الفصل الثالث

المشتقة

The Deriative

(1-3) الفروقات

إذا كانت لدينا الدالة f(x)=y فان التغير في المتغير المستقل (x) ويرمز له بالرمز (Δx) (وتقرأ دلتا x) فيمثل الفرق بين قيمتين متتاليتين (x) أي إن

$\Delta X = x_2 - x_1$

ولإيجاد Δy نتبع ما يأتي (اشتقاق قانون Δy)

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\Delta y = f(x) + f(\Delta x) - f(x)$$
$$\Delta y = f(\Delta x)$$
$$\Delta y = f(x_2 - x_1)$$
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

$EX1:-$

$Ifthe : y = f(x) = x^2 - 2x + 3$

$find :$

$\Delta y = x_1 = 1, x_2 = 2$

$\Delta y = x_1 = 3, x_2 = 2$

$sol:-$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow 2 - 1 = 1$$
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(2) - f(1)$$
$$\Delta y = \left[2^2 - 2(2) + 3\right] - \left[1^2 - 2(1) + 3\right] = 1$$
$$\Delta y = 1, x_1 = 1, x_2$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 3 = -1$$
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(2) - f(3)$$
$$\Delta y = \left[2^2 - 2(2) + 3\right] - \left[3^2 - 2(3) + 3\right] = -3$$
$$\Delta y = -3, x_1 = 3, x_2 = 2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{-1} = 3$$

حيث إن ($\Delta y/\Delta x$) تسمى معدل التغير أو متوسط التغير

Derivative by definition المشتقة بالتعريف (2-3)

بشكل عام تعرف المشتقة بأنها نهاية معدل التغير عندما تقترب (Δx) من الصفر ويرمز للمشتقة بعدده رموز

$$\bar{y}=\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f(x)}{\partial x}=D_x=D_y$$

ويمكن إيجاد المشتقة من الدرجة الأولى باستخدام أسلوب التعريف وكالاتي:-

$$\bar{y}=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

EX1:-

Find the dy/dx of the y= x^2+3x by use the definition

$$sol:-$$

$$y^{-}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\left[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)\right]-\left[x^2+3x\right]}{\Delta x}=$$

$$=\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+3x+3\Delta x-x^2-3x}{\Delta x}$$

$$=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta x\left[2x+\Delta x+3\right]}{\Delta x}=$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+3)=2x+0+3=2x+3$$

EX2:-

Find the dy/dx of the y= $(x)^{1/2}$ by use the definition

$$sol:-$$

$$y^{-}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}*\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x+\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x})+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivative by rules المشتقة بالقوانين (3-3)

يمكن إيجاد المشتقة للدوال باستخدام أسلوب القوانين وكالاتي:-

- مشتقة الكمية الثابتة دائما تساوي صفر

$y=10 \quad y^{-}=0$

مشتقة الكية الثابتة سواء كانت موجبة أو سالبة أو صفر فهي دائما تساوي صفر

- مشتقة (x) مرفوعة للقوة (n) تساوي مضروب (x) للقوة (n-1) بشرط إن (n) لا تساوي صفر فإذا كانت $y=x^n$ فان مشتقتها هي:-

$y^{-}=dy/dx=nx^{n-1}$

EX:-

Find the dy/dx of the $y=(x)^6$, $y=x^{-2}+3$

$sol:-$

$dy/dx=6x^{6-1}=6x^5$

$dy/dx=-2x^{-2-1}+0=-2x^{-3}$

- مشتقة الدالة f(x) المعطاة بالشكل $y=cx^n$ حيث إن (c) عدد ثابت تساوي

$y^{-}=dy/dx=c.n.x^{n-1}$

EX1:-

Find the dy/dx of the $y=7(x^4)$

$sol:-$

$y^{-}=7(4x^{4-1})=28x^3$

EX2:-

Find the dy/dx of the $y=9(x^2)$

$sol:-$

$y^{-}=9(2x^{2-1})=18x$

- مشتقة مجموع أو فرق دالتيتن يساوي مجموع مشتقتين الداليتين أو الفرق بينهما فإذا كانت $y_1=f(x)$, g(x) $y_2=$ تمثل دالتين للمتغير x

$y=y_1 \pm y_2$

$dy/dx=dy_1/dx \pm dy_2/dx$

EX1:-

Find the dy/dx of the $y=x^3+x^4$

$sol:-$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}=$$

$3x^2+4x^3$

EX2:-

Find the dy/dx of the $y=x^2+5x+7$

$sol:-$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}+\frac{dy_3}{dx}=$$
$$2x+5+0$$

ملاحظة:- $x^0=1,\quad x^1=x$

- مشتقة ضرب دالتين:- الدالة الأولى *مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية * المشتقة الأولى.

فإذا كانت لدينا $y_1=f(x),\quad y_2=g(x)$

القانون المستخدمة لذلك

$$y^- = dy/dx = y_1.\frac{dy_2}{dx}+y_2.\frac{dy_1}{dx}$$

EX:-

Find the dy/dx of the 1- $y=(x^2)+(3x)$

2- $y=(3x^2+1)(x^4+3x)$

$sol:-$

$$1/\ y^- = dy/dx = y_1.\frac{dy_2}{dx}+y_2.\frac{dy_1}{dx}=$$
$$dy/dx = x^2*3+3x*2x=3x^2+6x^2=9x^2$$

$$2/\ y^- = dy/dx = y_1.\frac{dy_2}{dx}+y_2.\frac{dy_1}{dx}$$
$$y^- = (3x^2+1)\left(4x^3+3\right)+\left(x^4+3x\right)\left(6x\right)$$
$$=12x^5+9x^2+4x^3+3+6x^5+18x^2$$
$$=18x^5+4x^3+27x^2+3$$

- مشتقة حاصل قسمة داليتين

$$dy/dx=\frac{y_2.\frac{dy_1}{dx}-y_1.\frac{dy_2}{dx}}{(y_2)^2}$$

EX1:-

Find the dy/dx of the $y=(x^2)/x^7$

$$y^- = dy/dx=\frac{y_2.\frac{dy_1}{dx}-y_1.\frac{dy_2}{dx}}{(y_2)^2}$$
$$=(x^7)(2x)-(x^2)(7x^6)/(x^7)^2=\frac{2x^8-7x^8}{(x^7)^2}=\frac{-5x^8}{x^{14}}$$
$$=-5x^8.x^{-14}=-5x^{-6}=\frac{-5}{x^6}$$

EX2:-

Find the dy/dx of the $y=x^2+3/x^3-1$

$$y^{-} = dy/dx = \frac{y_2 . \frac{dy_1}{dx} - y_1 . \frac{dy_2}{dx}}{(y_2)^2}$$
$$= \frac{(x^3-1)(2x) - (x^2+3)(3x^2)}{\left(x^3-1\right)^2}$$

- مشتقة الدالة الجذرية هو إذا كان لديك دالة تحت جذر فان مشتقة هذه الدالة تكون بحالتين ولاسيما عندما يكون الجذر تربيعي:-

$$y^{-} = dy/dx = \frac{g^{-}(x)}{2 * \sqrt{g(x)}}$$

حيث يرفع الجذر وتتحول الدالة الجذرية إلى دالة آسية وتحل المشتقة حسب ذلك

$$\sqrt{g(x)} = (g(x))^{1/2}$$

$$find, y^{-} of the :- y\sqrt{x^3-2}$$
$$sol :-$$
$$y^{-} = dy/dx = \frac{g^{-}(x)}{2 * \sqrt{g(x)}}$$
$$= \frac{3x^2 - 0}{2 * \sqrt{x^3-2}} = \frac{3x^2}{2 * \sqrt{x^3-2}}$$

أما إذا كان الجذر غير ألتربيعي فنستخدم الحالة الثانية

- لإيجاد مشتقة أي دالة مرفوعة للأس $(f(x))^n$

$$dy/dx(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \frac{df(x)}{dx}$$

$$find\ (y^{-}) of the (5x^2-1)^5$$
$$sol :-$$
$$dy/dx = 5(5x^2-1)^{5-1} * 10x = 50x(5x^2-1)^4$$

(4-3) المشتقات من الرتب العليا **Derivative by higher order**

كما تم دراسته سابقا إن كل المشتقات المذكورة كانت مشتقة من الدرجة الأولى وألان سوف ندرس مشتقة من الدرجة الثانية والتي هي مشتقة الأولى للدالة والمشتقة الثالثة والتي هي المشتقة الثانية وهكذا إلى أخر درجة من درجات المشتقة والتي يرمز لها بالشكل الأتي:-

$$y^{-} = \frac{dy}{dx}$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$y''' = \frac{d^3y}{dx}$$

$EX1:-$

$If y=2x^4+3x^2+x find : y', y'', y''', y''''$

$sol:-$

$$\frac{dy}{dx}=y'=8x^3+6x+1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2}=y''=24x^2+6$$

$$\frac{dy^3}{dx^3}=y'''=48x$$

$$\frac{dy^4}{dx^4}=y''''=48$$

$EX2:-$

$If y=5x^2+1 find : y', y'', y'''$

$sol:-$

$$\frac{dy}{dx}=y'=10x+0$$

$$\frac{dy^2}{dx^2}=y''=10$$

$$\frac{dy^3}{dx^3}=y'''=0$$

(5-3) مشتقة الدوال المركبة (قاعدة السلسلة)

فإذا كانت y=f(u) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى (u) حيث إن u =g(x) هي دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى (x) فان قانون هذه الطريقة هو كالأتي:-

$$dy/dx=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

دائما بعد الانتهاء من اشتقاق الدوال المركبة يجب التعويض عن كل (u) بدلالة المتغير (x) لان الاشتقاق النهائي بدلالة (dy/dx)

$EX1:-$

$If y=u^{10} and. u=2x^2+1. find \frac{dy}{dx}$

$sol:-$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$dy/dx=10u^9.4x$$

$$dy/dx=10(2x^2+1)^9.4x$$

$EX2:-$

$If y=u^3+3u^2 and. u=2x^2 find \frac{dy}{dx}$

$sol:-$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$dy/dx=(3u^2+6u).4x$$

$dy/dx = 3(2x^2)^2 + 6(2x^2).4x$
$= (12x^4 + 12x^2).4x = 48x^5 + 48x^3$

$EX3:-$

$If y = u^4 + 4u^3 + 4u^2 and. u = x^2 + 2x. find \dfrac{dy}{dx}$

$sol:-$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dx}$

$dy/dx = (4u^3 + 12u^2 + 8u)(2x+2)$

$dy/dx = 4(x^2+2x)^3 + 12(x^2+2x)^2 + 8(x^2+2x).2x+2$

(6-3) المشتقات الضمنية Implicit differentiation

في بعض الأحيان هنالك علاقات ومعادلات متضمنة متغيرين أو ا كثر ففي هذه المعادلات يصعب أو يتعذر التعبير عن احد المتغيرات مثل (y) بدلالة (x) بصورة مباشرة وحتى لو أمكن فصل احد المتغيرات بدلالة الأخر فان ذلك يودي إلى وجود أكثر من دالة واحدة ولحل هذه المسالة سوف يتم استخدام أسلوب المشتقة الضمنية والذي قانونها هو :-

$$dy/dx = \frac{-F(x)}{F(y)}$$

أما أهم الحالات التي تطبق بها المشتقة الضمنية هي كالأتي:-

$1-x.y$

$2-\dfrac{x}{y}$

$3-y^{n>1}$

$EX1:-$

$If y^3 = xy - 3x^2 ... find \dfrac{dy}{dx}$

$sol:-$

$$dy/dx = \frac{-F(x)}{F(y)}$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} = (x.\frac{dy}{dx} + y.\frac{dx}{dx}) - 6x.\frac{dx}{dx}$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} = x.\frac{dy}{dx} + y - 6x$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 6x$$

$$(3y^2 - x)\frac{dy}{dx} = y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-6x}{3y^2 - x}$$

$EX\,2:-$

$$If y^4 - xy^2 + x^2 . -7 = 0 \; find \; \frac{dy}{dx}$$

$sol:-$

$$dy/dx = \frac{-F(x)}{F(y)}$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - \left[x.2y.\frac{dy}{dx} + y^2.\frac{dx}{dx}\right] + 2x.\frac{dx}{dx} - 0 = 0$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 2xy.\frac{dy}{dx} - y^2 + 2x = 0$$

$$(4y^3.\frac{dy}{dx} - 2xy.\frac{dy}{dx}) = y^2 - 2x$$

$$(4y^3 - 2xy)\frac{dy}{dx} = y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2x}{4y^3 - 2xy}$$

(7-3) المشتقة لأى دالة عند نقطة معينة

هنالك طريقتين لإيجاد المشتقة :-

أ- التعويض بشكل مباشر بالمشتقة

$EX\,1:-$

$$f(x) = x^3 + 5 ... find\,(f'(x=1))$$

$sol:-$

$$f'(x) = 3x^2 + 0$$

$$f'(1) = 3(1)^2 = 3$$

ب- التعويض باستخدام القانون

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$EX\,2:-$

$$f(x) = x^3 + 5 ... find\,(f'(x=1))$$

$sol:-$

$$f'(1) = \lim_{x\to a=1}\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^3+5) - ((1)^3+5)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+5-6}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = f'(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 = (1)^2 + 1 + 1 = 3$$

$EX\,3:-$

$$f(x) = \sqrt{x}\,showthat(f'(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$sol:-$

$$f'(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$x \to t, a \to x$

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{t - x}$$

ثم نقوم بالضرب بالمرافق نفس المقدار لكن عكس الإشارة

$$= \lim_{t \to x} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{t - x} \cdot \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to x} \frac{t - x}{(t - x)(\sqrt{t} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

** ملاحظة**

كما تم شرح سابقا إن هنالك طرق متعددة لإيجاد المشتقة منها باستخدام أسلوب التعريف أو باستخدام القوانين وألان سوف نتطرق إلى إيجاد المشتقة بأسلوب أخر ولاسيما إذا كانت الدالة من الدوال المطلقة وذلك بالاعتماد على أسلوب المشتقة من اليمين تساوي المشتقة من اليسار

EX1:-

Let f(x) = | x-3 | use definition to find D_x at x=3

$Sol:-$

$$f(x) = \begin{cases} x-3, x \geq 3 \\ -(x-3), x \prec 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-3, x \geq 3 \\ -x+3, x \prec 3 \end{cases}$$

$x \to 3^+, f(x) = x - 3$

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3) - (3-3)}{x - 3}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3) - 0}{(x-3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{1-0}{1} = 1$$

$x \to 3^-, f(x) = -x + 3$

$$f'_{-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(-x+3) - (-3+3)}{(x-3)}$$

$$= f'_{-3} = \lim_{x \to -3} \frac{-x + 3 - 0}{x - 3} = \frac{-(x-3)}{(x-3)} = -1$$

$$f'_{+3} \neq f'_{-3}$$

The f^{-}(3) does not exists

EX2:-

Let f(x) = | 2-x | use definition to find D_x at x=2

$Sol:-$

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, x \geq 2 \\ -(2-x), x \prec 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2-x, x \geq 2 \\ -2+x, x \prec 2 \end{cases}$$

$x \to 2^+, f(x) = 2 - x$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(2-x) - (2-2)}{(x-2)}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)}{(x-2} = -1$$

$x \to 2^-, f(x) = -2 + x$

$$f'_{-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(-2+x) - (-2+2)}{x - 2}$$

$$f'_{-2} = \lim_{x \to -2} \frac{-2 + x - 0}{x - 2} = \lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$f'_{+2} \neq f'_{-2} \to -1 \neq +1$$

مبرهنة(8-3)

كل دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة تكون مستمرة عند نفس النقطة والعكس صحيح

Ex1:- let g(x)=(x^2-6x+3)(2x-1) find g^-(x=1),cont at x=1

$$\begin{aligned}
&Sol:-\\
&g(x)=2x^3-x^2-12x^2+6x+6x-3\\
&g(x)=2x^3-13x^2+12x-3\\
&g'(x)=6x^2-26x+12=\\
&g'(x=1)=6(1)^2-26(1)+12=-8
\end{aligned}$$

إذن الدالة قابلة للاشتقاق وبما إن الدالة قابلة للاشتقاق فمن الضروري أن تكون مستمرة عند نفس النقطة حسب المبرهنة السابقة

$$\begin{aligned}
&1-f(x)=2x^3-13x^2+12x-3\\
&f(a=1)=2(1)^3-13(1)^2+12(1)-3=-2\\
&2-\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}2x^3-13x^2+12x-3\\
&=2(1)^3-13(1)^2+12(1)-3=-2\\
&\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=-2\\
&the(f(x))cont.at;x=2
\end{aligned}$$

Ex2:- let f(x)= x-│x│ find f^-(x=0),cont at x=0

$$Sol:-$$

$$f(x)=\begin{cases}x-x,x\geq 0\\ x-(-x),x\prec 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0,x\geq 0\\ 2x,x\prec 0\end{cases}$$

سوف نثبت هل الدالة مستمرة عندما تكون x مساوية للصفر

$$\begin{aligned}
&1f(a=0)=0\\
&2\lim_{x\to 0}f(x)=2(0)=0\\
&3f(a=0)=\lim_{x\to a=0}f(x)\\
&the(f(x))cont.at.x=0
\end{aligned}$$

بما إن الدالة مستمرة هذا لا يعني إن الدالة أيضا تكون قابلة للاشتقاق فقط تكون الدالة القابلة للاشتقاق وقد تكون غير قابلة للاشتقاق حسب النظرية السابقة:-

$$\begin{aligned}
&f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)\\
&x\to 0^+,f(x)=0\\
&f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x-0}=0\\
&x\to 0^-,f(x)=2x\\
&f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{2x-2(0)}{x-0}=\frac{2x}{x}=2\\
&f'_+(0)\neq f'_-(0)the(f'(x=0))dose.not.exists
\end{aligned}$$

L.Hopitais Rule (هوبيتال)قاعدة لوبيتال(9-3)

$$1 If .\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0} \to H.R$$
$$a - f, g : diffon(a,b)$$
$$b - g^{-} \neq 0 \forall (a,b)$$
$$c - \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

وبعد تطبيق القواعد أعلاه نستخدم طريقة لوبيتال وكالاتي:-

$$.\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{*}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$2 If .\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\infty}{\infty} \to H.R$$
$$a - f, g : diffon(a,b)$$
$$b - g^{-} \neq 0 \forall (a,b)$$
$$c - \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

وبعد تطبيق القواعد أعلاه نستخدم طريقة لوبيتال وكالاتي:-

$$.\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{*}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظة إن وضع الإشارة (*) فوق علامة المساواة تعني تم تطبيق قاعدة لوبيتال

$$EX1 : -Find \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}}$$
$$sol : -$$
$$\frac{\tan(0)}{\sqrt{0}} = \frac{0}{0} \to H.R$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sec^2(x)}{\frac{1}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\cos^2(x)\sqrt{x}} = \frac{2}{\cos^2(0)\sqrt{0}} = \frac{0}{0}$$
$$\overset{*}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{\cos^2(x).\frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}.2\cos(x)} = \frac{0}{\cos^2(0)\frac{\sqrt{0}}{2} + \sqrt{0}.2\cos(0)} = \frac{0}{0}$$

ممكن أن تفشل قاعدة لوبيتال في إيجاد الغاية رغم وجودها

$$EX\,2:-Find\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

$sol:-$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1-\cos(0)}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\to H.R$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{0-(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}=\frac{\sin(0)}{2(0)}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2}=\frac{\cos(0)}{2}=\frac{1}{2}$$

ملاحظة أحيانا لا نستطيع تطبيق قاعدة لوبيتال في حالة

$a/\infty-\infty$

$b/0*\infty$

$$EX\,3:-Find\ \lim_{x\to 0}x.\sin(\frac{1}{x})by.u\sin g\to H.R$$

$Sol:-$

$$\lim_{x\to 0}x.\sin\frac{1}{x}=0.\sin(\frac{1}{0})=0.\infty$$

$$\lim_{x\to 0}(x(\sin\frac{1}{x})).\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)(\cos\frac{1}{x})(\frac{-1}{x^2})+(\sin(\frac{1}{x})(2x)}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}(2x)(\sin(\frac{1}{x})+(\cos(\frac{1}{x}))(\frac{-x^2}{x^2})$$

$$=2(0)\sin(\frac{1}{0})-\cos(\frac{1}{0})=0.\infty-\infty=\infty$$

حسب المثال أعلاه واجهنا صعوبة في تطبيق لوبيتال لذلك عملنا على الضرب والقسمة بالمقدار x/x

(10-3) تطبيقات على المشتقة Applications of Derivatives

(a10-3) التطبيق الأول الميل (slope)

ولإيجاد الميل لدينا ثلاثة طرق وهي:-

- إذا علمت نقطتين على خط مستقيم أو المنحي وهما $p(x_1,y_1)$ $Q(x_2,y_2)$ عندئذ فان الميل هو:-

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

EX1:- find the slope if P(2,3),Q(3,5) at the straight line .

Sol:-

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-3}{3-2}=\frac{2}{1}=2$$

$m=2$

- إذا علمت زاوية الميل فان الميل هو ظل تلك الزاوية

$m=\tan(\phi)$

EX2:- if(θ) =45 find the slope

Sol:-

$$m = \tan(\theta) \Rightarrow \tan 45 = 1$$
$$m = 1$$

- إذا علمت دالة المنحني فان الميل هو مشتقة تلك الدالة.

EX3:- find the slope that have the curve f(x)=sin(x^2)

Sol:-

$$m = f'(x) = \cos x^2 .2x = 2x\cos(x^2)$$

<u>معادلة المستقيم المماس والعمودي على المنحني</u>

لإيجاد معادلة المستقيم المماس للمنحني توجد طريقتان وهما

- الطريقة الأولى:-

أ- إيجاد المشتقة f`(x).

ب- ايجاد $m_T = f`(a)$.

ت- حساب معادلة المستقيم أللملامسة للمنحني

$$m_T = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$
$$or$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- الطريقة الثانية :-

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

حيث (a) تمثل الإحداث السيني لنقطة التماس

EX1:- find the equation of the tangent line to the curve of f(x) = x+ sin(x) at p(0,0).

$$sol:-$$
$$f'(x) = 1 + \cos(x)$$
$$m_T = f'(0) = 1 + \cos(0) = 2$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) = y - 0 = 2(x - 0)$$
$$y = 2x$$

إذن لقد تم الحصول على المعادلة الملامسة للمنحني وهي y=2x

EX2:- find the equation of the tangent line to the parabola of y = x^2 at p(-1,1).

$$sol:-$$
$$f'(x) = 2x$$
$$m = f'(x) = f'(-1) = 2(-1) = -2$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2(x+1) \Rightarrow y - 1 = -2x - 2$$
$$y = -2x - 2 + 1 \rightarrow y = -2x - 1$$

حيث يمكن حلها بطريقة أخرى

$$sol:-$$
$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$$
$$f(-1) = x^2 = (-1)^2 = 1$$
$$f'(-1) = 2x = 2(-1) = -2$$
$$y = -2(x+1) + 1 \rightarrow y = -2x - 2 + 1$$
$$y = -2x - 1$$

أما لإيجاد معادلة المستقيم العمودي على المماس نتبع نفس الخطوات السابقة في حالة إيجاد المستقيم المماس للمنحني لكن ماعدا في الخطوة الثانية نتبع ما يأتي:-

$$m_N = \frac{-1}{m_N} = \frac{-1}{f'(a)}$$

EX3:- find the equation of the tangent line to the curve and normal line to the curve of $y^3 = 5x^2 + y$ at p(2,1).

Sol:- The tangent line to the curve

$$f'(x) = 3y^2.\frac{dy}{dx} = 10x.\frac{dx}{dx} + 1.\frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2 - 1).\frac{dy}{dx} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{3y^2 - 1}$$

$$m_T = f'(a) = \frac{10(2)}{3(1)^2 - 1} = 10$$

$$m_T = 10$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 10(x - 2)$$

$$y = 10x - 20 + 1 \rightarrow y = 10x - 19$$

The normal line to the curve

$$f'(x) = 3y^2.\frac{dy}{dx} = 10x.\frac{dx}{dx} + 1.\frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2 - 1).\frac{dy}{dx} = 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{3y^2 - 1}$$

$$m_N = \frac{-1}{m_T} = \frac{-1}{10}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{10}(x - 2) \rightarrow y - 1 = \frac{-x}{10} + \frac{2}{10}$$

$$y = \frac{-x}{10} + \frac{2}{10} + 1 \rightarrow y = \frac{-x + 2 + 10}{10} = \frac{-x + 12}{10}$$

$$y = \frac{12 - x}{10}$$

(b10-3) التطبيق الثاني الدوال التزايدية والدوال التناقصية

Increasing and Decreasing functions

Def1:- we say that f(x) is increasing at x=a if $x_1 < x_2$,$f(x_1) < f(x_2)$

Def2:- we say that f(x) is decreasing at x=a if $x_1 < x_2$,$f(x_1) > f(x_2)$

Def3:- we say that f(x) is monotonic f(x) either increasing or decreasing

Def4:- if f(x) is decreasing on (a, b) then f(x) has falling curve

Def5:- if f(x) is increasing on (a, b) then f(x) has vising curve

Def5:- if x=a between vising f(x) falling that is called (Transition value)

EX1:- It the functions increasing or decreasing $y=x^2+5x$ $y=1/x$

Sol:-

1- Let x=-2,-1,0,1,2

x	$F(x)=x^2+5x$
0	0
1	6
2	-14
-1	-4
-2	-6

$0< 1$, $f(x_1)=0 < f(x_2)=6$

وحسب الاختبار أعلاه فان الدالة $y=x^2+5x$ متزايدة

2- Let x=0,1,2,3,4

x	F(x)=1/x
0	1/0
1	1
2	1/2
3	1/3
4	1/4

$1<2$, $f(x_1)=1 > f(x_2)=1/2$

وحسب الاختبار أعلاه فان الدالة $y= 1/x$ متناقصة

** اختبار التزايد والتناقص حسب إشارة المشتقة**

If f(x) is cont on [a ,b] and diff on (a ,b)

1 we found $f^{-}(x)$

2 $f^{-}(x)=0$

3 we study the sign of $f^{-}(x)$ on it domain

If $f^{-}(x) > 0$, every x€ (a ,b) =f(x) increasing on [a ,b]

If $f^{-}(x) < 0$, every x€ (a ,b) =f(x) decreasing on [a ,b]

If $f^{-}(x) = 0$, every x€ (a ,b) =f(x) monotonic on [a ,b]

EX1:- it the function increasing or decreasing

$$f(x)=\begin{cases} x, x \succ 0 \\ -x, x \prec 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&sol:- \\
&f(x)=x \\
&f'(x)=1 \\
&f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=1 \Rightarrow f'(x)=1 \succ o \therefore f(x)...increa\sin g
\end{aligned}$$

$sol:-$

$f(x)=-x$

$f'(x)=-1$

$f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=-1 \Rightarrow f'(x)=-1 \prec o \therefore f(x)...decrea\sin g$

EX2:- $f(x)=2x^3-3x^2$ find where the function dec or inc on the interval [-1 ,2]

$sol:-$

$f'(x)=6x^2-6x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-6x=0 \rightarrow 6x(x-1)=0 \rightarrow$

$\frac{6x}{6}=\frac{0}{6} \Rightarrow x=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$f'(x)=0.and.1$

$f'(x)=1 \succ 0$

$[-1,0],[1,2]$

$f'(x)=0 \rightarrow f(x)constunt$

<u>Maximum and Minimum Extreme التطبيق الثالث الدوال\العظمى والدوال الصغرى (c10-3)</u>

Absolute Maximum value and Absolute Minimum value

<u>1</u> Absolute Maximum value :- we say f(x) has Absolute Maximum value at x=a iff f(a) > f(x) every x € D_f

<u>2</u> Absolute Minimum value :- we say f(x) has Absolute Minimum value at x=a iff f(a) < f(x) every x € D_f

The general method for determining the absolute extremes values of a cont function on a closed interval [a ,b]

- نجد مشتقة الدالة f(x).
- نساوي المشتقة بالصفر.
- نأخذ القيم التي تم الحصول عليها من الخطوة الثانية ونهايات الفترات ونعوضها بالدالة الأصلية.
- نقارن بين القيم فإذا كانت لدينا اكبر قيمة فإنها تمثل Absolute Maximum value أما اصغر قيمة فإنها تمثل Absolute Minimum value

EX:- Find the absolute extreme values of $f(x)=x-x^3$ on [0,1]

$sol:-$

$f'(x)=1-3x^2$

$f'(x)=0 \rightarrow 1-3x^2=0 \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

أهملنا القيمة السالبة لعدم انتمائها للفترة [0,1]

$x=+\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$f(x)=x-x^3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}-(\frac{1}{\sqrt{3}})^3$

$f(0)=x-x^3=0-(0)^3=0$

$f(1)=x-x^3=1-(1)^3=0$

$x = \frac{1}{3}\sqrt{3} the.absloute.\min = 0 at[0,1]$

Relative (local) Max and Min Extreme by using first derivative

Def1:- we say that f(x) has Relative (local) Max value at x=a iff f(a) ≥ f(x) every x € D_f

Def2:- we say that f(x) has Relative (local) Min value at x=a iff f(a) ≤ f(x) every x € D_f

Note:- we have two ways to find the max and min relative value

Way1:- Inference by first derivative

- نجد المشتقة الأولى.
- نساوي المشتقة الأولى بالصفر للحصول على النقاط الحرجة والتي تسمى (c).
- نفرض إن لدينا قيمة h= 0.1.
- نعوض قيمة c+ h , c-h في المشتقة الأولى ثم نختبر f^- (c-h), f^- (c+h).
- نختبر ما يأتي:-

$$a - f'(c-h) \prec 0, f'(c+h) \succ 0$$
$$c :- \min .value$$

$$b - f'(c-h) \succ 0, f'(c+h) \prec 0$$
$$c :- \max .value$$

$$c - f'(c-h), f'(c+h)$$

Has the some sign then fail fest

EX1:- Find the relative max and min points by using the in ference by first derivative of f(x) = x^2-4

$$sol :-$$
$$1/\ f'(x) = 2x - 0 = 2x$$
$$2/\ f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$
$$c = 0, h = 0.1$$
$$c - h = 0 - 0.1 = -0.1$$
$$c + h = 0. + 0.1 = 0.1$$
$$f'(c-h) = 2x = 2(-0.1) = -0.2 \prec 0$$
$$f'(c+h) = 2(0.1) = 0.2 \succ 0$$
$$c = 0$$

إن قيمة c = 0 هي قيمة صغرى أما لإيجاد نعوض (c) بالمعادلة الأصلية

$$f(x) = x^2 - 4$$
$$f(c) = c^2 - 4 \rightarrow (0)^2 - 4 = -4$$
$$(0,-4) \min imum.po\text{int}$$

EX2:- Find the relative max and min points by using the in ference by first derivative of f(x) = x+1/x

$sol:-$

$1/\ f'(x)=1+\frac{x.0-1.1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}$

$2/\ f'(x)=0\rightarrow 1-\frac{1}{x^2}=0\rightarrow 1=\frac{1}{x^2}=$

$x^2=1\rightarrow x=\pm 1$

$3/\ c_1=-1, c_2=1, h=0.1$

$4/\ c_1-h=-1-0.1=-1.1$

$c_1+h=-1+0.1=-0.9$

$5/\ f'(c_1-h)=1-\frac{1}{x^2}=1-\frac{1}{(-1.1)^2}=1-\frac{1}{1.21}=1-0.8=0.2\succ 0$

$f'(c_1+h)=1-\frac{1}{(-0.9)^2}=1-\frac{1}{0.81}=1-1.2=-0.2\prec 0$

$c=-1, \max .value$

$f(c_1)=-1+\frac{1}{-1}=-1-1=-2$

$(-1,-2)\max .point$

واجب:- احسب هل تمتلك دالة عظمى أم صغرى واستخرج النقطة وذلك عندما تكون قيمة $c_1 = 1$

Relative (local) Max and Min Extreme by using second derivative

وباستخدام المشتقة الثانية لا اختبار هل الدالة تمتلك دالة نسبية عظمى آم صغرى نتبع الخطوات الآتية:-

- نجد المشتقة الأولى.
- نساوي المشتقة الأولى بالصفر للحصول على النقطة الحرجة.
- نجد المشتقة الثانية ثم نعوض النقطة الحرجة بالمشتقة الثانية ثم نقو باختبار

$a/\ f''(c)\succ 0, \min .value$

$b/\ f''(c)\prec 0, \max .value$

$c/\ f''(c)=0\rightarrow$

في حالة حصولنا على النتيجة في الخطوة الأخيرة نقوم بالذهاب إلى استخدام الطريقة الأولى ونعوض بدلالة h=0.1

EX1:- Find the relative max and min points by using the in ference by second derivative of f(x) = x^2-2x

$sol:-$

$f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0\rightarrow 2x-2=0\rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{2}{2}\rightarrow x=1$

$c=x=1$

$f''(x)=2$

$f''(2)=2\succ 0$

$\therefore c, \min .valule$

بما إن المشتقة الثانية لا تمتلك (x) في دالتها لذلك لم نتمكن من تعويض قيمة (c) الحرجة في المشتقة الثانية لذلك نكتفي باختبار المشتقة الثانية
ولكي نستخرج النقطة نعوض قيمة (c) بالدالة الأصلية

f© =f(1)=$(1)^2$-2(1)=1-2=-1

فان النقطة الصغرى هي (1,-1)

EX2:- Find the relative max or min points by using the in ference by second derivative of f(x) = x^3-x^2

$$sol:-$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$
$$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 2x = 0 \to x(3x-2) = 0$$
$$and: x = c_1 = 0$$
$$or: 3x - 2 = 0 \to \frac{3x}{3} = \frac{2}{3} \to x = c_2 = \frac{2}{3}$$
$$\therefore c_1 = 0, c_2 = \frac{2}{3}$$
$$f''(x) = 6x - 2$$
$$f''(c_1) = 6(0) - 2 = -2 \prec 0, \max .vaule$$
$$f(c_1 = 0) = (0)^3 - (0)^2 = 0 \to (0,0) \max .p\text{int}$$
$$f''(c_2) = f''(\frac{2}{3}) = 6(\frac{2}{3}) - 2 = 2 \succ 0$$
$$f''(c_2) = 2 \succ 0 \therefore \min .vaule$$
$$f(c_2 = \frac{2}{3}) = x^3 - x^2$$
$$f(c_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{-4}{27}$$
$$\therefore (\frac{2}{3}, \frac{-4}{27}). \min .po\text{int}$$

<u>Concavity and Inflection point التطبيق الرابع التقعر ونقطة الانقلاب (d10-3)</u>

Def1:- let f(x) be a continuous on [a ,b] and differentiable on (a , b) and let (c) € (a ,b) than f(x) con car up ward iff f(x) f(x) has min point

Def2:- let f(x) be a continuous on [a ,b] and differentiable on (a , b) and let (c) € (a ,b) than f(x) con care down ward iff f(x) f(x) has min point

Theorem
let f(x) be a continuous on [a ,b] and differentiable on (a , b) and let (c) is a critical point then :-
1 then f(x)curve is con care up word
$$f''(c) \succ 0$$

2 then f(x)curve is con care down word

$$f''(c) \prec 0$$

EX1: Find the concority of $x^2/2-2x+1$
Sol:-

$$f'(x) = \frac{1}{2}.2x - 2 = x - 2$$
$$f'(0) = \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = c = 2$$
$$f''(x) = 1 \succ 0 \rightarrow concare.up.word$$

EX2: Find the concority of $2x^3-3x$
Sol:-

$$f'(x) = 6x^2 - 3$$
$$f'(0) = \rightarrow 6x^2 - 3 = 0 \rightarrow \frac{6x^2}{6} = \frac{3}{6}$$
$$x = c = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = 12x$$
$$f''(c = \frac{-1}{\sqrt{2}}) = -12(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}) = \frac{-12}{\sqrt{2}} \prec 0 ...Max.point$$
$$f''(c = +\frac{1}{\sqrt{2}}) = 12(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}) = \frac{12}{\sqrt{2}} \succ 0 ...Min.point$$

** **Inflection point نقطة الانقلاب****

نقطة الانقلاب:- وهي النقطة التي يتحول عندها المنحني من التحدب إلى التقعر والعكس صحيح , ولإيجاد نقطة الانقلاب يجب أن نساوي المشتقة الثانية بالصفر

EX1: Find the Inflection point of $y= x^3$
Sol:-

$$y = x^3$$
$$y' = 3x^2$$
$$y'' = \frac{6x}{6} = \frac{0}{6} = 0$$
$$y = (0)^3 = 0$$
$$(0,0)$$

EX2: Find the Inflection point of $y= x^3-3x^2+4$
Sol:-

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$
$$y' = 6x^2 - 6x$$
$$y'' = 6x - 6 = 0$$
$$\frac{6x}{6} = \frac{6}{6} \rightarrow x = 1$$
$$f(x = 1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2$$
$$(1,2)$$

(e10-3) التطبيق الخامس مبرهنات القيم القصوى

ويشمل هذا التطبيق نوعيتين من المبرهنات:-

- مبرهنة رول Roll theorem.
- مبرهنة القيمة المتوسطة Mean value theorem.

مبرهنة رول Roll theorem

Def:- let f(x) be a continuous on [a ,b] and differentiable on (a , b) and let (c) € (a ,b) than f(a) = f(b) such that f˘(c) =0

ملاحظات:-

- دائما الدالة متعددة الحدود تكون مستمرة ومعرفة على خط الإعداد الحقيقية ومعرفة على الفترة المغلقة [a ,b] لان هذه الفترة جزء من (R).

- لبيان فيما إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق نجد المشتقة الأولى ونلاحظ هل إن المشتقة الأولى مستمرة ومعرفة على الفترة إذ كانت(نعم) فهي قابلة للاشتقاق وإذا كانت لا فهي غير قابلة للاشتقاق.

EX1: Find the values of (c) that satisfy Roll theorem of f(x) =x^2-5x+7 on [0,5]
Sol:-

$$1\, f(x) = x^2 - 5x + 7 \rightarrow cont.on[0,5]$$
$$2\, f'(x) = 2x - 5 \rightarrow diff\ (0,5)$$
$$3\, f(a) = f(0) = (0)^2 - 5(0) + 7 = 7$$
$$f(b) = f(5) = (5)^2 - 5(5) + 7 = 7$$
$$f(a) = f(b) = 7$$
$$f'(c) = 0$$
$$f'(x) = 2x - 5 = f'(c) = 2c - 5 = 0 \rightarrow \frac{2c}{2} = \frac{5}{2}$$
$$c = \frac{5}{2}$$

بما إن الشروط الثلاثة لمبرهنة رول قد تحققت لذلك قمنا بإيجاد قيمة (c).

EX2: Find the values of (c) that satisfy Roll theorem of f(x) =x^2-2x-4 on [-2,2]
Sol:-

$$1\, f(x) = x^2 - 2x - 4 \rightarrow cont.on[-2,2]$$
$$2\, f'(x) = 2x - 2 \rightarrow diff\ (-2,2)$$
$$3\, f(a) = f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 4 = 4$$
$$f(b) = f(2) = (2)^2 - 2(2) - 4 = -4$$
$$f(a) \neq f(b)$$

بما إن الشروط الثلاثة لمبرهنة رول لم تتحقق لذلك لا نستطيع إيجاد قيمة (c).

مبرهنة القيمة المتوسطة Mean value theorem

Def:- let f(x) be a continuous on [a ,b] and differentiable on (a , b) and let (c) € (a ,b) than f(a) = f(b) such that

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

EX1: Find the values of (c) that satisfy Mean value theorem of $f(x) = 3x^2-5x+6$ on [-2,3]
Sol:-

$$1\ f(x) = 3x^2 - 5x + 6......cont.on \rightarrow [-2,3]$$
$$2\ f'(x) = 6x - 5....diff.on \rightarrow (-2,3)$$
$$3\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$f(a) = f(-2) = 3(-2)^2 - 5(-2) + 6 = 28$$
$$f(b) = f(3) = 3(3)^2 - 5(3) + 6 = 18$$
$$f'(x) = 6x - 5 \rightarrow f'(c) = 6c - 5$$
$$6c - 5 = \frac{18 - 28}{3 - (-2)}$$
$$6c - 5 = \frac{18 - 28}{3 - (-2)} \rightarrow 6c - 5 = \frac{-10}{5}$$
$$6c - 5 = -2 \rightarrow 6c = -2 + 5 \rightarrow \frac{6c}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$c = \frac{1}{2} \in [-2,3]$$

EX2:- show weather the function $y = x^2$ on [0, 2] satisfies the conditions (M.V.T) and find the value of (Z)
Sol:-

$$1\ f(x) = x^2......cont.on \rightarrow [0,2]$$
$$2\ f'(x) = 2x....diff.on \rightarrow (0,2)$$
$$3\ f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$f(a) = f(0) = (0)^2 = 0$$
$$f(b) = f(2) = (2)^2 = 4$$
$$f'(z) = 2z$$
$$2z = \frac{4 - 0}{2 - 0} = \frac{2z}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow z = 1$$
$$z = 1 \in [0,2]$$

velocity and acceleration التطبيق السادس التعجيل والسرعة (f10-3)

السرعة:- بأنها التغير بالمسافة بالنسبة للزمن والسرعة دائما تمثل المشتقة الأولى للمسافة.

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

التعجيل:- يعرف بأنه معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن حيث إن التعجيل يمثل المشتقة الثانية

$$A = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

EX1:- find the velocity and acceleration of the $f(x)=\sin(t^2)$

$$v=\frac{df}{dt}=\cos(t^2).2t=2t.\cos(t^2)$$

$$ac=\frac{d^2f}{dt}=2t(-\sin(t^2).2t)+\cos(t^2).2=$$

$$=-4t^2\sin(t^2)+2\cos(t^2)$$

EX2:- find the velocity and acceleration of the $f(x)=3t^2-12t+4$

Sol:-

$$v=\frac{df}{dt}=6t-12$$

$$ac=\frac{d^2f}{dt}=6$$

****الواجبات****

السؤال الأول :- احسب المشتقات للدوال الآتية:-

$$1y=x^3+2x^{-2}+4$$

$$2y=(x^2+3)(3x^2+1)$$

$$3y=\frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$$

$$4y=\sqrt{x^{-3}+4x}$$

$$5y^2=xy+x^2-2x^3$$

$$6y=u^2+2,u=2x^2+5$$

$$7y^5-5x^2-yx=8x-1$$

$$8y=2t^2-t;t=2x^3\ldots find\,(y'),\rightarrow x=4$$

$$9y=5x^2+\frac{3x}{x^2}$$

$$10y=10x^3-2x-81$$

السؤال الثاني:-

By using H.R to find

$$\lim_{x\to\infty}x.\sin(\frac{1}{x})$$

السؤال الثالث:-

$$find:\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-2}{6x^2-5x+8}$$

السؤال الرابع:-

هل الدالة قابلة للاشتقاق

$$let:\ f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 2\\ 4x-4, x\prec 2\end{cases}$$

السؤال الخامس:-

$$find\,(f'(2))if\,(f(x)) = g + \frac{x}{g(x)}; g(2) = 4, g'(2) = 2$$

السؤال السادس:-

$$find\,(f'(3))if\,(g(x)).(f(x)) = 1; g(3) = -2, g'(3) = 4$$

السؤال السابع:-

$$find\,(f'(\frac{\pi}{4}))if\,.(f(x)) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$$

السؤال الثامن:-

$$find\,(f'(x))if\,.(f(x)) = \cos^2(\frac{\pi}{3})$$

السؤال التاسع:-

Find max and min by using the first derivative of the functions:

1 $y=x^2-4x$

2 $y=6x^2-6x+3x^2$

السؤال العاشر:-

Find the relative max or min points by using the in ference by second derivative of $f(x) = 2x^5-3x^2+1$