\
&g(x) = 2 - x
\end{aligned}
$$

Sol:-

$$
\begin{aligned}
&1 - f(x) = \frac{2x - x^2}{x} \rightarrow D_f = IR - \{0\} \\
&g(x) = 2 - x \rightarrow D_g = IR \\
&D_f = D_g \\
&2 - f(1) = \frac{2*1 - 1}{1} = 1 \\
&g(1) = 2 - 1 = 1 \\
&f(1) = g(1) = 1 \\
&f(-1) = \frac{2*-1-1}{-1} = 3 \\
&g(-1) = 2 + 1 = 3 \\
&f(-1) = g(-1) = 3
\end{aligned}
$$

The functions dose not equality

(5-2) تركيب الدوال Composite functions

إذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ والدالة $g(x)$ فان تركيب الدوال يعرف بالشكل الأتي:-

$$
\begin{aligned}
&1(fog)(x) = f(g(x)) \\
&2(fof)(x) = f(f(x)) \\
&3(gof)(x) = g(f(x)) \\
&4(gog)(x) = g(g(x))
\end{aligned}
$$

ملاحظات:-

1 مجال الاقتران $D(f \circ g)$ لا يمكن أن يكون اكبر من مجال الاقتران الأول.

2 الترتيب في الاقترانات المركبة مهم نظرا لان عملية التركيب ليس أبدالية

$1(fog)(x) \neq (gof)(x)$

EX1:- If the f(x) =x^2 and g(x) = $(x)^{1/2}$ find the

$1(fog)(x)$
$2(gof)(x)$

SOL:-

$$f(x) = x^2 = D_f = IR$$
$$g(x) = \sqrt{x} = D_g = [0, \infty)$$
$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2$$
$$D_{fog}(x) = [0, \infty)$$
$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2}$$
$$D_{gof(x)} = IR$$

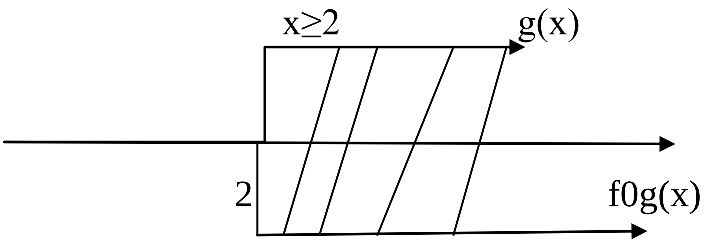
$EX\,2: f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{x-2}, find the$

EX2:-

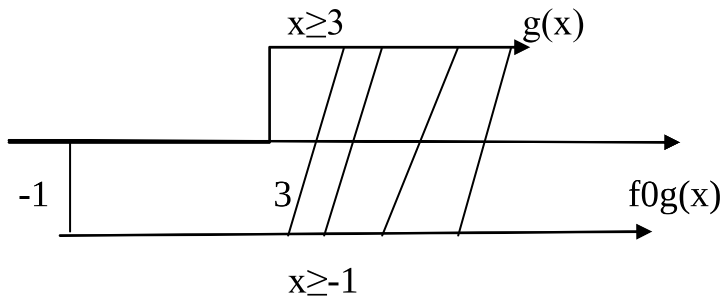
$(fog)(x), (gof)(x), (fof)(x), (gog)(x)$

Sol:-

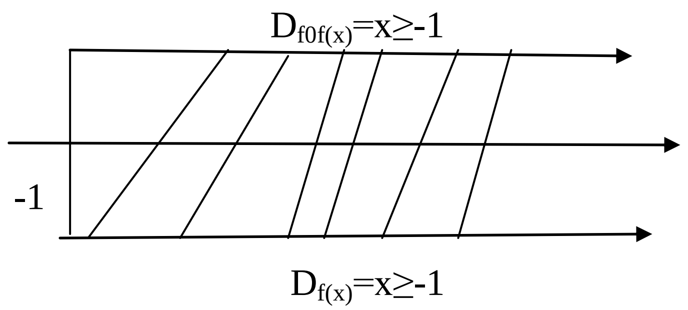
$$f(x) = x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \rightarrow D_f = [-1, \infty) = x \geq -1$$
$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_g = [2, \infty) = x \geq 2$$
$$1(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}) = \sqrt{\sqrt{x-2}} + 1$$
$$\sqrt{x-2} + 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq -1 \rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$
$$D_{fog}(x) = D_{fog}(x) \cap D_{g(x)}$$
$$D_{fog}(x) = x \geq 2 \cap x \geq 2 = x \geq 2$$
$$D_{fog}(x) = [2, \infty)$$



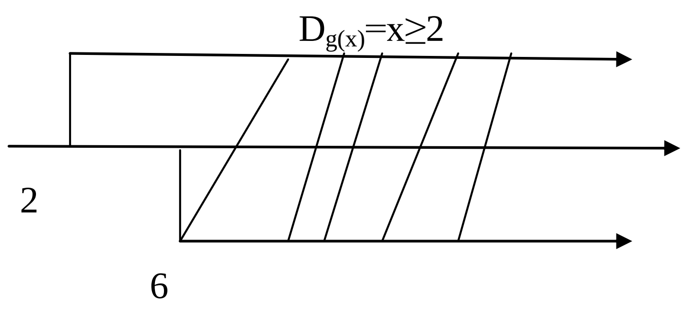
$$2(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+1})=\sqrt{\sqrt{x+1}}-2\geq 0$$
$$\sqrt{x+1}-2\geq 0\Rightarrow\sqrt{x+1}\geq 2\Rightarrow x+1\geq 4\Rightarrow x\geq 3$$
$$D_{gof}=D_{gof(x)}\bigcap D_{f(x)}$$
$$=x\geq 3\bigcap x\geq -1$$
$$D_{gof(x)}=[3,\infty)$$



$$3(fof)(x)=f(f(x))=f(\sqrt{x+1})=\sqrt{\sqrt{x+1}}+1$$
$$\sqrt{x+1}+1\geq 0\Rightarrow\sqrt{x+1}\geq -1\Rightarrow\sqrt{x+1}\geq 0$$
$$x+1\geq 0\rightarrow x\geq -1$$
$$D_{fof}=D_{fof(x)}\bigcap D_{f(x)}$$
$$=x\geq -1\bigcap x\geq -1=x\geq -1$$
$$D_{gof(x)}=[-1,\infty)$$



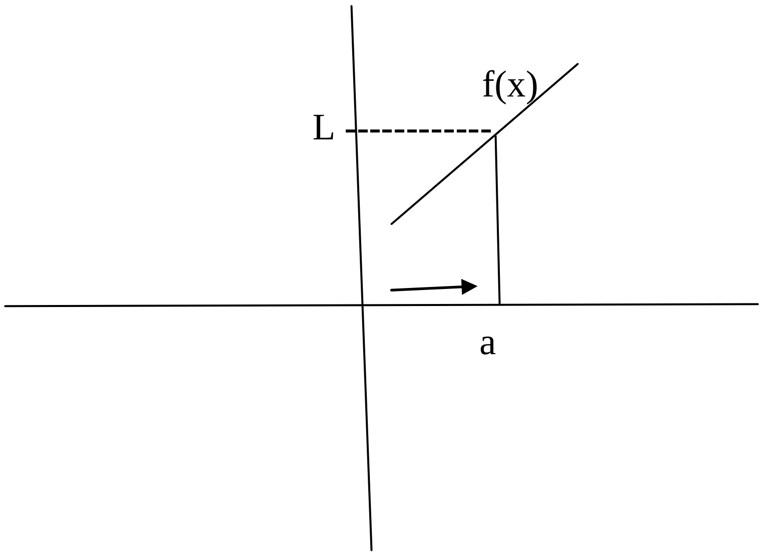
$$4(gog)(x)=g(g(x))=g(\sqrt{x-2})=\sqrt{\sqrt{x-2}}-2$$
$$\sqrt{x-2}-2\geq 0$$
$$x-2\geq 4\rightarrow x\geq 6$$
$$D_{gog}=D_{gog(x)}\bigcap D_{g(x)}$$
$$=x\geq 6\bigcap x\geq 2=x\geq 6$$
$$D_{gog(x)}=[6,\infty)$$



(6-2) الغايات أوالنهايات Limits

$$Lim_{X\to a} f(x) = L$$
$$f(x) \to L$$
$$x \to a$$

ويقصد به إن الدالة f(x) معرفة على إطراف النقطة (a) ولا يشترط أن تكون هذه الدالة معرفة في داخل هذه النقطة (a) . وبشكل عام فان الدالة f(x) تقترب من (L) عندما (X) تقترب من (a) وان الهدف من الغاية هو إيجاد قيمة تقريبية للدالة عند نقطة معرفة وربما تكون غير معرفة وان رسم الغاية يكون كالأتي:-



(7-2) وجود الغاية Limits exist

$$Lim_{X\to a^+} f(x) = Lim_{x\to a^-} = L$$

ويقصد ب هان الغاية تكون موجودة إذا كانت غاية اليمن = غاية اليسار

1- Right-hand Limit:-

$$Lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

ويقصد به الغاية من اليمين

2- left-hand Limit:

$$Lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

ويقصد به الغاية من اليسار

EX1:- Find if the limit exist of

$$Lim_{x\to 2} x^2$$

Sol:-

$$Lim_{x\to 2^+} x^2 = (+2)^2 = 4$$
$$Lim_{x\to 2^-} = (-2)^2 = 4$$

$$Lim_{x\to 2^+} x^2 = Lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$$

The limit is exist

EX2:- Find if the limit exist of

$$Lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Sol:-

$$Lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$Lim_{x\to 0^-} \frac{`}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$Lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \neq Lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \Rightarrow \infty = -\infty$$

The limit does not exist

ملاحظة:- (0^+) لا يقصد به إن الصفر يحمل إشارة الموجب إنما الغاية تقترب إلى الصفر من جهة اليمين

ملاحظات:-

- لإيجاد الغاية نعوض بالقيمة التقريبية ل (x) فإذا تم الحصول على إعداد حقيقية فان الغاية تكون موجودة أما إذا تم الحصول على كميات غير معرفة فسوف تكون الغاية غير موجودة

$$(\infty, -\infty, \frac{0}{0}, ...)$$

-

$$(\infty/\infty, 1^\infty, \frac{0}{0}, 1^{-\infty}, \infty^0, \infty-\infty.......)$$

فعند تعويض قيم (a) بدل قيمة (x) وتم الحصول على القيم أعلاه فيجب إجراء بعض العمليات الرياضية مثل تحليل إلى العوامل ، الضرب بالمرافق، جمع الكسور

$$EX1: Lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = ?$$

$sol:$

$$Lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2)^2-4}{2-2} = \frac{o}{0}$$

$$Lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

بما أن الحل (0/0) لذلك سوف نستخدم أسلوب رياضي يناسب السؤال أعلاه وهو تحليل العوامل إذن الغاية موجودة .

$$EX\,2: Lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{x-1} = ?$$

Sol:-

$$Lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{x-1} = \frac{1-\frac{1}{1}}{1-1} = \frac{0}{0}$$

بما أن الحل (0/0) لذلك سوف نستخدم أسلوب رياضي يناسب السؤال أعلاه وهو جمع الكسور.

$$Lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x} . \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

إذن الغاية موجودة.

$$EX\,3: Lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = ?$$

Sol:-

$$Lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(0)}{\sin(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

بما أن الحل (0/0) لذلك سوف نستخدم أسلوب رياضي يناسب السؤال أعلاه وهو الضرب بالمرافق (وهو نفس البسط لكن عكس الإشارة).

$$Lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} * \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{\sin(1+\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{\sin(0)}{1+\cos(0)}$$

$$\frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

إذن الغاية موجودة.

$not:-$

$\sin(0) = 0$

$\cos(0) = 1$

$\tan(0) = 0$

$\sin(1) = 0.841 \cong 1$

$\cos(1) = 0.540 \cong 1$

$\tan(1) = 1.557 \cong 2$

$\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$

$$EX\,4: Lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=?$$

Sol:-

$$|x|=\begin{Bmatrix} x; x\geq 0 \\ -x; x\prec 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}\neq \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=not.exist$$

$$EX\,5: Lim_{x\to 3}[x]=?$$

Sol:-

2…….2.7 2.8 2.9 **3** 3.1 3.2 3.3 ……..4

$$Lim_{x\to 3^+}[3.000001]=3$$

$$\lim_{x\to 3^-}[2.9999....]=2$$

$$\lim_{x\to 3^+}[x]\neq \lim_{x\to 3^-}[x]$$

إذن الغاية موجودة

$$EX\,6: Lim_{x\to -1}(x^5-7)^{10}=?$$

Sol:-

$$Lim_{x\to -1}(x^5-7)^{10}=(-1-7)^{10}=(-8)^{10}$$

Operation on limit خواص الغاية (8-2)

$$1-Lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm \lim_{x\to a}g(x)=L\pm M$$

$$2-Lim_{x\to a}[f(x)*g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)*\lim_{x\to a}g(x)=L*M$$

$$3-Lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{L}{M}=g(x)\neq 0$$

$$4-Lim_{x\to a}[k.f(x)]=k.\lim_{x\to a}f(x)=K.L$$

$$5-Lim_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim_{x\to a}f(x)]^n=L^n$$

$$EX\,7 : Lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-2}}{3x^2-17}=?$$

Sol:-

$$\frac{\lim_{x\to -3}\sqrt{x^2-2}}{\lim_{x\to -3}3x^2-17}=\frac{\sqrt{(3)^2-2}}{3(-3)^2-17}=\frac{\sqrt{9-2}}{27-17}=\frac{\sqrt{7}}{10}$$

Formal Definition of limit الغاية بالتعريف (9-2)

$$if .\lim it \to \lim_{x\to a} f(a)=L, if \forall \in \succ 0\delta$$

$$|f(x)-L| \prec \in \to |x-a| \prec \delta$$

أي إن لكل €> 0 إذا استطعنا إيجاد عدد مقابل مثل δ يعتمد في قيمته على € تكون قد أثبتنا وجود الغاية.

خطوات حل الغاية باستخدام التعريف

- $|f(x)-L| \prec \in$
- ثم نعمل على تحويل القيمة المطلقة إلى متباينة

$$-\in \prec f(x)-L \prec \in$$

- ثم نتدرج في حل المتباينة إلى أن نحصل على المتباينة فإذا حصلنا عليها تكون النهاية موجودة أو العكس صحيح

$$-\delta \prec x-a \prec \delta$$

$$EX1: prove.that Lim_{x\to 1} x = 1$$

$$Sol: |f(x)-L| \prec \in = |X-1| \prec \in$$

$$-\in \prec |x-1| \prec \in \to let: \delta = \in$$

$$-\delta \prec x-1 \prec \delta$$

$$-\delta \prec x-a \prec \delta$$

$$the Lim_{x\to 1} x.exist = 1$$

$$EX\,2: prove.that Lim_{x\to 1} 3x+2=5 by.u\sin g.the.definit$$

$$Sol: |f(x)-L| \prec \in = |3x+2-5| \prec \in = |3x-3 \prec \in|$$

$$-\in \prec |3x-3| \prec \in = 3- \in \prec 3x-3+3 \prec \in +3$$

$$\frac{3}{3}-\frac{\in}{3} \prec \frac{3x}{3} \prec \frac{\in}{3}+\frac{3}{3}$$

$$-1-\frac{\in}{3} \prec x \prec \frac{\in}{3}+1$$

$$-1+1-\frac{\in}{3}\prec x-1\prec\frac{\in}{3}+1-1$$

$$let:\frac{\in}{3}=\delta$$

$$-\delta\prec x-1\prec\delta$$

$$-\delta\prec x-a\prec\delta$$

إن الغاية موجودة عندما قيمة x تقترب من 1 للدالة 3x+2

In finite limit الغاية عند ما لا نهاية (10-2)

هنالك بعض القواعد الأساسية التي يجب معرفتها عند حل هكذا نوع من الغايات وأهمها:-

$$1Lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$Lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\infty^2}=0$$

$$Lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{\infty^3}=0$$

$$2Lim_{x\to\infty}x=\infty$$

$$Lim_{x\to\infty}x^2=\infty^2=\infty$$

$$Lim_{x\to\infty}x^3=\infty^3=\infty$$

$$3Lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$Lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$Lim_{x\to\infty+}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$Lim_{x\to\infty^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$4Lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(0^+)^2}=\infty$$

$$Lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(0^-)^2}=\infty$$

$$5Lim_{x\to\infty^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(\infty^+)^2}=0$$

$$Lim_{x\to\infty^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(\infty^-)^2}=0$$

(11-2) غاية الدوال الكسرية عند ما لا نهاية

عند حل هذا النوع من الغايات يتم اللجوء إلى البحث عن اكبر أسس للمتغير الموجود بالمقام وقسمة الدالة (بسط مع المقام) على هذا المتغير ذات اكبر أس وكما في الأمثلة أدناه :-

$$EX1:-Find.\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+7x}{x^2+2}$$

Sol:-

أعلى أس للمتغير x في المقام هو من المرتبة الثانية لذلك نقسم علية.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x^2}{x^2}+\frac{7x}{x^2}}{\frac{x^2}{x}+\frac{2}{x^2}}=Lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{7}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}$$

$$\frac{-1+\frac{7}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty^2}}=\frac{-1+0}{1+0}=\frac{-1}{1}=-1$$

ملاحظة:- نستنتج من المثال أعلاه هو إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فان الغاية تساوي معامل (x) في البسط على معامل (x) في المقام

$$EX2:-Find.\lim_{x\to\infty}\frac{x3+3x}{x^2-2x+7}$$

Sol:-

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x3}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}$$

$$\frac{\infty+\frac{3}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{7}{\infty}}=\frac{\infty+0}{1-0+0}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

ملاحظة:- نستنتج من المثال أعلاه هو إذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام فان الغاية تساوي ما لا نهاية

$$EX3:-Find.\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^3+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{1+\frac{1}{\infty^3}} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

ملاحظة:- نستنتج من المثال أعلاه هو إذا كانت درجة البسط اقل من درجة المقام فان الغاية تساوي صفر

ملاحظة:-
عندما تكون لدينا الدوال غير كسرية وكان الطاب هو إيجاد الغاية عند ألما لانهاية فيجب تحويل الدوال الغير الكسرية إلى دوال كسرية وذلك بضرب الدوال الغير كسرية بمرافقها وكما في المثال الأتي:-

$$EX:-Find.\lim_{x\to\infty} 3x^2 - x$$

Sol:-

نلاحظ إن الدالة غير كسرية لذلك نضربها بالمرافق هو عبارة عن بسط ومقام لكن عكس الإشارة $3x^2+x$

$$\lim_{x\to\infty} 3x^2 - x * \frac{3x^2+x}{3x^2+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2-x)(3x^2+x)}{3x^2+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^4+3x^3-3x^3-x^2}{3x^2+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^4-x^2}{3x^2+x}$$

بما إن الدالة كسرية والغاية عند ألما لانهاية لحلها نلجأ إلى قسمة الدالة على أعلى أس في المقام وهو x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9x^4}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-1}{3+\frac{1}{x}} =$$

$$\frac{9(\infty)^2-1}{3+\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty-1}{3+0} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

ملاحظة مهمة:-

$\infty + \infty = \infty$

$\infty * \infty = \infty$

$\infty^a = \infty; a \neq 0$

$a^\infty = \infty; a \neq 0 \neq 1$

$\infty - \infty = \infty$

$\infty / \infty = \infty$

$$\infty^0 = 1$$
$$0^0 = 1$$
$$0^\infty = 0$$

$$0/0 = \infty$$
$$0 * \infty = \infty$$
$$1^\infty = \infty$$

Continuity الاستمرارية(12-2)

Def:- of continuity at (a) point the function f(x)is said to be cont at x=a iff
1/ f(a)=exist

$$2/\lim_{x\to a} f(x) = exist$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

EX1:- Does the function f(x) = x-2 cont at a=-4
SOL:-

$$1/\ f(x=-4) = x-2 = -4-2 = -6$$
$$2/\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} x-2 = -4-2 = -6$$
$$\lim_{x\to -4}(x-2) = f(-4) = -6$$

The function (x-2) cont at x = -4

EX2:- Does the function f(x) = 4-x^2/2-x cont at x= 2
SOL:-

$$1/\ f(x=2) = \frac{4-(2)^2}{2-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0} = \infty$$
$$2/\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{2-x} = \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(2-x)} =$$
$$\lim_{x\to 2}(2+x) = 2+2 = 4$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$$

The function does not cont at x = 2

EX3:- Does the function f(x) cont at x= 0

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1-x^2, x \prec 0 \\ 1-\sqrt{x}, x \geq 0 \end{Bmatrix}$$

SOL:-

$$1/\ f(0) = 1-\sqrt{0} = 1-0 = 1$$
$$2/\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1-\sqrt{x} = 1-\sqrt{0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 1-x^2 = 1-(0)^2 = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$$
$$the.\lim it, exist$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$$

The function f(x) is cont at x=0

EX4:- Does the function f(x) cont at a= 0

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+2, x\neq 1 \\ 5, x=1 \end{Bmatrix}$$

sol:-

$$1/\ f(1)=5$$
$$2/\lim_{x\to 1} x^2+2=(1)^2+2=3$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$$

The function f(x) d0es not is cont at a=1

ملاحظة: دائما الغاية تأتي مع عدم المساواة حسب المثال أعلاه

EX5:-

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{x^2-9}{x-3}, x\prec 3 \\ kx-3, x\geq 3 \end{Bmatrix}$$

Find the value of (k) that makes f(x) cont at x = 3

Sol:-

أولا من السؤال أعلاه تم معرفة إن الدالة مستمرة عند x=3 أي بمعنى حققت الشرط

$$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$$

من الشرط أعلاه يمكن إيجاد قيمة الثابت (k)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=3k-3$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=3k-3$$
$$\lim_{x\to 3}(x+3)=3k-3$$
$$(3+3)=3k-k\Rightarrow 6+3=3k\Rightarrow \frac{9}{3}=\frac{3k}{3}$$
$$k=3$$