الفصل الثامن

المعادلات التفاضلية

(1-8) المقدمة

المعادلة التفاضلية:- هي إي معادلة (ليست متطابقة) مكونة من دوال جبرية أو دوال متسامية أو معا وتحتوي على مشتقات مثل:-

$$y''+3y=x^2 \rightarrow 1$$

$$(3x+2y)^2 y'=1\rightarrow 2$$

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=2z\rightarrow 3$$

أنواع المعادلات التفاضلية :- تقسم المعادلات التفاضلية إلى نوعيين

- المعادلة التفاضلية الاعتيادية
- المعادلة التفاضلية الجزئية

$$(1+2y'^2)=8y''$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)-\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=0$$

رتبة المعادلة التفاضلية :- يمكن تعريفها با أنها أعلى مشتقة تظهر في المعادلة

$$y''+3y=8xy'\rightarrow \text{رتبة}\quad 2$$

$$y'''+\frac{y'}{2x}=0\rightarrow \text{رتبة}\quad 3$$

$$\frac{dp}{dx}+\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{dz}=0\rightarrow \text{رتبة}\quad 1$$

درجة المعادلة التفاضلية:- يمكن تعريفها بكونها أعلى أس للأعلى مشتقة في المعادلة

من الرتبة الثانية والدرجة الثالثة

$$7x^2+8xy''^3+8y'=0$$

من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

$$\frac{3x^2}{y^2}+(y'x')^2+2y''=8$$

(2-8) المعادلات التفاضلية الخطية

أية معادلة تفاضلية مهما كانت رتبتها تكون خطية إذا تكون المتغير المعتمد فيها وجميع المشتقات التي تظهر فيها من الدرجة الأولى وغير مضروبة ببعضها وتكون صيغتها العامة هي:-

$$a_0y^n+a_1y^{n-1}+.......+a_{n-1}y+a_ny=0$$

حيث إن المعاملات $a_0,a_1,a_2,......a_n$ إذا كانت دوال تسمى المعادلات التفاضلية بالمعادلات الخطية المتجانسة أما إذا كانت المعاملات $a_0,a_1,a_2,......a_n$ ثوابتا تسمى المعاملات التفاضلية الخطية بالمعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة

حل المعادلات التفاضلية هو أي علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث إن هذه العلاقة تكون:-

- خالية من المشتقات.
- معرفة على فترة معينة.
- تحقق المعادلة التفاضلية.

مثال للتحقيق الشروط أعلاه

$$x.\frac{dy}{dx}=x+y, x\succ 0$$

حيث إن احد حلولها هي $y= x\ln(x)-x$

الحل:-
هذه المعادلة خالية من المشتقات ومعرفة ضمن فترة تواجد بالمعادلة التفاضلية أي إن $x > 0$ كما أنها تحقق المعادلة أعلاه يمكن إثبات ذلك بالتعويض المباشر

$$x.\frac{d}{dx}(x\ln x - x) = x + (x\ln x - x)$$
$$x(x.\frac{1}{x} + \ln(1) - 1) = x + x\ln(x) - x$$
$$x + x\ln(x) - x = x\ln(x)$$
$$x\ln(x) = x\ln(x)$$

أنواع المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

- المعادلة التفاضلية التي تنفصل متغيراتها.
- المعادلة التفاضلية المتجانسة.
- المعادلة التفاضلية ذات المعاملات الخطية .
- المعادلات التفاضلية التامة.
- المعادلة التفاضلية الخطية.
- معادلة برنولي.

طرق حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.
المعادلات التفاضلية التي تنفصل متغيراتها إن هذا النوع من ابسط الحالات وممكن وضعها بالشكل الأتي:-

$$g(x)dx+h(y)dy=0$$

مثال1:- حل المعادلة التفاضلية الآتية:- $x\,dx+y\,dy=0$

$$\int xdx + \int ydy = \int 0dx$$
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c$$

مثال2:- حل المعادلة التفاضلية الآتية:- $x^2dx +(y+1)^3\,dy =0$

$$\int x^3dx + \int (y+1)^3dx = \int 0dx$$
$$\frac{x^4}{4} + \frac{(y+1)^4}{4} + c$$

تكون المعادلة التفاضلية الاعتيادية من مجموع الحل العام
يمكن إيجاد المعادلة التفاضلية إذا علمت مجموع الحل العام التابع لها وذلك ملاحظة عدد الثوابت الاختيارية في مجموعة الحل العام التابع لها ورتبة المعادلة التفاضلية
مثال:- جد حل المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو

$y=c_1x+c_2x^3$….. 1

$$y' = c_1 + 3c_2x^2 ....2$$
$$y'' = 6c_2x.....................3$$
$$\frac{y''}{6x} = \frac{6c_2x}{6x}, c_2 = \frac{y''}{6x}........4$$

$$y' = c_1 + \frac{3y''}{6x}.x^2$$

$$c_1 = y' - \frac{y''}{2}x........5$$

$$y = (y' - \frac{y''}{2}x)x + \frac{y''}{6x}x^3$$

$$y = xy' - \frac{y''}{2}.x^2 + \frac{x^2 y''}{6}$$

Fourier sevies سلاسل فورير (3-8)

Periodic functions الدوال الدورية

A function f(x) is said to have a period (p) or to be periodic with period (p) if for f(x) = f(x+p) ….1where (p)is a positive constant .the least value of (p>0) is called the least period or simply the period of f(x)

EX1:- The function (sin(x))has periods (2Π,4Π,6Π,……)since

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\sin(x+4\pi) = \sin(x)$$
$$\sin(x+6\pi) = \sin(x)$$

However 2Π, is the least period or the period of (sin(x))

EX2:- The period of (tan(x)) is (Π)

EX3:- The period of (sin nx) or (cos nx) where (n) is positive integer (2Π/n)

EX4:- A constant has any positive number as period, meaning the function f(x)=c is constant f(x) is also periodic function because it from eq(1) for positive (p)

EX5:- The function that are not periodic are { x, x^2, x^3, e^x, ln(x),……}

ملاحظة:- الدالة الثابتة دائما دالة مستمرة ودورية

Fourier series

From eq(1) we have f(x+2p)=p(x+p+p) =f(x+p)=f(x) and for any integer (n) f(x+np) = f(x) for all x……2 have 2p, 3p, 4p, ….are also period of f(x).

Note1
If f(x) and g(x) has a period (p) ,then the
h(x) = af(x)+bg(x), a,b are constant also has aperiod (p)
Note2
Cos(x), sin(x), cos2(x), sin2(x)……,cosn(x),sinn(x), which have the period 2Π

Note3

The series that will arise in the will be of the from $a_0+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos2(x)+b_2\sin2(x)+a_3\cos3(x)+b_3\sin3(x)+\ldots\ldots+a_n\cos n(x)+b_n\sin n(x)\ldots\ldots.3$

Where $a_0,a_1,a_2,\ldots.a_n$, $b_1,b_2,\ldots\ldots b_n$ are real constants.

Such a series is called a Trigonometric series and $(\mathbf{a_n})$ and $(\mathbf{b_n})$ are called coefficients of T.S we may write the series by:-

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos m(x)dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin n(x)dx$$

EX1:- Find the Fourier series of the periodic function:-

$$f(x)=\begin{cases}-k,-\pi\prec x\prec 0\\ k,0\prec x\prec\pi\end{cases}$$

$sol:-$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-kdx+\int_{0}^{\pi}kdx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[-kx]_{-\pi}^{0}+[kx]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}[-k(0)-(-k(-\pi))-((k\pi)-(k(0))]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[0+k\pi-k\pi-0]=0$$

$$a_0=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-k\cos n(x)dx+\int_{0}^{\pi}k\cos n(x)dx\right]$$

$$=\frac{k}{\pi}\left[\frac{-\sin(x)}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{1}{n}\sin n(x)\right]_0^{\pi}=0$$

$$a_n=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-k\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}k\sin nxdx\right]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{k}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{0}-\left[\frac{k}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$b_n=\frac{k}{n\pi}[\cos(0)-\cos(-n\pi)-(\cos n\pi+\cos(0)]$$

$$b_n=\frac{k}{n\pi}[1-\cos n\pi-\cos n\pi+1]$$

$$b_n=\frac{k}{n\pi}[2-2\cos n\pi]$$

$$bn = \frac{2k}{n\pi}[1 - \cos n\pi]$$

$$n_1 \Rightarrow b_1 = \frac{2k}{\pi}[1 - \cos(\pi)] = \frac{2k}{\pi}[1 - (-1)] = \frac{4k}{\pi}$$

$$n_2 \Rightarrow b_2 = \frac{2k}{2\pi}[1 - \cos 2(\pi)] = \frac{2k}{2\pi}[1 - 1] = 0$$

$$n_3 \Rightarrow b_3 = \frac{2k}{3\pi}[1 - \cos 3(\pi)] = \frac{2k}{3\pi}[1 - (-1)] = \frac{4k}{3\pi}$$

$$n_4 \Rightarrow b_4 = \frac{2k}{4\pi}[1 - \cos 4\pi] = \frac{2k}{4\pi}[1 - 1] = 0$$

حسب المثال أعلاه عندما (n) عدد زوجي تكون $b = 0$ وعندما (n) عدد فردي فان $b = 4k/n\Pi$ ثم نعوض الحدود a_0, a_n, b_n بسلسلة Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}((0)\cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots\ldots \frac{4k}{\pi}\sin x + 0 + \frac{4k}{3\pi}\sin 3x + \ldots\ldots\ldots$$

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\ldots\right]$$

In general if P=2L period of periodic from then

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L} + b_n \sin\frac{n\pi}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \ldots\ldots\ldots 1$$ حفظ

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}dx \ldots\ldots\ldots 2$$ حفظ

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}dx \ldots\ldots\ldots 3$$ حفظ

EX:- Find the Fourier series of the function

$$f(x) = \begin{cases} 0, -2 \prec x \prec -1 \\ k, -1 \prec x \prec 1 \\ 0, 1 \prec x \prec 2 \end{cases}$$

$$p = 2L = 4 \rightarrow L = 2$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{L} x + b_n \sin\frac{n\pi}{L} x)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1} odx + \int_{-1}^{1} kdx + \int_{1}^{2} 0dx\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{1} kdx\right] = \frac{1}{4}[kx]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}[k+k]$$

$$a_0 = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\frac{\cos n\pi}{L} xdx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{32} f(x)\cos\frac{n\pi}{L} xdx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi}{2} dx\right] = \frac{k}{2} . \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2} x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{k}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{-n\pi}{2}\right] = \frac{k}{n\pi}\left[2\sin\frac{n\pi}{2}\right] =$$

$$a_n = \frac{2k}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$n_1 = a_1 = \frac{2k}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{2k}{\pi}$$

$$n_2 = a_2 = \frac{k}{\pi}\sin(\frac{2\pi}{2}) = 0$$

$$n_3 = a_3 = \frac{2k}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{2}) = \frac{-2k}{3k}$$

:

:

$$a_n = \frac{2k}{n\pi}, n = 1,5,9,......$$

:

:

:

$$a_n = \frac{-2k}{n\pi}, n = 3,7,11,......$$

$$a_n = 0,$$

$$b_n = 0$$

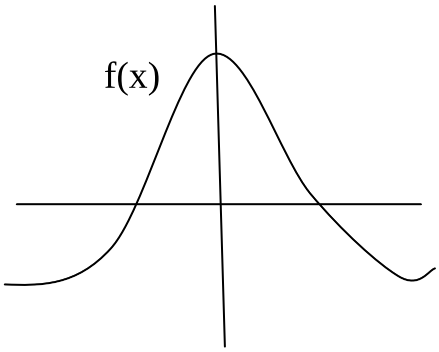
Fourier series even and odd functions (4-8) سلاسل فورير للدوال الفردية والزوجية

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n conn(x) + b_n \sin n(x))$$

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} - \frac{2k}{3\pi} + \frac{2k}{5\pi} - \frac{2k}{7\pi} + ... + 0 = b_n$$

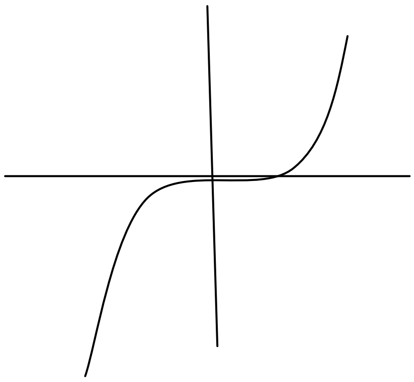
Even and odd functions:- a function y =g(x) is said to be even if g(-x)=g(x) the graph of such function is symmetric with respect to the y-axis

even function



Cos(x)

A function y =h(x) is said to be odd if h(-x)= -h(x)   y= sin(x) is odd function



Odd function

Note:- the product k = g h   k(-x)=g(-x) h(-x)
g(x) h(-x) =-
k(-x)=negative is odd

Theorem:- Fourier series even and odd functions

Fourier series of a_n even function f(x) of (2L) is a(Fourier cosine series)

$$f(x) = a_0 + \sum a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

F(x) is even with coefficients

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx, n = 1,2,3......$$
$$b_n = 0$$
$$2L = 2\pi$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx$$
$$b_n = 0$$

The Fourier cosines series

فان الشكل النهائي لمتسلسلة الجيب تمام

$F(x) = a_0+a_1\cos(x) +a_2\cos2(x) +\ldots\ldots\ldots+a_n\cos n(x)$

دائما متسلسلة فورير المتناظرة لدالة الزوجية فلا تظهر إلا حدود جيب تمام فقط (مع احتمال وجود حد ثابت والذي يمكن اعتباره من حدود الجيب تمام)

Similarly the Fourier series of a_n odd function f(x) of 2Π is Fourier sine series

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx......n=1,2,3$$

$$\pi = L$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int f(x)\sin n(x)dx....\text{حفظ}$$

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

The Fourier sines series

فان الشكل النهائي لمتسلسلة الجيب

$F(x)= b_1\sin(x)+b_2\sin2(x)+ b_3\sin3(x)+\ldots\ldots.b_n\sin n(x)$

$a_0=0$, $a_n=0$

في متسلسلة فورير المناظرة لدالة الفردية لا تظهر الا حدود الجيب فقط sin(x)

Theorem:-sum function

The Fourier coefficient of sum f_1+f_2 are the sums of the corers pounding Fourier coefficients of $f_1$and f_2

The Fourier coefficients of the (cf) are © time the corresponding Fourier coeff icint

EX1:- find the Fourier series of the function f(x) = x +Π if -Π< x < Π of f(x+2Π) = f(x)

$$sol:-$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi dx = \frac{1}{2}[x]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos n(x)dx = \frac{1}{n}[\sin n(x)]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin n(x)dx = \left[\frac{-1}{n}\cos n(x)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{-1}{n}[\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)] = 0$$

$$f_2(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(x) + b_n \sin n(x)$$

$$f_2(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (0\cos n(x) + 0\sin n(x)) = \pi$$

$$f_1 = x$$

$$\therefore a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_1(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin n(x)dx$$

$$u = x, dv = \sin n(x)dx$$

$$du = dx, v = \frac{-1}{n}\cos n(x)$$

$$= uv - \int vdu$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{-x\cos n(x)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos n(x)dx\right] = \frac{-2}{n}\cos n\pi$$

$$b_1 = 2, b_2 = -1, b_3 = \frac{-2}{3}\cos 3\pi = \frac{2}{3}, b_4 = \frac{-2}{4}\cos 4\pi = \frac{-1}{2}$$

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n(x) = b_1 \sin 1x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + ...$$

$$= 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + ...$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f(x) = \pi + 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + ...$$

Helf –Range expansions (5-8)

1/ Full- Range -L< x < L
2/Half- Range $0 \le x \le L$

Half –range cosine series for (even f(x))

Half-range sine series for (odd f(x))
The cosine half –range expansion is:-

$$f(x) = a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx, n = 1,2,3,.....$$

The sine half –range expansion is:-

$$f(x) = a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx, n = 1,2,3,.....$$

Ex:- find the two half- range expansion of the function

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{2k}{L}x, if\ 0 \prec x \prec \frac{1}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x), if\ \frac{L}{2} \prec x \prec L \end{Bmatrix}$$

$$sol:-$$

$$evev.periodic.\exp ansion$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2k}{L}xdx + \frac{2k}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L}(\frac{2k}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{L}{2}}) + 2k\int_{\frac{L}{2}}^{L} dx - \frac{2k}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} xdx = \frac{k}{2}$$

$$a_0 = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx$$

$$= \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} x\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{2k}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\cos\frac{\pi}{L}xdx\right]$$

$$part1$$

$$\int_0^{\frac{L^2}{2}} x\cos n\frac{\pi}{L}x \to \left[\frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^{\frac{L}{2}} - \frac{L}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\frac{n\pi}{2}xdx$$

$$= \frac{L^2}{2n\pi}\sin n\frac{\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1)$$

$part2:-$

$$\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}dx$$

$$=\frac{-L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-\cos n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\left(\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{n^2\pi}(\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi)+\cos\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{4k}{L^2}\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}(2\cos n\frac{\pi}{2}-\cos n\pi-1)\right]$$

$$a_n=\frac{4k}{n^2k^2}\left[2\cos n\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1\right]$$

$$a_1=\frac{4k}{\pi^2}\left[2\cos\frac{\pi}{2}-\cos\pi-1\right]=0$$

$$a_2=\frac{4k}{(2)^2\pi^2}\left[2\cos\pi-\cos 2\pi-1\right]=\frac{4k}{2^2\pi^2}$$

$$a_3=\frac{4k}{3^2\pi^2}(2\cos\frac{3\pi}{2}-\cos 3\pi-1)=0$$

$$a_6=\frac{4k}{6^2\pi^2}(2\cos\frac{6\pi}{2}-\cos 6\pi-1)=\frac{4k}{6^2\pi^2}(-4)$$

$$a_n=0, n\neq 2,6,10,4,.....$$

$$f(x)=\frac{k}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$f(x)=\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2\frac{\pi}{L}+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L}+.........\right.$$

$odd, periodic.\exp ansion$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx, n=1,2,3,.....$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2k}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}xdx+\int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{2k}{L}(L-x)\sin\frac{n}{L}\pi dx$$

:

:

$$b_n=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$b_1=\frac{8k}{\pi^2}\sin(\frac{\pi}{2})=\frac{8k}{\pi^2}$$

$$b_2=\frac{8k}{2^2\pi^2}\sin\frac{2\pi}{2}=0$$

$$b_3=\frac{8k}{2^3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}=\frac{-8k}{9\pi^2}$$

$$b_4=\frac{8k}{4^2\pi^2}\sin 2\pi=0$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$f(x)=\frac{8k}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi}{L}x-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{2}x+..........\right]$$

Gamma function (6-8)

The Gamma function dented by is defined by

$$\Gamma n=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx.............1 \text{حفظ}$$

Which is convergent for n >0 and recursion or recurrence formula for the Gamma function is

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma n.............2 \text{حفظ}$$

$$\Gamma 1=1$$

Γn can be determined for all n > 0
when the values for 1≤ n ≤ 2 in particular if (n) is positive integer

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma n..=n! \text{حفظ}$$

for this reason Γn is sometimes called the factorial function

$$\Gamma\frac{1}{2}=\sqrt{\pi} \text{حفظ}$$

ملاحظة:- عندما تكون قيمة (n) اقل من الصفر فان قانون كاما يكتب بالشكل الأتي:-

$$\Gamma n=\Gamma\frac{(n+1)}{n} \text{حفظ}$$

$EX1:-$

$find\ \Gamma 2$

سوف يتم إيجاد قيمة الكاما للعدد (2) باستخدام عدده طرق

$sol:-$

$1/\Gamma 2=\Gamma(1+1)$

$\Gamma n=\Gamma(n+1)=n!$

$\Gamma 2=\Gamma(1+1)=1!=1$

$2/\Gamma n=n\Gamma n=n!$

$\Gamma 2=1\Gamma 1=1$

$$3/\Gamma 2=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx=\int_0^{\infty} x^{2-1}e^{-x}dx=\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$$

$u=x, dv=\int e^{-x}dx$

$du=dx, v=-e^{-x}$

$$= uv - \int_0^\infty v\,du$$ حفظ

$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}dx = 0 + \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = -0-(-1) = 1$$

$$\Gamma 2 = 1$$

$EX\,2:-$

$find Gamma.function$

1) $\Gamma 4$

2) $\Gamma 6$

$$\Gamma 4 = \Gamma(3+1) = 3! = 3\times 2\times 1 = 6$$

$$\Gamma 6 = \Gamma(5+1) = 5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$$

$$\Gamma 6 = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty x^5 e^{-x}dx$$

$$u = x^5, du = 5x^4dx$$

$$dv = e^{-x}, v = -e^{-x}$$

$$\Gamma 6 = \left[-x^5e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}5x^4dx$$

$$= 0 + 5\int_0^\infty x^4e^{-x}dx = 0 + 5\Gamma 5 = 5\Gamma(4+1)$$

$$= 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$$

$EX\,3:-$

$find Gamma.function$

$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$sol:-$

$$\Gamma n = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$$\Gamma\frac{-1}{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\pi}(-2)$$

$$\Gamma\frac{-1}{2} = -2\sqrt{\pi}$$

$EX\,4:-$

$find Gamma.function$

$$\Gamma\frac{16}{4}$$

$sol:-$

$$1/\Gamma 4 = 3\Gamma 3 = 3! = 6$$

$$2/\ \Gamma\left(\frac{16}{4}\right) = \Gamma 4 = \Gamma(3+1) = 3\Gamma 3 = 3\Gamma(2+1) = 3(2) = 6$$

ملاحظة:- كاما كل من القيم تبقى كما هي بكل الطرق

$$\Gamma\frac{1}{3}, \Gamma\frac{1}{4}, \Gamma\frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Gamma\frac{1}{10}$$

$EX\,5:-$

$\Pr ove.\ \Gamma(n+1) = n\Gamma n = n!$

$sol:-$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^{n+1-1} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

$$u = x^n,\ du = nx^{n-1}dx$$

$$dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x}$$

$$= uv - \int_0^\infty v\,du$$

$$= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x} n x^{n-1}\,dx$$

$$= 0 + n\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx$$

$$\Gamma(n+1) = 0 + n\Gamma n = n!$$

Beta function (7-8)

The Beta function ,denoted by B(m,n) defined by:-

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \rightarrow \text{حفظ}$$

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2m-1}\cos(\theta)^{2n-1}\,d\theta \rightarrow \text{حفظ}$$

هناك علاقة مشتركة مابين دالة كاما ودالة بيتا يمكن تعريفها بالشكل الأتي:-

$$B(m,n) = \frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$$

Ex1:-

$$find:\ B(m.n) = \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$$

$sol:-$

$$m = 5 \rightarrow m-1 = 5-1 = 4$$

$$n = 4 \rightarrow n-1 = 4-1 = 3$$

$$= \int_0^1 x^{m-1}(1-n)^{n-1}\,dx = \int_0^1 x^{5-1}(1-4)^{4-1}\,dx$$

$$B(m,n)=B(5,4)=\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}=\frac{\Gamma 5\,\Gamma 4}{\Gamma(5+4)}=\frac{4!.3!}{8!}$$

$$B(m=5,n=4)=\frac{(4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)}{(8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1)}=\frac{1}{8\times7\times5}=\frac{1}{280}$$

Ex2:-

$$find...B(m.n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(\theta)\cos^5(\theta)d(\theta)$$

$sol:-$

$$B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}(\theta)\cos^{2n-1}(\theta)d\theta$$

$$2m-1=4\rightarrow\frac{2m}{2}=\frac{5}{2}\rightarrow m=\frac{5}{2}$$

$$2n-1=5\rightarrow\frac{2n}{2}=\frac{6}{2}\rightarrow n=3$$

$$B(m,n)=\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}=\frac{\Gamma\frac{5}{2}\,\Gamma 3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+3\right)}*\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right).2!}{\Gamma\frac{11}{2}}*\frac{1}{2}=\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{9}{2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\frac{1}{2}}{\frac{9}{2}\Gamma\left(1+\frac{7}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\frac{9}{2}\left[\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}\right]}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{945}{32}}=\frac{3}{4}.\frac{32}{945}=\frac{8}{315}$$

Ex3:-

$$find...B(m.n)=\int_0^{\pi}\cos^4(\theta)d\theta$$

$sol:-$

$$B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}(\theta)\cos^{2n-1}(\theta)d\theta$$

$$2m-1=0\rightarrow\frac{2m}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow m=\frac{1}{2}$$

$$2n-1=4\rightarrow\frac{2n}{2}=\frac{5}{2}\rightarrow n=\frac{5}{2}$$

$$B(m=\frac{1}{2},n=\frac{5}{2})=\frac{2}{2}.\frac{\Gamma m.\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$$

$$B(\frac{1}{2},\frac{5}{2})=\frac{2}{2}\frac{\Gamma\frac{1}{2}.\Gamma\frac{5}{2}}{\Gamma\frac{6}{3}}=\frac{\sqrt{\pi}\,\frac{3}{2}\Gamma\frac{3}{2}}{\Gamma 3}=\frac{\sqrt{\pi}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2!}=\frac{\frac{3}{4}\pi}{2}$$

$$B(m,n)=\frac{3}{4}\pi.\frac{1}{2}$$

$$B(m\frac{1}{2},n=5)=\frac{3}{5}\pi$$