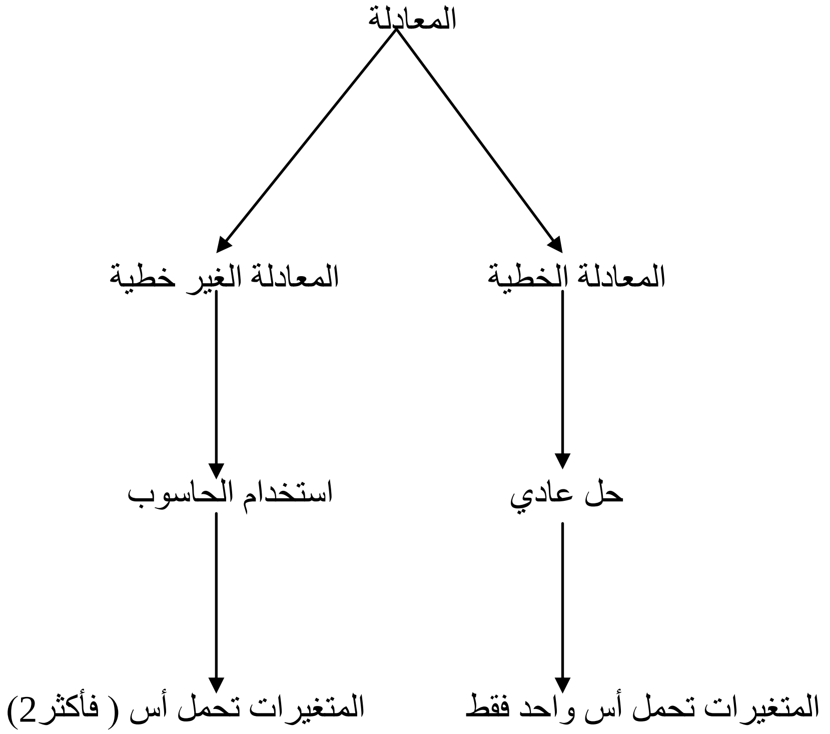
الفصل الثاني

الحل العددي لنظام المعادلات الغير خطية

(1-2) مقدمة



المعادلة الخطية:- هي كل دالة يكون فيها المتغير يحمل أس واحد فقط وترسم على شكل خط مستقيم

1/ $f(x)=2x+5$

2/$f(x)=(1/2)x+4$

المعادلة الغير خطية:- هي كل دالة تحمل المتغير فيها أس الرقم (2) فما فوق وترسم على شكل منحي ومثل هذه الدوال الغير خطية هي الدوال المتسامية وتشمل الدوال الآسية و المثلثية و الزائدية.

ولحل أي معادلة غير خطية نستخدم الطرق التكرارية.
فمثلا عندما يراد إيجاد جذور المعادلة التالية $2x^2-4x-3=0$ يتضح من هذه المعادلة أنها معادلة لا خطية من الدرجة الثانية ويمكن استخدام طريقة الدستور لإيجاد جذري هذه المعادلة في حين لو حاولنا أيجاد جذور المعادلتين

$2x^4+x^3-3x^2+4x-1=0$

$X=2\sin(x)$

ترى انه لا يوجد طريقة نظرية أو قانون محدد مباشر لإيجاد جذور مثل هذه المعادلات لذلك يتم اللجوء إلى استخدام الطرق العددية التقربيه لإيجاد الحلول أو الجذور لهذه المعادلات وهذه الحلول تكون تقريبية بالمقارنة فيما إذا كان هنالك حلول نظرية لهذه المعادلات ويعتمد الحل العددي بشكل عام على دقة الخطأ الذي يتم التوصل إلية أو ما يسمى دقة الخطأ أو درجة الدقة أو الضبط.
على أية حال يمكن اعتماد الطرق العددية المعتمدة كأفضل وسيلة لإيجاد الحل التقريبي خاصة إذا كانت المعادلات غير خطية ولا يمكن أيجاد حلول بالطرق النظرية وعلى هذا الأساس توجد طرق عددية متعددة لحل مثل هذه المعادلات وبما أن الجذور التي يمكن تحديدها عدديا هي بأساس يمكن تحديدها تقريبا بالرسم أو الحساب التقريبي وذلك بتعويض قيمة معينة للجذر ومن ثم حساب قيمة الدوال لهذه المعادلة أو المعادلات فان كان هنالك تغير في قيمة الدالة من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب أي بمعنى أخر أن كان هنالك قطع لهذه الدالة للاحداثي (x) وحسب طبيعة الجذر المطلوب أيجاد هو الطرق العددية كثيرة تتركب طبيعة اختيارها على السرعة التي يمكن التوصل إليها إلى حالة التقارب.

((مبرهنة))

الشرط الضروري الكافي لإيجاد حل للمعادلة

$$x = f(x) \Rightarrow x \in [a,b]$$
$$\left|f^{-}(x)\right| \prec L \rightarrow \forall x \in [a,b]$$
$$\left|f(x_2) - f(x_1)\right| \leq L$$
$$\left|x_2 - x_1\right| \leq L \Rightarrow \prec 1$$

ملاحظة: إن الطرق التكرارية تتكون من ثلاث خطوات أساسية وهي:

- إعطاء شكل الدالة f(x) مع النقطة الابتدائية (x0).
- نعوض النقطة الابتدائية با إحدى الصيغ لا التي سوف نتطرق إليها فنحصل من خلالها على نقطة جديدة هي x1
- نختبر فيما إذا كان $\left|x_1 - x_0\right| \prec \in$

فإذا كان الجواب نعم نتوقف ونعتبر أن (x1) هو الجذر المطلوب أما إذا كان الجواب لا نستمر لإيجاد نقطة جديدة وهي x2

$$\left|x_2 - x_1\right| \prec \in$$

وهكذا إلى أن نصل إلى الحل الأمثل علما أن قيمة الخطأ €=0.001

أهم ما يميز الطرق التكرارية هي النقاط الآتية:-

- السرعة في الوصول إلى الهدف لإيجاد قيمة الجذر
- الدقة في قيمة الحل
- عدد التكرارات فكلما كان عدد التكرارات اقل كانت الطريقة أفضل وأكفى
- قيمة الخطأ أي كلما كانت قيمة الخطأ قليلة تكون الطريقة أكفى

(2-2) تعيين مواقع الجذور

هنالك عدة طرق لتعيين مواقع الجذور منها:-

- نظرية القيمة المتوسطة (طريقة تغير الإشارة).
- نظرية متعددة الحدود.
- نظرية الرسم.

** نظرية القيمة المتوسطة (طريقة تغير الإشارة).

نلاحظ إن اختيار فترة تقسم صغيرة يودي إلى زيادة في العمليات الحسابية ومن ناحية ثانية فان اختيار فترة تقسيم كبيرة يؤدي إلى فقدان بعض الجذور لذلك فان

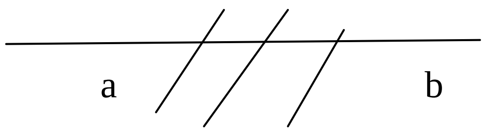
خوارزمية طريقة تغير الإشارة (القيمة المتوسطة) المستخدمة لإيجاد موقع جذر للمعادلة غير الخطية

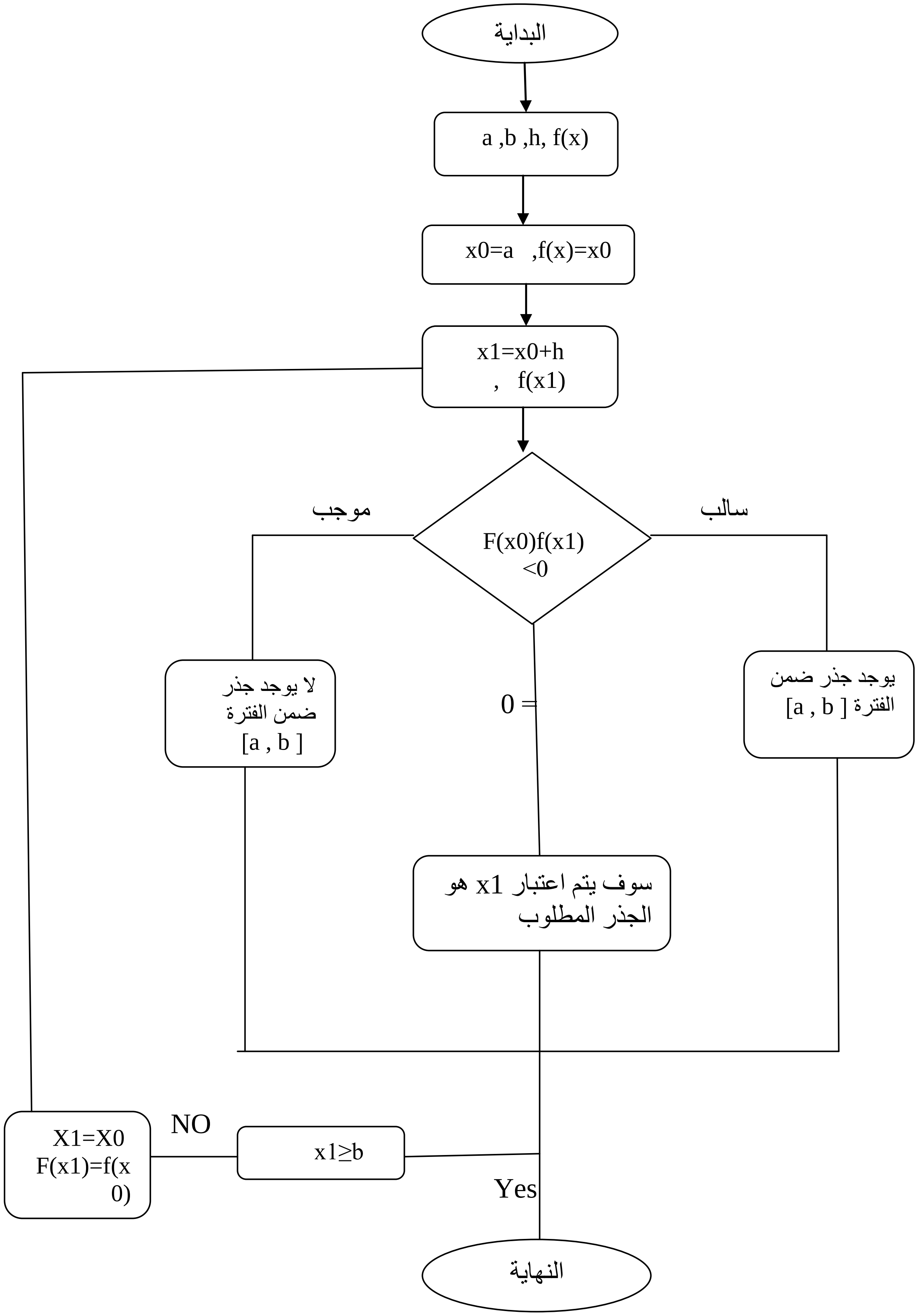
إذا كان لدينا الدالة f(x) معرفة على الفترة المغلقة [a ,b] عندئذ تقسم الفترة إلى أقسام متساوية بمقدار (h) منها نحصل على عدة نقاط وبعدها نجد f(x1)f(x0) فإذا كانت النتيجة

- f(x1)f(x0) > 0 عندئذ لا يوجد جذر في هذه المنطقة و تهمل هذه الفترة.
- f(x1)f(x0) < 0 عندئذ يوجد جذر يقع في هذه الفترة.
- f(x1)f(x0) = 0 عندئذ فان (xi) هو الجذر المطلوب.

المخطط الانسيابي لتعيين موقع الجذر لأي معادلة غير خطية بطريقة تغير الإشارة

عندما يكون لدينا فترة مغلقة مثل [a , b] وفترة تقسيم (h)





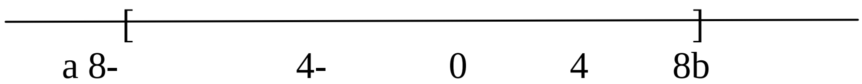
الشكل(2-1) المخطط الانسيابي لتعيين موقع الجذر لأي معادلة غير خطية بطريقة تغير الإشارة

مثال:-
عين مواقع جذور المعادلة الغير خطية للمعادلة الآتية:-

$$F(x)= x^4-3x^3+3x^2+26x-10$$

في الفترة [8- ,8] حيث إن h = 4 باستخدام نظرية القيمة المتوسطة (طريقة تغير الإشارة)
الحل:

x	-8	-4	0	4	8
f(x)	+	+	-	+	+



f(x):- نعوض كل قيمة من قيم (x) في الدالة ونحصل على رقم مع إشارة ثم نكتب فقط الإشارة و يهمل الرقم ومن السؤال أعلاه نلاحظ إن هنالك جذران في الفترة [0,4] [0 ,4-] عندما كانت فترة التقسيم h =4

ملاحظة:-يعني ا ن أخر قيمة مستخدمة يجب ان تساوي القيمة النهائية للفترة كما في المثال السابق x1=b=8

واجب :- لو فرضنا قيمة h=2 قم بحساب مواقع الجذور بالطريقة تغير الإشارة.

2- **نظرية متعددة الحدود**
إذا كانت الدالة f(x) يمثل متعددة حدود فيمكن تعيين مواقع جذور المعادلة بالاعتماد على النظرية التالية إذا كانت جذرا للمعادلة

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$$
$$|\alpha| \le 1 + \max\{|a_i|\}$$

مثال:- عيين مواقع الجذور من المعادلة التالية مستخدما طريقة متعددة الحدود

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

الحل:-

$$|\alpha| \le 1 + \max\{|a_i|\}$$
$$|\alpha| \le 1 + \max\{|1|, |-2|, |3|, |1|\}$$
$$|\alpha| \le 1 + \max\{3\}$$
$$|\alpha| \le 1 + 3$$
$$|\alpha| \le 4$$
$$-4 \le \alpha \le 4 \Rightarrow \alpha \in [-4, +4]$$

لابد من وجود جذور خلال هذه الفترة.

3 طريقة الرسم
لا يجاد الجذور التقريبية للمعادلة f(x) = 0 نرسم الدالة y = f(x) ثم نجد نقاط التقاطع لمنحني الدالة مع محور السينات أي قيم x التي تكون عندها قيم y=0 .
أما إذا كانت الدالة من الدوال التي يصعب رسمها فيمكن وضعها بالشكل الأتي f1(x) = f2(x)

حيث إن $f1$, $f2$ تمثل دالتيين يمكن رسمها بسهولة وبذلك تكون مساقط نقاط التقاطع للمنحنيين على المحور السيني جذرا لتلك المعادلة.
وفي معظم الأحيان لا يمكننا الحصول على دقة أعلى باستخدام هذه الطريقة لذلك لا نستخدم هذه الطريقة غالبا

مثال1:-
إذا كان لديك المعادلات الآتية قم بإيجاد الجذور لها باستخدام طريقة الرسم

$y_1=x$, $y_2 = x^2$

الحل:-

y	x
1	1
2	2
3	3

y	X^2
2	4
0	0
-2	4

وبعد رسم المعادلة الأولى والمعادلة الثانية فان نقطة تقاط المعادلتين هي التي تمثل الفترة إلي يقع فيها الجذر

مثال 2:-
إذا كان لديك المعادلة الآتية قم بإيجاد الجذور لها باستخدام طريقة الرسم

$$f(x) = e^x \sin(x) - 1$$

الحل:-

$$f(x) = \frac{e^x \sin(x)}{e^x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\sin x = e^{-x}$$

$$f_1 = \sin(x)$$

$$f_2 = e^{-x}$$

(3-2) الطرق التكرارية لحل المعادلات اللاخطية

- **طريقة التكرارات أو الإعادة (طريقة النقطة الصامدة)**

Fixed point it restive method

وهي تعتبر ابسط الطرائق وأقدمها والتي تستخدم في حل المعادلات اللاخطية تعتمد هذه الطريقة على فكرة ترتيب حدود المعادلة والتي هي $f(x) = 0$ بحيث يمكن كتابتها بالصيغة الآتية $x = g(x)$ ويقال لأي نقطة تحقق هذه الصيغة بأنها نقطة صامدة للدالة $g(x)$ وعليه سوف تكون جذرا للمعادلة $f(x) = 0$ إذن الصيغة العامة للطريقة الإعادة أو التكرارات أو النقطة الصامدة هي $x_{i+1} = g(x_i)$ حيث إن قيمة $i = 0,1,2, 3,\ldots\ldots$ فمن خلال هذه الصيغة نلاحظ عند أعطاه بالسؤال (قيمة أولية نحصل على قيمة جديدة (x1) ثم نستخدم هذه القيمة (x1) من اجل الحصول على (x2) وهكذا نحصل على سلسلة من القيم .

خوارزمية طريقة النقطة الصامدة Fixed point in terative method

الغاية منها هو إيجاد احد جذور المعادلة $f(x) = 0$ بعد تحويلها إلى العلاقة $x = g(x)$ عندما يكون هنالك معلومات مدخلة مثل القيمة الابتدائية التخمينية x0 وقيمة الخطأ € أما المخرجات فهي تمثل الجذر التقريبي (w) للمعادلة.

- نفرض إن لدينا كل من f(x), x0, €.
- نجد العلاقة $x = g(x)$.
- نجد قيمة x1 من تعويض قيمة x0 المعطاة بالعلاقة $x1 = g(x0)$

- $|x_1 - x_0| \prec \in$

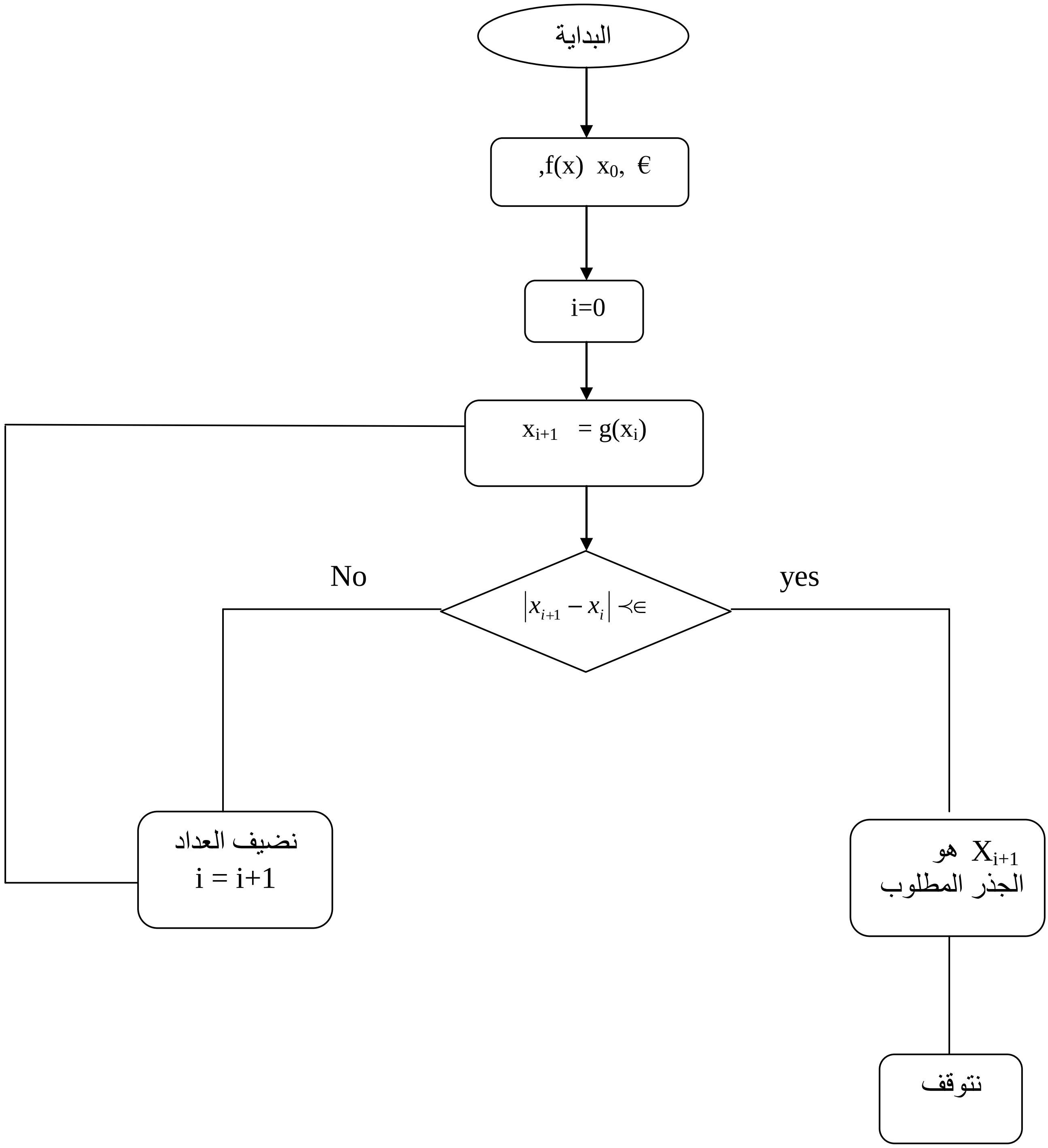
- نختبر العلاقة في النقطة أعلاه فإذا كان الجواب نعم نتوقف عن الحل ونعتبر x1 هو الجذر المطلوب أما إذا كان الجواب لا نقوم بإيجاد x2 = g(x1) ثم تختبر العلاقة الآتية

$|x_2 - x_1| \prec \in$

ثم نختبر العلاقة أعلاه إلى أن نصل إلى الجذر المطلوب

المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة النقطة الصامدة أو طريقة الإعادة أو طريقة التكرارات

عندما يكون لدينا مثل دالة معينة f(x) و قيمة خطا ونقطة ابتدائية x_0فان المخطط يكون بالشكل الاتي:-



الشكل(2-2) المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة النقطة الصامدة أو طريقة الإعادة أو طريقة التكرارات

مثال1:- يوضح كيفية إيجاد $g(x)$ من الدالة الأصلية $f(x) = x^2 - x + 1$

الحل:-

الطريقة الأولى:-

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x = x^2 + 1$$
$$x_1 = x_0^2 + 1$$

الطريقة الثانية:-

$$x^2 = x - 1$$
$$x = \pm\sqrt{x - 1}$$
$$x_1 = \pm\sqrt{x_0 - 1}$$

الطريقة الثالثة

$$x^2 - x + 1 = 0$$
$$x(x-1) + 1 = 0$$
$$\frac{x(x-1)}{(x-1)} = \frac{-1}{x-1}$$
$$x = \frac{-1}{x-1}$$
$$x_1 = \frac{-1}{x_0 - 1}$$

الطريقة الرابعة :-

$$g(x) = x - f(x)$$
$$= x - (x^2 - x + 1)$$
$$= x - x^2 + x - 1$$
$$= -x^2 + 2x - 1$$
$$g(x_1) = x_0^2 + 2x_0 - 1$$

مثال 2:- إذا كانت لديك المعلومات الآتية $f(x) = x^2-5x+4$, $x_0 = 1.5$ وقيمة الخطأ $€ = 0.001$ جد جذر المعادلة باستخدام طريقة النقطة الصامدة

الحل:-

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{x^2+4}{5} \Rightarrow x = \frac{x^2+4}{5} =$$

$$x_{i+1} = g(x_i) = \frac{x_i^2+4}{5} =$$

$$i = 0$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{x_0^2+4}{5} = \frac{(1.5)^2+4}{5} = 1.25$$

$$\therefore x_1 = 1.25$$

$$|x_1 - x_0| = |1.25 - 1.5| = 0.25 \prec 0.001 \Rightarrow no$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{x^2{}_1+4}{5} = \frac{(1.25)^2+4}{5} = 1.1125$$

$$|x_2 - x_1| = |1.1125 - 1.25| = 0.1375 \prec 0.001 \Rightarrow no$$

.

.

.

.

$$x_{12} = 1.000, x_{13} = 1.000$$

$$|x_{13} - x_{12}| = |1-1| = 0 \prec \in \Rightarrow yes$$

$$x_{13} = 1$$

ملاحظة1:- إذا لم يعطى قيم (x_0) بالسؤال فسنستخدم طريقة تغير الإشارة ولكن بهذه الحالة سوف يعطى الفترة وفترة التقسيم.

ملاحظة2:- إذا طلب بالسؤال إيجاد الحل إلى أن نصل إلى ثلاثة مراحل تكرارية وكان موجود بالسؤال قيمة(x_0) فسوف نقوم بإيجاد كل من (x_1, x_2, x_3) أما إذا ذكر نفس السؤال ولم يعطى قيمة (x_0) فسوف نجد كل من (x_0, x_1, x_2).

ملاحظة 3:- على الرغم من طول خطوات الحل فقد نحصل على تباعد ولكي نتجنب ذلك نقوم بعمل الاختبار الأتي:-

$$g(x_0) \Rightarrow g^{-}(x_0)$$

$$|g^{-}(x_0)| \prec 1 \text{تقارب}$$

$$|g^{-}(x_0)| \succ 1 \text{تباعد}$$

وبالاعتماد على المثال أعلاه سوف نختبر هل الحل تقارب أم تباعد

$$g(x) = \frac{x^2+4}{5}, x_0 = 1.5$$

$$g(x_0) = \frac{x_0^2+4}{5} \to \frac{x_0^2}{5} + \frac{4}{5}$$

$$g^{-}(x_0)=\frac{2x_0}{5}+0$$

$$\left|g^{-}(x_0)\right|=\left|\frac{2(1.5)}{5}\right|=\frac{3}{5}\prec 1\rightarrow 0.6\prec 1 تقارب$$

$$x_0=1.5$$
$$x_1=1.25$$
$$|x_1-x_0|=0.25$$
$$|x_2-x_1|=0.13$$

- **طريقة تعجيل النقطة الصامدة بطريقة (Aitken)**

تستخدم طريقة (Aitken) لتعجيل تقارب بعض الطرق التكرارية وذلك عن طريق استخدام ثلاثة قيم تقريبية متعاقبة وهي: x_i, x_{i+1}, x_{i+2} يتم استخدامها با أي طريقة من الطرق التكرارية ثم استخدام العلاقة التالية التخمينية لتخمين قيمة جديدة محسنة وهي:

$$\lambda_i=x_i-\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i},\ldots\ldots.i=0,1,2,3\ldots.$$

حيث نحصل على سلسلة من القيم حيث نتقارب نحو الجذر أسرع من سلسلة القيم بالنسبة x_i

$$\{\lambda\}_{i=0}^{\infty}\xrightarrow{converge}Root$$

ملاحظة:- إن الغاية من طريقة آيتكن أو طريقة تعجيل النقطة الصامدة هو تسريع الوصول إلى الجذر لطريقة النقطة الصامدة الاعتيادية $x=g(x)$ عندما تكون هنالك قيمة تخمينية أولية ل x_0

خوارزمية طريقة تعجيل النقطة الصامدة بطريقة (Aitken)

- احسب قيمة x_1 من خلال $x_1 = g(x_0)$.
- احسب قيمة x_2 من خلال $x_2 = g(x_1)$.
- احسب قيمة الجذر بطريقة أتيكن من خلال تطبيق المعادلة الآتية:

$$\lambda_1=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}$$

- سوف نتوقف عن الحل ونحصل على الجذر المطلوب (w) للمعادلة إذا تحقق الشرط الأتي:-

$$|\lambda-x_0|\prec\in\rightarrow yes$$

- أما إذا لم يتحقق الشرط الأتي

$$|\lambda-x_0|\prec\in\rightarrow no$$

نرجع مرة ثانية لحساب القيم من جديد

$$\lambda=x_0$$
$$x_1=g(x_0=\lambda)$$
$$x_2=g(x_1)$$
$$\lambda_2=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}$$
$$|\lambda_2-x_0|\prec\in$$

مثال:-

جد جذور المعادلة اللاخطية الآتية بطريقة آيتكن علما إن الدالة هي $x_0 = 4, € = 0.001, f(x) = x^2-2x-3$

الحل:-

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$
$$x = g(x)$$
$$x^2 = 2x + 3$$
$$x = \sqrt{2x+3}$$
$$x_1 = g(x_0 = 4) = \sqrt{2x_0 + 3} = \sqrt{2*4+3} = 3.316$$
$$x_2 = g(x_1 = 3.316) = \sqrt{2x_1 + 3} = \sqrt{2(3.316)+3} = 3.103$$
$$\lambda_1 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = 4 - \frac{(3.316-4)^2}{3.103 - 2(3.316) + 4} = 3.0067$$
$$|\lambda_1 - x_0| \prec \in \rightarrow |3.0067 - 4| \rightarrow |-0.9933| \prec \in$$
$$0.9933 \neq \prec \in$$
$$x_1 = g(x_0 = \lambda_1 = 3.0067)$$
$$x_1 = \sqrt{2(3.0067)+3} = 3.0022$$
$$x_2 = \sqrt{2(3.0022)+3} = 3.0007$$
$$\lambda_2 = 3.0067 - \frac{(3.0022 - 3.0067)^2}{3.0007 - 2(3.0022) + 3.0067} = 2.99995$$
$$|\lambda_2 - x_0| \prec \in \rightarrow |2.99995 - 3.0067| \prec \in \rightarrow |-0.00675| \prec \in$$
$$0.00675 \not\subset \in$$

وهكذا نستمر إلى أن نجد الحل أي الجذر التقريبي للمسالة

- **طريقة تنصيف الفترة أو الفترات أو طريقة الانشطار Bisection Method**

في المحاضرات السابقة اعتمدنا على تغير إشارة قيم الدالة f(x) في نقاط مختارة لتعيين مواقع الدالة f(x) = 0 لنفرض بأنة يوجد جذر للمعادلة في الفترة المغلقة $[x_1, x_r]$ أي إن $f(x_1)* f(x_r) <0$ إن طريقة تنصيف الفترة تشبه إلى حد بعيد طريقة تعيين مواقع الجذور المدروسة سابقا ففي هذه الطريقة نحسب قيمة الدالة f(x) من نقطة تقع في منتصف المساحة بين x_1, x_r فإذا كانت إشارتهما تختلف في منتصف المسافة بين x_1, x_r فإذا كانت إشارتها تختلف عن أشارة f(x1) فان الجذر يقع بين x_1 والمنتصف أما إذا تشابهت الإشارتان فإنها بالتأكيد ستكون مختلفة عن إشارة $f(x_r)$ وعليه يكون الجذر واقعا بين المنتصف و x_r . ويمكن تكرار العملية هذه عدة مرات للحصول على فترة ضيقة حول الجذر المطلوب.

خوارزمية تصنيف الفترة

نفرض انه لدينا f(x)=0 مستمرة ومعرفة على الفترة المغلقة [a , b]:-

- نجد منتصف الفترة من خلال تطبيق العلاقة الآتية:- (w= a + b/ 2).
- نقوم بتعويض في الدالة كل من النقاط الثلاثة a , b , w.
- نقوم باختبار حاصل ضرب الدوال والحصول على الإشارة الناتجة من عملية الضرب f(a)*f(w).

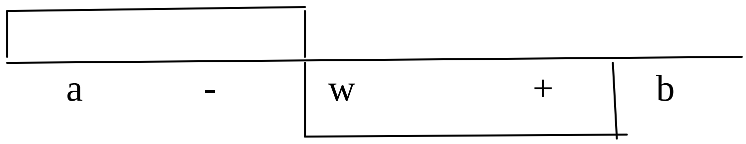
أ- إذا كانت f(a)* f(w) اقل من الصفر أي بمعنى سالب عندئذ فان الفترة الجديدة هي [a , w] و تهمل النقطة (b).

ب- إذا كانت f(a)* f(w) اكبر من الصفر أي بمعنى موجب عندئذ فان الفترة الجديدة هي [w, b] و تهمل النقطة (a).

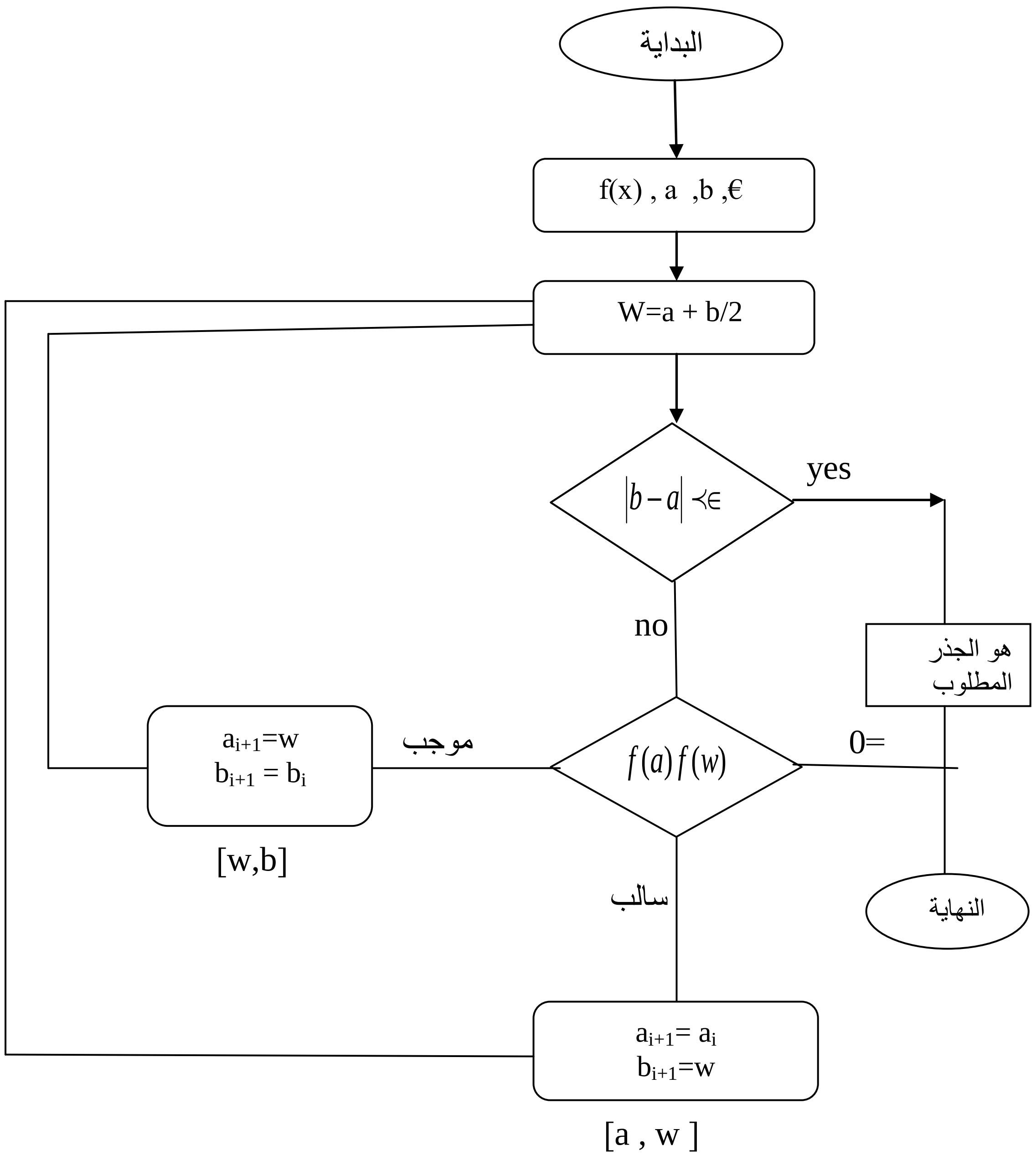
ت- إذا كانت f(a)* f(w) تساوي الصفر عندئذ فان (w) هو الجذر المطلوب.

- نقوم بتصنيف الفترة إلى إن نصل إلى فترة صغيرة جدا تحقق العلاقة الآتية $|b_i - a_i| \prec \in$

ملاحظة:- عند الحل نرسم خط الأعداد ومنه نحدد الفترة إذا كانت (سالبة) نأخذ الفترة [a , w] وإذا كانت (موجبة) نأخذ [w, b]



المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة تنصيف الفترة



الشكل(2-3) المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة تنصيف الفترة

مثال:-

حل المعادلة الآتية باستخدام طريقة تنصيف الفترة $f(x) = x^2+5x+2$ علما إن [4 ,2-] وقيمة الخطأ 0.001

الحل:-

$$w_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$|b-a| \prec \in \rightarrow |4-(-2)| = 6 \not\subset \in$$

$$f(a) = f(-2) = -4$$

$$f(b) = f(4) = 38$$

$$f(w) = f(1) = 8$$

$$f(a)f(w) = (-4)(8) = -32 \prec 0$$

$$[a,w] = [-2,1]$$

$$w_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$|b-a| \prec \in \rightarrow |1+2| = 3 \not\subset \in$$

$$f(a) = f(-2) = -4$$

$$f(w) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

$$f(a)f(w) = (-4)(\frac{-1}{4}) = 1 \succ 0$$

$$[w,b] = \left[-\frac{1}{2},1\right]$$

$$w_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{-1}{2}+1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$|b-a| \prec \in |1+1/2| = 3/2 \not\subset \in$$

وهكذا نستمر إلى أن نصل إلى اصغر فترة التي تحصر الجذر بداخلها.

****مبرهنة****

لتكن f دالة مستمرة ضمن الفترة [a , b] وان f(a) f(b) <0 فان طريقة التنصيف :-

1 تكون متتابعة $\{p_n\}_{n=1}$ في النقاط التي تقترب من الجذر p

2 تحقق الشرط

$$|p_n - p| \le \frac{a-b}{2^n}, n \ge 1$$

****كيفية حساب عدد الخطوات اللازمة للوصول إلى دقة معينة في الخطأ المتوقع ****

$$|p_n - p| \le \frac{a-b}{2^n}, n \ge 1$$

$$e_n \le \frac{b-a}{2^n} \prec \in$$

$$\ln(b-a)^2 - \ln 2^n \prec \ln \in$$

$$-n\ln 2 \prec \ln \in - \ln(b-a)$$

$$-n \prec \frac{\ln \in - \ln(b-a)}{\ln 2} ......* -1$$

$$n \succ \frac{\ln(b-a) - \ln \in}{\ln 2}$$

$$n = \operatorname{int}\left\{\frac{\ln(b-a) - \ln \in}{\ln 2}\right\}$$

وان القانون أعلاه يستخدم لإيجاد قيمة (n)
ومن معلومات المثال السابق سوف نستخدم قانون النظرية أعلاه لمعرفة

$$n = \operatorname{int}\left\{\frac{\ln(b-a) - \ln \in}{\ln 2}\right\}$$

$$n = \operatorname{int}\left\{\frac{\ln(4-(-2)) - \ln(0.001)}{\ln 2}\right\} =$$

$$n = \operatorname{int}\{12.5507468\} = 12$$

بمعنى نحتاج للوصول إلى الجذر المطلوب (12) خطوة

- **طريقة نيوتن- رافسون Newtan- Raphso**

عندما تكون مشتقة الدالة f(x) بسيطة ومن السهل إيجادها فان الجذور الحقيقية للمعادلة اللاخطية يمكن إيجادها بدقة عالية باستخدام طريقة نيوتن- رافسون إن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة تعود إلى العالم نيوتن ولكن الصيغة المستخدمة حاليا تعود إلى العالم رافسون. وبشكل عام يكون القانون لهذه الطريقة بالشكل الأتي:-

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{-}(x_i)}$$

من المعادلة أعلاه نلاحظ بأنه كلما كبرت قيمة المشتقة $f^{-}(x)$ صغرت قيمة التصحيح (h) المطلوب إضافتها للحصول على قيمة الجذر المطلوبة ، وهذا يعني إن الاقتراب للجذر يكون سريعا وفعالا عندما يكون المماس للمنحي الدالة قرب النقطة (x0) شاقوليا تقريبا ومن ناحية أخرى فان قيمة (h) تصبح كبيرة عندما تكون المشتقة قريبة من الصفر وبهذا يكون الاقتراب للجذر بطئ أو قد لا يكون هنالك تقارب على الإطلاق.

****عيوب طريقة نيوتن –رافسون****

1 هذه الطريقة تحتاج إلى إيجاد المشتقة الأولى وفي بعض الأحيان لا يمكن إيجاد هذه المشتقة ولاسيما إذا كانت الدالة غير قابلة للاشتقاق.
2 قد لا يحصل تقارب إلى الجذر الأصلي ولاسيما إذا كانت النقطة الابتدائية بعيدة عن الجذر المطلوب.

****خصائص طريقة نيوتن –رافسون****

1 سرعة الاقتراب تربيعية حيث إن

$$e_{n+1} = x_i - \frac{f^{=}(x_i)}{2f^{-}(x_i)}e_n^2$$

2 نوع الاقتراب محلي لان نقطة البداية يجب إن تكون قريبة من الجذر المطلوب.

3 يتطلب حساب مشتقة الدالة عند كل تكرار ولا يمكن التقارب عندما $f^{-}(x_n) \to 0$

****الشروط الواجب توفيرها لتقارب طريقة نيوتن –رافسون****

1 عندما يكون حاصل ضرب f(a) مع f(b) اقل من الصفر معناها إن a , b تحتوي على الجذر لضمان وجود جذر ضمن الفترة المغلقة [a , b].
2 المشتقة الأولى للدالة لا تساوي صفر بمعنى لا توجد نهاية عظمى أو صغرى في الفترة [a, b]

$$f^{-}(x_n) \neq 0 \rightarrow \forall x_n \in [a,b]$$

3 المشتقة الثانية $f^{=}(x)$ لا تعتبر أشارتها ضمن الفترة [a , b] بمعنى لا يوجد نقطة انقلاب (عدم وجود نقاط انقلاب للدالة (f(x)) أي منحي الدالة f(x) يكون أما مقعر آو محدب ضمن الفترة المغلقة [a , b]

4
$$\left|\frac{f(a)}{f^{-}(a)}\right| \leq |b-a|$$

لكي نحصل على تقارب أي إذا كان

$$x_n \in [a,b] \rightarrow x_{n+1} \in [a,b]$$

خوارزمية طريقة نيوتن –رافسون

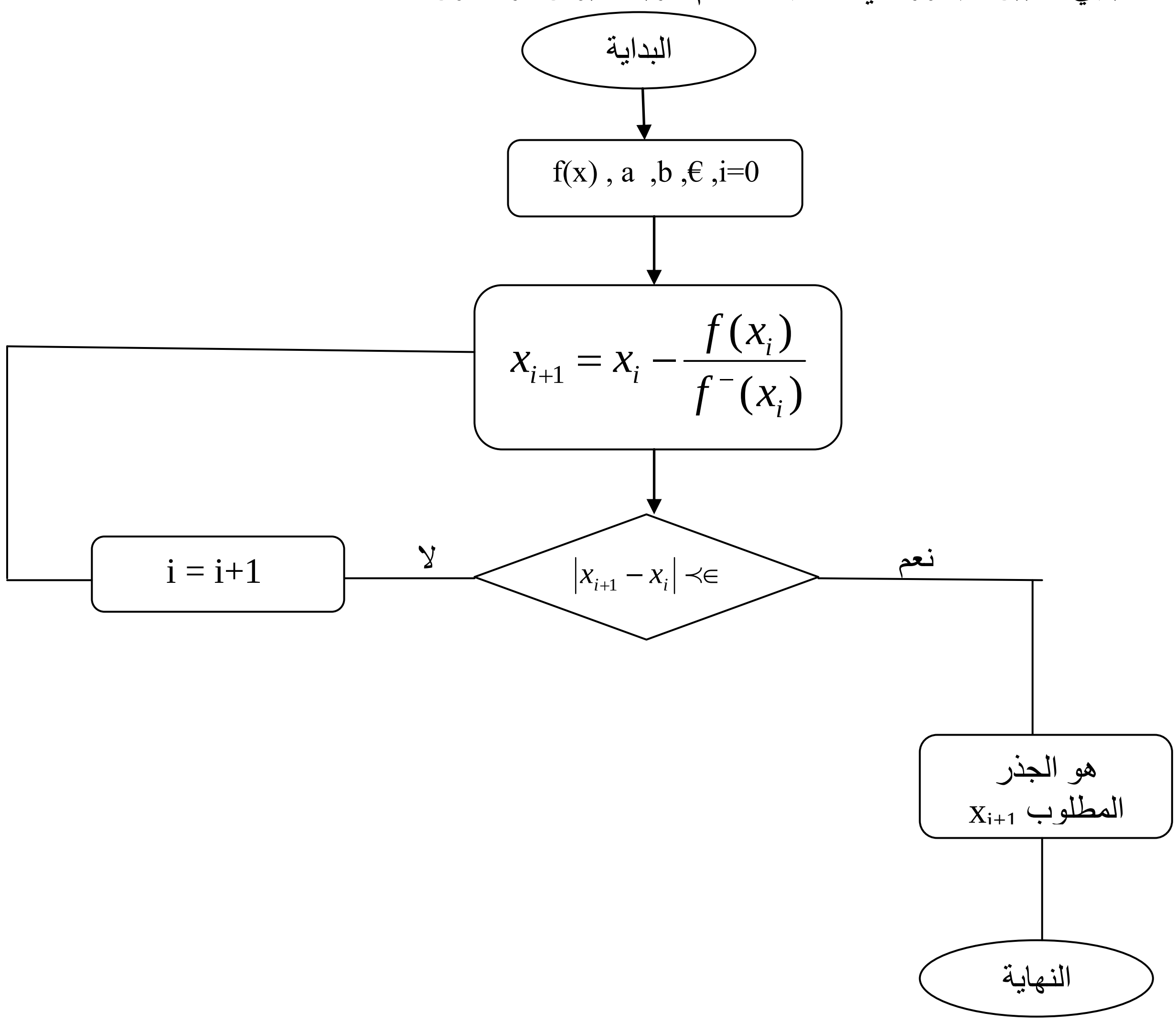
1 نفرض إن لدينا $f(x)$, x_0 , € .

2 نجد نقطة جديدة من خلال استخدام القانون الأتي:-
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{-}(x_i)}$$

3 نختبر العلاقة الآتية فإذا كان الجواب نعم نتوف ونعتبر (x_{i+1}) هو الجذر المطلوب أما إذا كان الجواب لا عندئذ نستمر لإيجاد نقطة جديدة

$$|x_{i+1} - x_i| \prec \in$$

المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة نيوتن- رافسون



الشكل(2-4) المخطط الانسيابي لتعيين الجذور لأي دالة باستخدام طريقة نيوتن- رافسون

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن- رافسون جد جذور المعادلة $f(x) = x^3-x-1\ ,\ x_0 = 1\ ,\ € = 0.001$

الحل:-

$$f(x_0 = 1) = (1)^3 - 1 - 1 = -1$$

$$f^-(x_0 = 1) = 3x^2 - 1 = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^-(x_0)} = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

$$|x_1 - x_0| \prec \in \rightarrow |1.5 - 1| \not\subset \in \rightarrow 0.5 \neq \prec 0.001$$

$$f(x_1 = 1.5) = (1.5)^3 - 1.5 - 1 = 0.875$$

$$f^-(x_1 = 1.5) = 3(1.5)^2 - 1 = 5.75$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^-(x_1)} = 1.5 - \frac{0.875}{5.75} = 1.34$$

$$|x_2 - x_1| = |1.34 - 1.5| = 0.16 \not\subset \in$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f^-(x_2)} =$$

$$f(x_2 = 1.34) = (1.34)^3 - 1.34 - 1 = 0.066$$

$$f^-(x_2 = 1.34) = 3(1.34)^2 - 1 = 4.38$$

$$x_3 = 1.34 - 0.015 = 1.325$$

$$|x_3 - x_2| \rightarrow |1.325 - 1.34| = 0.015 \neq \prec \in$$

وهكذا نستمر بالحل حتى نحصل على قيمة الجذر المطلوب

**** الحالات الخاصة لطريقة نيوتن-رافسون****

أ- إيجاد الجذر ألتربيعي:

لو حاولنا إيجاد الجذر ألتربيعي لأي عدد وليكن (n) وان $n > 0$ باستعمال طريقة نيوتن-رافسون وذلك بالاعتماد علة القانون التالي:-

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left\{x_i + \frac{n}{x_i}\right\} .., , i = 0,1,2,3,.....$$

مثال:- جد الجذر ألتربيعي للعدد (10) بطريقة نيوتن-رافسون علما إن القيمة الابتدائية هي $x_0 = 3$ وان قيمة الخطأ 0.0000001

الحل:-

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{x_0 + \frac{n}{x_0}\right\} =$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{3 + \frac{10}{3}\right\} = 3.1667$$

$$|x_1 - x_0| \prec \in \Rightarrow |3.1667 - 3| = 0.1667 \neq \prec \in$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left\{x_1 + \frac{n}{x_1}\right\} =$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left\{3.1667 + \frac{10}{3.1667}\right\} = 3.1623$$

$$\left|x_2 - x_1\right| \not\subset \in \left|3.1623 - 3.1667\right| = 0.0044 \not\subset \in$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left\{x_2 + \frac{n}{x_2}\right\} =$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left\{3.1623 + \frac{10}{3.1623}\right\} = 3.1623$$

$$\left|x_3 - x_2\right| \prec \in \Rightarrow \left|3.1623 - 3.1623\right| = 0 \prec 0.0000001$$

$$\therefore x_3 = 3.1623$$

إذن الجذر ألتربيعي للرقم (10) هو الجذر الثالث $x_3 = 3.1623$ بطريقة نيوتن –رافسون

ب - إيجاد الجذر لأي رتبة

إن القانون المستخدم لحساب الجذر لأي رتبة حسب طريقة نيوتن-رافسون هو

$$x_{i+1} = \left\{1 - \frac{1}{k}\right\} x_i + \frac{n}{k} x_i^{1-k} \,..,\, i = 0,1,2,3,.....,k = 2,3,4,......$$

مثال:- جد الجذر ألتكعيبي للعدد (7) بطريقة نيوتن-رافسون علما إن القيمة الابتدائية هي $x_0 = 1.5$ وان قيمة الخطأ 0.001

الحل:-

$$x_1 = \left\{1 - \frac{1}{3}\right\} 1.5 + \frac{7}{3}(1.5)^{1-3} = 2.03704$$

$$\left|x_1 - x_0\right| \prec \in \Rightarrow \left|2.03704 - 1.5\right| = 0.53704 \neq \prec \in$$

$$x_2 = \left[1 - \frac{1}{3}\right](2.03704) + \frac{7}{3}(2.03704)^{-2} = 1.92034$$

$$\left|x_2 - x_1\right| \prec \in \Rightarrow \left|1.92034 - 2.03704\right| = 0.1167 \neq \prec \in$$

$$x_3 = \left[1 - \frac{1}{3}\right](1.92034) + \frac{7}{3}(1.92034)^{-2} = 1.91296$$

$$\left|x_3 - x_2\right| \prec \in \Rightarrow \left|1.91296 - 1.92034\right| = 0.00738 \neq \prec \in$$

$$x_4 = \left(\frac{2}{3}\right)(1.91296) + \frac{7}{3}(1.91296)^{-2} = 1.91293$$

$$\left|x_4 - x_3\right| \prec \in \Rightarrow \left|1.91293 - 1.91296\right| = 0.00003 \prec 0.001$$

$$\therefore x_4 = 1.91293$$

إذن الجذر التكعيبي للعد (7) هو الجذر الرابع تم حسابه بطريقة نيوتن-رافسون.

ج – إيجاد مقلوب أي رقم

إن القانون المستخدم لحساب مقلوب أي رقم حسب طريقة نيوتن-رافسون هو

$$x_{i+1} = x_i(2 - n x_i) \,..,\, i = 0,1,2,3,....$$

مثال:-
جد مقلوب العدد (2) باستخدام طريقة نيوتن-رافسون علما $x_0 = 0.1, € = 0.0001$
الحل:-

$$x_1 = x_0(2 - nx_0)$$
$$x_1 = 0.1(2 - 2(0.1)) = 0.18$$
$$|x_1 - x_0| \prec \in \Rightarrow |0.18 - 0.1| = 0.08 \neq \prec 0.0001$$
$$x_2 = 0.18(2 - 2(0.18)) = 0.2952$$
$$|x_2 - x_1| \prec \in \Rightarrow |0.2952 - 0.18| = 0.1152 \neq \prec 0.0001$$
$$x_3 = 0.2952(2 - 2(0.2952)) = 0.4161$$
$$|x_3 - x_2| \prec \in \Rightarrow |0.4161 - 0.2952| = 0.1209 \neq \prec 0.0001$$
$$x_4 = 0.4161(2 - 2(0.4161)) = 0.4859$$
$$|x_4 - x_3| \prec \in \Rightarrow |0.4859 - 0.4161| = 0.0698 \neq \prec 0.0001$$
$$x_5 = 0.4859(2 - 2(0.4859)) = 0.4996$$
$$|x_5 - x_4| \prec \in \Rightarrow |0.4996 - 0.4859| = 0.0137 \neq \prec 0.0001$$
$$x_6 = 0.4996(2 - 2(0.4996)) = 0.4999$$
$$|x_6 - x_5| \prec \in \Rightarrow |0.4999 - 0.4996| = 0.0003 \neq \prec 0.0001$$
$$x_7 = 0.4999(2 - 2(0.4999)) = 0.4999$$
$$|x_7 - x_6| \prec \in \Rightarrow |0.4999 - 0.4999| = 0 \prec 0.0001$$
$$x_7 = 0.4999 \cong \frac{1}{2}$$

إذن مقلوب العد (2) هو الجذر السابع الذي تم حسابه بطريقة نيوتن-رافسون

• طريقة الموضع الكاذب **False position method**

تعتبر هذه الطريقة من الطرق القديمة للحساب جذور المعادلة حيث نجد عددين مثل x_1, x_2 بحيث يقع الجذر المطلوب x_3 بينهما إن مخطط الدالة $y = f(x)$ يقطع المحور x في النقطتين x_1, x_2 وان $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$ ولهما قيمتان مختلفتان بما انه بالإمكان تقريب أي قطعة من منحني الدالة إلى خط مستقيم لذا سوف نفرض إن قطعة المستقيم $\overline{PQ} = \overline{(x_1,y_1)\ (x_2,y_2)}$ بمثابة تقريب للدالة $f(x)$ في الفترة المغلقة $[x_1, x_2]$ وبالتالي تعتبر نقطة تقاطع المستقيم مع المحور (x) هي قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$

****اشتقاق الصيغة العامة للحساب القيمة التقريبية للجذر باستخدام طريقة الموضع الكاذب****

نحسب قيمة (c_1) من معادلة خط المستقيم (L)

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

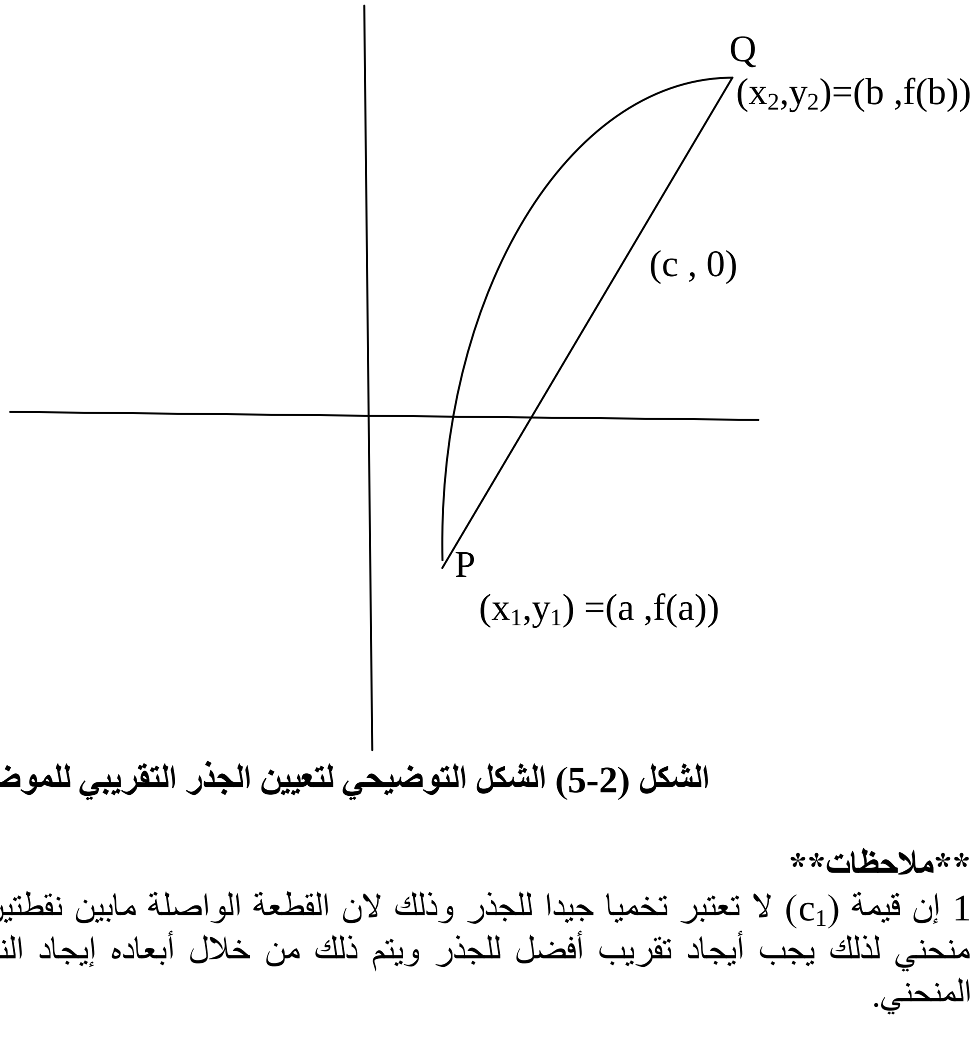
$$(x_1, y_1) \Rightarrow (a, f(a))$$
$$(x_2, y_2) \Rightarrow (b, f(b))$$
$$(x, y) \Rightarrow (c_1, f(c_1))$$

بوضع $f(c_1) = 0$ نحصل على:

$$\frac{0 - f(b)}{c_1 - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$- f(b)(b - a) = (c_1 - b)(f(b) - f(a))$$
$$- f(b)(b - a) = c_1(f(b) \_ f(a)) - b(f(b) - f(a))$$
$$b(f(b) - f(a)) - (f(b)(b - a)) = c_1\left[f(b) - f(a)\right]$$
$$\frac{c_1\left[f(b) - f(a)\right]}{\left[f(b) - f(a)\right]} = \frac{b\left[f(b) - f(a)\right] - f(b) - (b - a)}{\left[f(b) - f(a)\right]}$$
$$c_1 = \frac{b\left[f(b) - f(a)\right]}{\left[f(b) - f(a)\right]} - \frac{f(b) - (b - a)}{\left[f(b) - f(a)\right]}$$

$$\therefore c_1 = b - \frac{f(b) - (b - a)}{f(b) - f(a)} =$$
$$c_1 = b - dx$$

إذن يعتبر (c_1) هو الجذر التقريبي المطلوب ويمكن إن نكرر هذه العملية للحصول على الدقة المطلوبة للجذر



الشكل (2-5) الشكل التوضيحي لتعيين الجذر التقريبي للموضع الكاذب

****ملاحظات****

1 إن قيمة (c_1) لا تعتبر تخميا جيدا للجذر وذلك لان القطعة الواصلة مابين نقطتين Q,P هي قطعة مستقيم وليس منحني لذلك يجب أيجاد تقريب أفضل للجذر ويتم ذلك من خلال أبعاده إيجاد النقطتين اللتان تقعان على طرفي المنحني.

2 طريقة الموضع الكاذب تشبه خوارزمية الانشطار عدا القانون المستخدم لحساب الجذر c.

3 بطريقة الانشطار الجذر يأخذ منتصف الفترة أما في طريقة الموضع الكاذب يأخذ الجذر اقل من المنتصف.

4 أسرع طريقة للوصول إلى الجذر هي طريقة الموضع الكاذب. أما أكفى طريقة للوصول للجذر هي طريقة تنصيف الفترات

مميزات طريقة الموضع الكاذب

1 تعتبر طريقة الموضع الكاذب أفضل من طريقة تنصيف الفترة وذلك لأنها تتقارب من الحل أسرع وبعدد اقل من التكرارات.

2 مضمونة الوصول إلى الجذر ولهذا هي ذات النوع اقترابي شمولي.

3 تعتمد هذه الطريقة على تقدير المنحني إلى قطعة مستقيم أي تقريب المعادلة اللاخطية إلى معادلة خطية.

4 نلاحظ عدم استخدام مقياس التوقف $|b_n - a_n| \prec \in$

إذا كانت $(b_n - a_n)$ أحيانا تقترب من الصفر

عيوب طريقة الموضع الكاذب

صعوبة اختيار النقاط الأولية الواقعة على طرفي الجذر Q,P

خوارزمية طريقة الموضع الكاذب

1 إدخال كل من a , b, f(x), € .

2

$$c = b - d_x$$
$$d_x = \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

3 نقوم بحساب حاصل ضرب الدوال f(b)f(c)

أ- f(b)f(c) = 0 ففي هذه الحالة نتوقف عن الحل ونعتبر (c) هو الجذر المطلوب.

ب- f(b)f(c) > 0 سوف نضع b = c ونحسب f(b) = f(c) وتكون الفترة الجديدة [a, b=c].

ت- f(b)f(c) < 0 سوف نضع a =c ونحسب f(a) =f(c) وتكون الفترة الجديدة [c=a,b].

4 نقوم بحساب مقياس التوقف فإذا تحقق الشرط نطبع قيمة (c) وتعتبر هي الجذر المطلوب أما إذا لم يتحقق الشرط فنذهب من جديد ونكرر الخطوات ونقوم بإيجاد قيمة (c) من جديد.

مثال:-

جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة الموضع الكاذب للدالة الآتية علما إن الفترة [0,2] وقيمة الخطأ 0.001

f(x) = x sin(x)-1

الحل:-

$$a_0 = 0 \Rightarrow f(a_0) = -1$$
$$b_0 = 2 \Rightarrow f(b_0) = 0.8185949$$
$$c_1 = b_0 - \frac{f(b_0)(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = 2 - \frac{0.8185949(2-0)}{0.8185949 - (-1)} = 2.900249857$$
$$c_1 = 2.900249857 \Rightarrow f(c_1) = -0.306820791$$
$$f(b_1) f(c_1) = (0.8185949)(-0.306820791) = -0.251161935 \prec 0$$
$$\therefore [c = a, b]$$
$$|dx| \prec 0.001 \Rightarrow |-0.900249857| \neq\prec 0.001$$
$$c_2 = b_1 - \frac{f(b_1) - (b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

وهكذا نستمر بالحل إلى أن نجد اصغر فترة تحتوي جذر المطل

- **Secant Method طريقة القاطع**

إن طريقة القاطع لإيجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة تشبه إلى حد بعيد طريقة الموضع الكاذب. لتطبيق الطريقة نقوم أولا بإيجاد تقريبيين للجذر هما (x_0) (x_1) ليس من الضروري أن يكونا على جهتي الجذر المطلوب كما في طريقة الموضع الكاذب ولكي نحسب القيمة التقريبية الجديدة للجذر نجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_0,f(x_0))$ و $(x_1,f(x_1))$، فتكون القيمة التالية للجذر الجديد (x_2) عبارة عن نقطة تقاطع المستقيم مع محور- x وبنفس الطريقة نحسب (x_3) من تقاطع المستقيم المار بالنقطتين $(x_1,f(x_1))$ و $(x_2,f(x_2))$ مع المحور -x بالتكرار نحصل على متتابعة من قيم (x) وذلك بتطبيق الصيغة العامة لطريقة القاطع والتي تمثل بالقانون التالي:-

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

بحيث إن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_0,f(x_0))$ و $(x_1,f(x_1))$ ليس قريبا من الصفر بعبارة أخرى يجب أن لا تكون مشتقة الدالة (f) قرب النقطتين قريبة من الصفر لأنه قد نحصل على متتابعة لقيم x متقاربة ببط أو حتى متباعدة ويمكن ملاحظة ذلك باستخدام خوارزمية طريقة القاطع.

خوارزمية طريقة القاطع

- إدخال كل من $x_0, x_1, f(x), €$.
- نحسب كل من $f(x_0), f(x_1)$.
- نجد قيمة x_2 من خلال تطبيق المعادلة الآتية:-

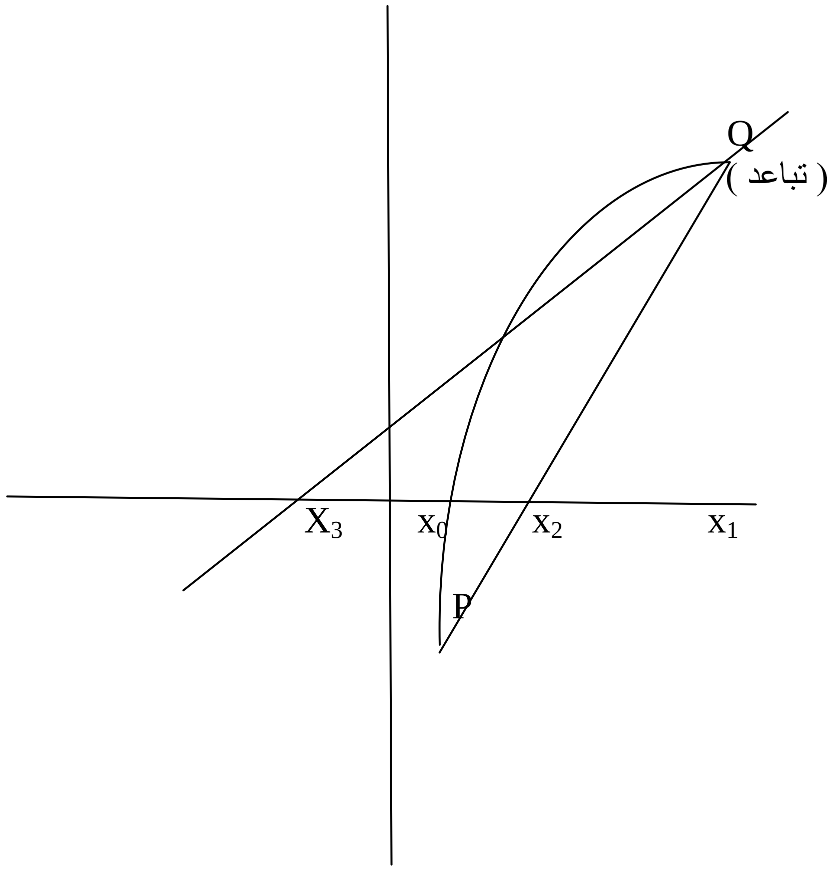
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

- نختبر باستخدام المقياس إذا كان الجواب نعم نتوقف ونعتبر x_2 هو الجذر المطلوب أما أذا كان الجواب لا سوف نستخدم x_1, x_2 لاستخراج x_3 وهكذا إلى أن نصل إلى الجذر المطلوب

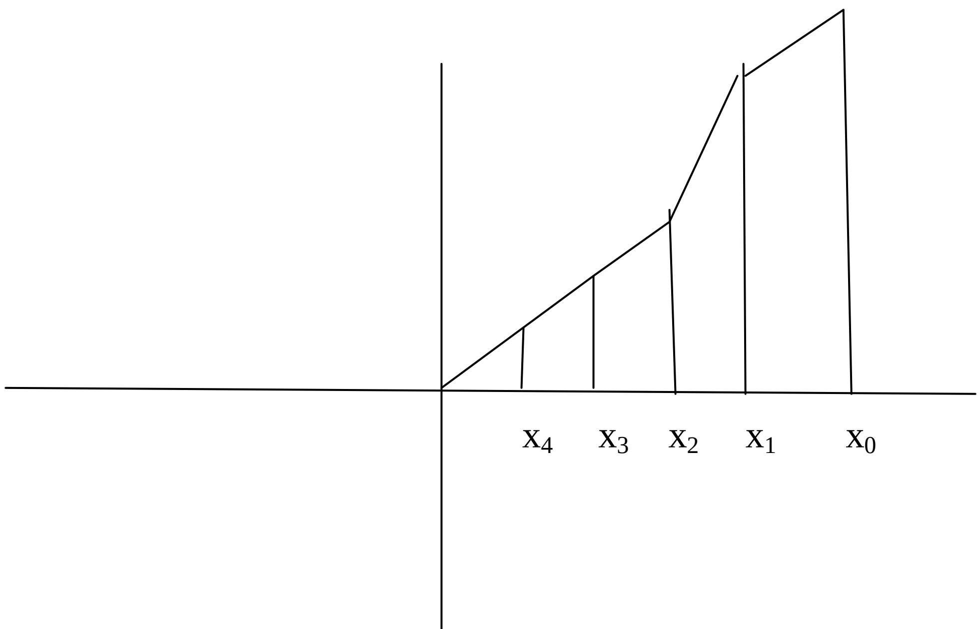
$$|x_2 - x_1| \prec \in$$

خواص طريقة القاطع

- سرعة الاقتراب في طريقة القاطع فوق الخطية.
- نحتاج إلى حساب قيمة الدالة مرة واحده عند كل تكرار.
- نوع الاقتراب محلي لأنها تحتاج أن تكون البداية على إحدى إطراف الجذر.



الشكل (2-6) الشكل التوضيحي لتعيين الجذر التقريبي لطريقة القاطع في حالة التباعد



الشكل (2-7) الشكل التوضيحي لتعيين الجذر التقريبي لطريقة القاطع في حالة التقارب

مثال:-

جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة القاطع للدالة الآتية علما إن $x_0 = -2.6, x_1 = -2.4$ وقيمة الخطأ 0.0005

$$f(x) = x^3-3x+2=0$$

الحل:-

$$f(x_0) = (-2.6)^3 - 3(-2.6) + 2 = -7.776$$
$$f(x_1) = (-2.4)^3 - 3(-2.4) + 2 = -4.624$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} =$$
$$x_2 = -2.4 \frac{-4.624(-2.4 - (-2.6))}{-4.624 - (-7.776)} = -2.106$$
$$|x_2 - x_1| \prec \in \Rightarrow |-2.106 - (-2.4)| = 0.294 \neq \prec 0.0005$$
$$x_1 = -2.4, x_2 = -2.106$$
$$f(x_2) = (-2.106)^3 - 3(-2.106) + 2 = -1.022$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} =$$
$$x_3 = -2.106 - \left\{ \frac{(-1.022)(-2.106) - (-2.4)}{(-1.022) - (-4.624)} \right\} = -2.022$$
$$|x_3 - x_2| \prec 0.0005 \Rightarrow |-2.022 + 2.106| = 0.084 \neq \prec \in$$
$$x_2 = -2.106, x_3 = -2.022$$
$$f(x_2) = -1.022, f(x_3) = -2.2$$
$$x_4 = x_3 - \left[\frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \right]$$
$$x_4 = -2.022 - \left[\frac{(-2.2)(-2.022 + 2.106)}{(-2.2 + 1.022)} \right] = -2.1788$$
$$|x_4 - x_3| \prec \in \Rightarrow |-2.1788 + 2.022| = 0.1568 \neq \prec 0.0005$$

وهكذا نستمر بالحل إلى إن نجد الجذر المطلوب

الواجبات

السؤال الأول:- جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة الإعادة أو طريقة النقطة الصامدة
$€ = 0.001$, $x_0 = 4$, $F(x) = x^2-2x-3=0$

السؤال الثاني:- جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة تنصيف الفترة للدوال الآتية علما إن الفترة [1,2] وقيمة الخطأ 0.001

1 $f(x) = x^3+x^2-3x-3$

2 $f(x) = x \ln(x)-1$

السؤال الثالث:- جد جذور المعادلة الآتية باستخدام طريقة الموضع الكاذب للدالة الآتية علما إن الفترة [1,2] وقيمة الخطأ 0.001

$f(x) = x \log(x)-1$