الفصل الثالث

الحل العددي لنظام المعادلات الخطية

(1-3) مقدمة

لقد ذكرنا في الفصل السابق بعض طرق معالجة منظومات المعادلات الغير خطية ومن الناحية النظرية يمكن تطبيق تلك الطرق على منظومة المعادلات الخطية ولكن لكون هذه الأخيرة اقل تعقيدا بكثير من الأولى ولكثرة ورودها بالمسائل العلمية فان هنالك طرق عددية أفضل لمعالجتها سنذكر بعض منها في هذا الفصل:-

(2-3) المصفوفات

المصفوفة:- وهي عبارة عن مجموعة من الأرقام محصورة مابين قوسين كبيرين حيث إن كل عنصر يقع في الصف (i) من المصفوفة والعمود (j) ويرمز لها بالرمز $A =[a_{ij}]$ وتكون ذات سعة (m) من الصفوف و (n) من الأعمدة.

أنواع المصفوفات

- المصفوفة المربعة:- وهي تلك المصفوفة التي يكون عدد صفوفها مساوي للعدد الأعمدة

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة المتناظرة:- يقال لأي مصفوفة على أنها مصفوفة متناظرة إذا حققت الشرط الأتي:-

$a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة القطرية: يقال لأي مصفوفة أنها مصفوفة قطرية إذا كانت عناصر القطر الرئيسي أرقام مختلفة وباقي عناصر القطر أصفار

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة الأحادية (الواحدية):- وهي عبارة عن مصفوفة قطريه يرمز لها بالرمز (I) عناصر قطرها الرئيسي يساوي واحد أما باقي العناصر تساوي أصفار.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة الصفرية:- وهي عبارة عن مصفوفة سواء كانت مربعة أو غير مربعة جميع عناصرها أصفار

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- المصفوفة المثلثية العليا:- هي عبارة عن مصفوفة جميع عناصرها التي تقع أسفل القطر الرئيسي نساوي أصفار

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- <u>المصفوفة المثلثية السفلى</u>:- هي عبارة عن مصفوفة جميع عناصرها التي تقع اعلي القطر الرئيسي تساوي أصفار

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&8&0&0\\2&3&20&0\\7&8&1&30\end{bmatrix}$$

- المصفوفة المنفردة:- هي مصفوفة مربعة محددها يساوي صفر دائما وكل مصفوفة منفردة ليس لها معكوس.

خواص المصفوفات

<u>1 معكوس المصفوفة</u>

$$W^{-1}=\frac{adj(W)}{|W|}$$

مثال:- جد معكوس المصفوفة

$$W=\begin{bmatrix}1&2\\3&7\end{bmatrix}$$

الحل:-

$$W^{-1}=\frac{adj(W)}{|W|}$$

المحدد (W) = حاصل ضرب القطر الرئيسي – حاصل ضرب القطر الثانوي

المحدد(W)= (1)(7)-(2)(3)= 1

$$W^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}-1&3\\2&-7\end{bmatrix}}{1}$$

ب- إذا كانت كل من A , B مصفوفتان غير منفردة فان $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ج- محدد المصفوفة القطرية والمصفوفة المثلثية السفلى والعليا وهو عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة

د- $\left|A^T\right|=|A|$

طرق إيجاد المحددات

- إذا كانت المصفوفة ذات سعة (1×1) فان محدد تلك المصفوفة يمثل الرقم نفسه

$$W=[7]\Rightarrow|W|=7$$

$$E=[-8]\Rightarrow|E|=-8$$

- إذا كانت المصفوفة ذات سعة (2×2) فان محدد تلك المصفوفة يمثل
محدد المصفوفة= حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي- حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A|=[(a_{11})(a_{22})-(a_{21}a_{12})]$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(1)(3)-(2)(0)=3$$

- إذا كانت المصفوفة ذات سعة (3×3) فان محدد تلك المصفوفة سوف يكون بتكرار العمود الأول والثاني وكالاتي:-

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} c_{11}\,c_{12} \\ c_{21}\,c_{22} \\ c_{31}\,c_{32} \end{matrix}$$

$$|C|=[(c_{11}.c_{22}.c_{33})+(c_{12}.c_{23}.c_{31})+(c_{13}.c_{21}.c_{32})]-[(c_{31}.c_{22}.c_{13})+(c_{32}.c_{23}.c_{11})+(c_{33}.c_{21}.c_{12})]$$

- إذا كانت المصفوفة ذات سعة (4×4) أو أكثر فان محدد تلك المصفوفة سوف يتم من خلال تطبيق العامل المميز.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A|=1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}+0+1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\text{مقدار}$$

ملاحظة: دائما يفضل استخدام (حذف الصف أو العمود) الذي يحتوي على اكبر عدد ممكن من الاصفار لتسهيل عملية إيجاد المحدد بسرعة أفضل

$$|A|=\text{رقم}\ .(-1)^{i+j}\,|\text{محدد}\quad|$$

(3-3) منظومات المعادلات الخطية

يمكن كتابة المنظومة العامة المتكونة من (m) من المعادلات الخطية والتي تحتوي على (n) من المجاهيل بالشكل الأتي:-

حيث إن (m) تمثل عدد المعادلات.

وان (n) تمثل عدد المتغيرات (المجاهيل)

ويمكن كتابة المعادلات ثم تحويلها إلى مصفوفات بالشكل الأتي:-

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+........+a_{1n}x_n=b_1 \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+..........+a_{2n}x_n=b_2 \\ &: \\ &: \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...........+a_{mn}x_n=b_m \end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}$$

إذن يكون النظام أعلاه بالشكل الأتي:-

$$AX = B$$

لذلك توجد ثلاث حالات في هذا النظام:

1 الحالة الأولى:-

إذا كانت n> m أي بمعنى يكون عدد المجاهيل (n) اكبر من عدد المعادلات (m) فان المنظومة لها حل ولكنه ليس حل وحيد إي بمعنى يوجد مالا نهاية من الحلول الممكنة وحسب المثال الأتي:-

$$x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4x_2$$
$$let : x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 4(1) = 4$$
$$let : x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 4(2) = 8$$
$$let : x_2 = -3 \Rightarrow x_1 = 4(-3) = -12$$
$$\therefore n = 2 \succ m = 1$$

إذن يوجد ما لانهاية من الحلول حسب الشرط أعلاه

2 الحالة الثانية:-

إذا كان عدد المعادلات (m) اكبر من عدد المجاهيل (n) عندئذ نحل أي معادلتين أنيا ونجد قيم المتغيرات فيها ومن ثم نعوض في المعادلات المتبقية فإذا كانت القيم التي حصلنا عليها تحقق جميع المعادلات عندئذ تسمى المنظومة بالمنظومة المتسقة أما إذا كانت القيم التي حصلنا عليها لا تحقق واحد من المعادلات عندئذ تسمى المنظومة بالمنظومة الغير متسقة وبهذه الحالة لا تكون هنالك حل للمنظومة لان عدد n< m

$$2x_1 - 3x_2 = 1 ....1$$
$$x_1 + x_2 = 0 ....2$$
$$5x_1 + x_2 = 3 ....3$$

n=2<m=3

$$2x_1 - 3x_2 = 1$$
$$\mp 2x_1 \mp 2x_2 = \mp 0 \text{بالطرح}$$

$$\frac{-5x_2}{-5} = \frac{1}{-5} \Rightarrow x_2 = \frac{-1}{5}$$
$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 + (-\frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}$$

لكي نختبر هل النظام متسق (يمتلك حل أم لا) يجب أن نعوض قيم x_1, x_2 في جميع المعادلات ويجب أن يكون الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر لكل المعادلات

المعادلة الأولى $x_1 = 1/5, \quad x_2 = -1/5$

2(1/5)-3(-1/5)=1

1=1

المعادلة الثانية $x_1 = 1/5, \quad x_2 = -1/5$

$$(1/5)+(-1/5)=0$$
$$0=0$$

المعادلة الثالثة $x_1 = 1/5, \quad x_2 = -1/5$

$$5\,(1/5)+(-1/5)=3$$
$$4/5=3$$

بما إن الطرف الأيمن لا يساوي الطرف الأيسر إذا لا يكون للنظام الخطي حل لذلك فان المعادلات أعلاه ليس لها حل لان عدد المجاهيل اقل من عدد المعادلات.

3 الحالة الثالثة:-
عندما يكون عدد المعادلات (m) يساوي عدد المجاهيل (n) وتكون المصفوفة مربعة ذات سعة $(n \times n)$ وبشرط إن محددها لا يساوي صفر ولها معكوس: إذن يكون لها حل وحيد فقط وذلك باستخدام أسلوب كريمر

ملاحظات
1 المصفوفة الشاذة هي مصفوفة محددها يساوي صفر أما المصفوفة الغير شاذة هي تلك المصفوفة التي محددها لا يساوي صفر

2 النظام الخطي المتجانس يكتب $AX = 0$ له حل وحيد وهو الحل الصفري.

3 النظام الخطي الغير المتجانس يكتب $AX = B$ له حل وحيد وهو الغير الحل الصفري

<u>(4-3) الحلول العددية للنظام الخطي</u>

هنالك نمطين من الطرق:-
1 **النمط الأول:-** الطرق المباشرة وهي عبارة عن إجراء سلسلة من العمليات الحسابية لمرة واحدة فقط حيث يتم من خلالها الوصول إلى قيمة تقريبية للحل المطلوب وتشمل الطرق الآتية:-

- طريقة الحذف لكاوس.
- طريقة كاوس- جوردن.
- طريقة التحليل المثلثي وتشمل:

أ- طريقة التحليل المثلثي لكراوت.
ب- طريقة التحليل المثلثي جولسكي.
ت- طريقة التحليل المثلثي دولتل.

2 **النمط الثاني:-** الطرق الغير مباشرة(الطرق التكرارية):- وهي عبارة عن إجراء سلسلة من العمليات بشكل متكرر أي أكثر من مرة واحدة من اجل الحصول على الحل التقريبي الذي يمتاز بالدقة الجيدة وتشمل هذه الطرق:

- طريقة جاكوبي.
- طريقة كاوس-سيدل.
- طريقة الإرخاء (التراخي)

ومن الجدير بالذكر انه بالإمكان دمج النوعيين من الطرق للحصول على حلول أدق.

- طريقة الحذف لكاوس Gaussian-Elimination Method

تعتبر هذه الطريقة من ابسط وأقدم الطرق المباشرة المستخدمة في حل منظومة المعادلات الخطية وتتلخص هذه الطريقة بوضع المتجه B بجانب المصفوفة A وبالشكل الأتي [A: B] وبعد إجراء بعض التحويلات البسيطة الابتدائية تحول المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية عليا وذلك باستخدام قانون الحذف الأمامي لمعاملات المجاهيل التي

تقع تحت عناصر القطر الرئيسي بشكل متتالي بعدها تبدءا عملية عكسية إي باستخدام قانون التعويض التراجعي حتى نحصل على قيم المتغيرات $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n, X_{n-1}$

$$x_k = \frac{b_k - \sum a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$

مثال1 :- حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام طريقة الحذف لكاوس

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

الحل:- من اجل تحويل المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية عليا يجب أن نحول كل من الإعداد a_{21}, a_{31}, a_{32} إلى أصفار

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right|$$

$a_{21} = 4 \longrightarrow 0$

نأخذ الصف الأول ويضرب في العدد 2-

```
   2  3  -1  5
  -4  -6  2  -10
+
   4  4  -3  3
______________________
   0  -2   -1   -7
```

$a_{31} = -2 \longrightarrow 0$

نأخذ الصف الأول

```
   2  3  -1  5
+
   -2  3 -1 1
______________________
   0   6   -2   6
```

$a_{32} = 6 \longrightarrow 0$

نأخذ الصف الثاني ويضرب قي الرقم (3) ثم يجمع مع الصف الثالث

```
   0  -2  -1  -7      *3
   0  -6  -3  -21
+
  0   6   -2   6
______________________
   0   0  -5  -15
```

$$\left[\begin{array}{ccc} 2x_1 & 3x_2 & -x_3 \\ 0 & -2x_2 & -x_3 \\ 0 & 0 & -5x_3 \end{array}\right] \begin{array}{c} 5 \\ -7 \\ -15 \end{array}$$

وبعد تحويل المصفوفة الاعتيادية إلى مصفوفة مثلثيه عليا يجب إيجاد قيم المتغيرات x_1, x_2, x_3 وذلك باستخدام التعويض التراجعي:

$$\frac{-5x_3}{-5}=\frac{-15}{-5}\Rightarrow x_3=3$$

$$-2x_2-x_3=-7\Rightarrow\frac{-2x_2}{-2}=\frac{7+x_3}{-2}=\frac{-7+x_3}{-2}\Rightarrow x_2=2$$

$$2x_1+3x_2-x_3=5\Rightarrow\frac{2x_1}{2}=\frac{5-3x_2+x_3}{2}=\frac{5-3(2)+3}{2}\Rightarrow x_1=1$$

مثال 2:- حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام طريقة الحذف- لكاوس

$$3x_1+4x_2+5x_3=2$$
$$x_1+x_2+x_3=7$$
$$-x_1+2x_2+4x_3=9$$

الحل:- يفضل أول رقم يجب أن يكون (1) لتسهيل الحل
لكي نجعل أول رقم يساوي 1 نستبدل موقع الصف الثاني محل الصف الأول وان هذا التغير لا يوثر على الحل

$$AX=B$$

$$\begin{bmatrix}3&4&5\\1&1&1\\-1&2&4\end{bmatrix}\begin{matrix}2\\7\\9\end{matrix}\approx\begin{bmatrix}1&1&1&7\\3&4&5&2\\-1&2&4&9\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&1&1&7\\0&1&2&-19\\0&3&5&16\end{bmatrix}$$

نأخذ الصف الأول ويضرب في الرقم 3 ثم يجمع مع الصف الثاني لكي نحول الرقم $a_{21}=0$

1 1 1 7   * -3
-3 -3 -3 -21
+
3 4 5 2

---

0 1 2 -19

لجعل الرقم $a_{31}=0$ سوف نجمع الصف الثالث مع الصف الأول

1 1 1 7
+
-1 2 4 9

---

0 3 5 16

لجعل الرقم $a_{32}=0$ سوف يضرب الصف الثاني في الرقم 3- ثم يجمع مع الصف الثالث

0 1 2 -19   *3
0 -3 -6 57
+
0 3 5 16

---

0 0 -1 73

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_2 & 2x_3 \\ 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ -19 \\ 73 \end{matrix}$$

$$-x_3 = 73 \Rightarrow x_3 = -73$$

$$x_2 + 2x_3 = -19 \Rightarrow x_2 = -19 - 2x_3 = -19 - 2(-73) \Rightarrow x_2 = 127$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 7 - x_2 - x_3 = 7 - 127 + 73 \Rightarrow x_1 = -47$$

- طريقة كاوس -جوردن Gaussian- Jorden Method

وهي نفس طريقة كاوس ولكن بدلا من جعل المصفوفة مثلثيه عليا نجعلها قطرية ومن ثم نجد قيم المتغيرات وذلك من خلال قسمة عناصر المتجهة (B) على عناصر القطر الرئيسي

مثال1 :- حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كاوس- جوردن

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

الحل:-

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{matrix} \xrightarrow{R \to R_{21}} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{matrix} \xrightarrow{R_2 \to R_3}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{matrix} \xrightarrow{-R_1 + R_2} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{matrix} \xrightarrow{R_2 + R_3} \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 \\ -3 \\ -8 \end{matrix} \xrightarrow{-1/3R_2 + R_1}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 \\ -3 \\ -8 \end{matrix} \xrightarrow{-R_3 + R_2} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 \\ 5 \\ -8 \end{matrix} \xrightarrow{-2/3R_3 + R_1} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 31/3 \\ 5 \\ -8 \end{matrix}$$

$$X_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{\frac{31}{3}}{1}$$

$$X_2 = \frac{b}{a_{22}} = \frac{5}{-3}$$

$$X_3 = \frac{-8}{-1}$$

طريقة كاوس- جوردن	طريقة كاوس للحذف
1 نجد [A:B]	1 نجد [A:B]
2 نجري مجموعة من التحويلات الأولية الابتدائية لتحويلها إلى مصفوفة قطرية	2 نجري مجموعة من التحويلات الأولية الابتدائية لتحويلها إلى مصفوفة مثلثيه عليا
3 نجد قيمة المتغيرات من خلال قسمة قيم B على عناصر القطر $X_i=b_i/a_{ij}$	3 نجد قيمة المتغيرات من خلال تطبيق قانون التعويض التراجعي

ملاحظات

- دائما الأرقام للمتغيرات التي تظهر بطريقة كاوس يجب أن تساوي الأرقام التي تظهر بطريقة كاوس-جوردن.
- تعتبر طريقة كاوس للحذف أفضل من طريقة كاوس- جوردن لأنها تحتاج إلى عمليات حسابية بسيطة اقل من الطريقة الثانية من اجل تحويلها إلى مصفوفة مثلثيه عليا.
- عند حل طريقة كاوس للحذف يمكن تحويل المصفوفة إلى مثلثيه سفلى ويتم إيجاد قيم المتغيرات عن طريق التعويض الأمامي.

- طريقة التحليل المثلثي Triangular Decomposition Methods

هدف هذه الطريقة هو تحويل أي مصفوفة إلى مصفوفتين احدهما مثلثيه عليا والأخر مثلثيه سفلى ومن ثم أيجاد قيم x_i, y_i ويرمز لها بالرمز

$$A = L.U$$

ولانجاز التحليل المثلثي يتم إتباع إحدى الطرق التالية

أ- طريقة التحليل المثلثي لكراوت.
ب- طريقة التحليل المثلثي جولسكي.
ت- طريقة التحليل المثلثي دولتل.

وفي الطرق الثلاثة أعلاه يتم حساب عناصر المصفوفتين السفلى والعليا (U.L) غير المعرفة باستخدام عملية ضرب المصفوفات السفلى والعليا ومقارنتهما بعناصر المصفوفة (A) المناظرة لها وبعد انجاز التحليل المثلثي لها يمكن حل نظام المعادلات الخطية على النحو التالي:-

$$AX = B$$
$$let : A = L.U$$
$$L.U.X = B$$
$$let : U.X = Y$$
$$L.Y = B$$

وباستخدام التحليل (التعويض الأمامي والتراجعي) نحصل على قيم X_i, Y_i

أ- طريقة كراوت :- إن هذه الطريقة تشترط أن تكون العناصر القطرية في المصفوفة ألمثلثيه العليا تساوي واحد وكما مبين أدناه:- لتكن لدينا مصفوفة ذات سعة 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} = L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} * U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

وحسب طريقة كراوت نفرض إن

$$U_{11}=U_{22}=U_{33}=1$$

آي بمعنى إن عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة ألمثلثيه العليا تساوي واحد وبفرض إن

$$L_{11}=a_{11} , L_{21}=a_{21}, L_{31}=a_{31}$$

سوف تكون المصفوفة العليا والمصفوفة السفلى بالشكل الأتي:-

$$A = L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} * U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L.U$$

$$A^* = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} & \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22} & U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} & \end{bmatrix}$$

ومن المصفوفة A^* نحصل على الأتي:-

$$L_{11} = a_{11}$$
$$L_{21} = a_{21}$$
$$L_{31} = a_{31}$$

$$L_{i1} = a_{i1}$$

$$a_{12} = L_{11}U_{12}$$
$$a_{13} = L_{11}U_{13}$$

$$U_{ij} = \frac{a_{1j}}{L_{11}}$$

خوارزمية طريقة التحليل ألمثلثي

$$1. L_{i1} = a_{i1}, i = 1,2,3,.......n$$

$$2. U_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{11}}; j = 1,2,3,......n$$

$$3. L_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}$$

$$4. U_{jk} = a_{ik} - \sum_{i=1}^{j-1} L_{ji}U_{ik}; k = j+1, j+2,.....$$

$$5. L_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} L_{nk}U_{kn}$$

$$6. Ax = b$$

$$L.Ux = b$$

$$7. y = Ux$$

$$8. Ly = b$$

سوف نحصل من المعادلة (8) على قيمة (y) نعوضها في المعادلة (7) حتى نحصل على قيمة (x)

مثال:- استخدام طريقة كراوت للتحليل ألمثلثي لإيجاد الحل للمنظومة المعادلات التالية:

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 22$$
$$3x_1 + 19x_2 + 17x_3 = 94$$
$$8x_1 + 36x_2 + 25x_3 = 166$$

الحل:-

$$AX = B$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 19 & 17 \\ 8 & 36 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 94 \\ 166 \end{bmatrix}$$
$$A^* = L.U$$

$$A^* = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} & \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22} & U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} & \end{bmatrix}$$

$U_{11}=U_{22}=U_{33}=1$

$L_{11}=a_{11}$, $L_{21}=a_{21}$, $L_{31}=a_{31}$

لكي نجد قيم الصف الأول من المصفوفة A*

$$L_{11} = a_{11} \Rightarrow L_{11} = 1$$
$$L_{11}U_{12} = (1)U_{12} = 5 \Rightarrow U_{12} = 5$$
$$L_{11}U_{13} = (1)U_{13} = 3 \Rightarrow U_{13} = 3$$

لكي نجد قيم الصف الثاني من المصفوفة A*

$$L_{21} = a_{21} \Rightarrow L_{21} = 3$$
$$L_{21}U_{12} + L_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22} = 19$$
$$L_{22} = 19 - (3)(5) = 4$$
$$L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} = 17$$
$$(3)(3) + (4)U_{23} = 17 \Rightarrow U_{23} = 2$$

لكي نجد قيم الصف الثالث من المصفوفة A*

$$L_{31} = 8$$
$$L_{31}U_{12} + L_{32} = 36 \Rightarrow (8)(5) + L_{32}36 \Rightarrow L_{32} = -4$$
$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} = 25$$
$$(8)(3) + (-4)(2) + L_{33} = 25 \Rightarrow L_{33} = 9$$

أذن بعد إيجاد كل من U_{ij} , L_{ij} يمكن كتابة المصفوفة ألمثلثيه العليا والسفلى بشكل الأتي:

$$A = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 9 \end{bmatrix} * U = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وباستخدام قانون التعويض الأمامي يتم إيجاد قيم (y) بالاعتماد على Ly = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 94 \\ 166 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 22 \\ 94 \\ 166 \end{matrix}$$

$$1y_1 = 22 \Rightarrow y_1 = 22$$

$$3y_1 + 4y_2 = 94 \Rightarrow y_2 = \frac{94 - 3(22)}{4} = 7 \Rightarrow y_2 = 7$$

$$8y_1 - 4y_2 + 9y_3 = 166 \Rightarrow y_3 = \frac{166 - [8(22) + (-4)(7)]}{9} = y_3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ولكي نجد قيم (x) نطبق القانون التالي:-

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 22 \\ 7 \\ 2 \end{matrix}$$

بما إن المصفوفة ألمثلثيه عليا إذن سوف نستخدم قانون التعويض التراجعي لكي نجد قيمة (x)

$$x_3 = 2$$

$$x_2 + 2x_3 = 7 \Rightarrow x_2 = \frac{7 - 2x_3}{1} = 7 - 2(2) = 3$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 22 \Rightarrow x_1 = \frac{22 - 5(3) - 3(2)}{1} = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب - طريقة دولتل :- إن هذه الطريقة تشترط أن تكون العناصر القطرية في المصفوفة ألمثلثيه السفلى تساوي واحد وكما مبين أدناه:- لتكن لدينا مصفوفة ذات سعة 3×3

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} * U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = L * U$$

$$A^* = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12}+U_{22} & L_{21}U_{13}+U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33} \end{bmatrix}$$

وبما إن الحل باستخدام طريقة دولتل إذن سوف تكون قيم كل من كالأتي:-

$L_{11}=L_{22}= L_{33}=1$

$U_{11}=a_{11}$, $U_{12}=a_{12}$, $U_{13}=a_{13}$

ونفس حالة طريقة كراوت سوف مجد بالتعويض الأمامي قيم (y) ومن ثم بالتعويض التراجعي قيم (x)

مثال:- استخدام طريقة دولتل للتحليل ألمثلثي لإيجاد الحل للمنظومة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

الحل:-

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^* = L.U$$

$$A^* = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12}+U_{22} & L_{21}U_{13}+U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33} \end{bmatrix}$$

وحسب طريقة دولتل

$L_{11}=L_{22}= L_{33}=1$

$$U_{11} = a_{11} = 2$$
$$U_{12} = a_{12} = 3$$
$$U_{13} = a_{13} = -1$$
$$L_{21}U_{11} = 4 \Rightarrow L_{21}(2) = 4 \Rightarrow L_{21} = 2$$
$$L_{21}U_{12} + U_{22} = 4 \Rightarrow (2)(3) + U_{22} = 4 \Rightarrow U_{22} = -2$$
$$L_{21}U_{13} + U_{23} = -3 \Rightarrow (2)(-1) + U_{23} = -3 \Rightarrow U_{23} = -1$$
$$L_{31}U_{11} = -2 \Rightarrow L_{31}(2) = -2 \Rightarrow L_{31} = -1$$
$$L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 3 \Rightarrow (-1)(3) + L_{32}(-2) = 3 \Rightarrow L_{32} = -3$$
$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = -1 \Rightarrow (-1)(-1) + (-3)(-1) + U_{33} = -1 \Rightarrow U_{33} = -5$$

بعد إيجاد كل من U_{ij} , L_{ij} يمكن كتابة المصفوفة ألمثلثيه العليا والسفلى بالشكل الأتي:-

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

وباستخدام قانون التعويض الأمامي يتم إيجاد قيم (y) بالاعتماد على ذلك لان المصفوفة ألمثلثيه السفلى

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1` \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right.$$

$$y_1 = 1$$
$$2y_2 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 - 2(1)$$
$$y_2 = 0$$
$$-y_1 - 3y_2 + y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = 3 + y_1 + 3y_2$$
$$y_3 = 4$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ولكي نجد قيم x نطبق القانون الأتي:-

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{array} \right.$$

بما إن المصفوفة مثلثيه عليا سوف نطبق قانون التعويض التراجعي لإيجاد قيم (x)

$$\frac{-5x_3}{-5} = \frac{4}{-5} \Rightarrow x_3 = \frac{-4}{5}$$
$$-2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{10}$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow \frac{2x_1}{2} = \frac{1 - 3x_2 + x_3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{4}{10} \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$$

ث- طريقة جولسكي

وهنا في هذه الطريقة سوف تنطبق عناصر قطري المصفوفة إي إن:-

$$L_{ii} = U_{ii} = V_{ii} \rightarrow \forall i = 1,2,3,......n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ 0 & v_{22} & v_{23} \\ 0 & 0 & v_{33} \end{bmatrix}$$

ويجب أن تكون المصفوفة (A) مصفوفة موجبة متناظرة

الطريق التكرارية

أ طريقة جاكوبي (جاكوب) Jacobs mothed

تعتبر هذه الطريقة من أول الطرق التي استخدمت لإيجاد الحل العددي وهي طريقة سهلة الاستخدام ولكن قلما تستعمل لأنها طريقة بطئيه الوصول إلى الحل الصحيح ويمكن توضيحها كما يأتي :- ولتكن لدينا ثلاث معادلات

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

حيث يكون إعادة صياغة المعادلات الخطية أعلاه بشكل تكراري بحيث يعرف المجهول الأول من المعادلة الأولى والمجهول الثاني من المعادلة الثانية وهكذا وكما يأتي:-

$$x_1^r = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{r-1} - a_{13}x_3^{r-1}}{a_{11}}$$

$$x_2^r = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{r-1} - a_{23}x_3^{r-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^r = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{r-1}a_{32}x_2^{r-1}}{a_{33}}$$

$$r = 0,1,2,3,4,......$$

وان قيمة (r) يمثل القيمة الجديدة المحسوبة توا من قيمة (r-1) الذي يمثل القيمة القديمة نبدأ بالقيم الابتدائية $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ ونحسب القيم (x^1_1, x^1_2, x^1_3) وهذه القيم الجديدة المحسوبة تستعمل كقيم ابتدائية لحساب (x^2_1, x^2_2, x^2_3) وهكذا ويستمر المخطط التكراري حتى يحقق الشرط الأتي:-

$$\left\| x^r - x^{r-1} \right\|$$

$$or$$

$$Max\left|(x_3^r - x_3^{r-1}),(x_2^r - x_2^{r-1}),(x_1^r - x_1^{r-1})\right| \prec \in$$

أحيانا تتقارب (متقاربة) النتائج وأحيانا يصبح بها نوع من التباعد (متباعدة) وبصورة عامة يتم استخدام القانون الأتي للحساب قيم (x) عند كل تكرار

$$x_i^r = \frac{b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$$

حيث إن طريقة جاكوبي تقسم إلى قسمين :-

أ- الطريقة العامة.

ب- طريقة المصفوفات.

خوارزمية طريقة جاكوبي

- ضع r=1.
- إذا كانت $r \leq N$ نلجأ إلى تطبيق الخطوة الثالثة
-

$$x_i^r = \frac{b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$$

- إذا تحقق الشرط عندئذ تعتبر كل من قيم (x^1_1, x^1_2, x^1_3) الحل المطلوب ثم نتوقف.
- نطبق r = r+1
- إذا لم يتحقق الشرط نكرر العملية من الخطوة الثالثة

واجب :- باستخدام طريقة جاكوبي (العامة) جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12$$

واجب:- باستخدام طريقة جاكوبي (العامة) جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ لثلاثة مكررات فقط r =0

$$20x_1 - x_2 + x_3 = 20$$
$$2x_1 + 10x_2 - x_3 = 11$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -18$$

مثال:- باستخدام طريقة جاكوبي (العامة) جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) =$ (1,1,1,) علما إن قيمة الخطأ 0.000001

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$
$$-x_1 + 2x_2 = 3$$

الحل:-

نلاحظ إن قيمة $a_{33} = 0$ وعليه يجب أن نبدل المعادلة (3) مع المعادلة (2) لكي نحصل على تحقيق شرط السيطرة الهيمنة القطرية

$$|a_{ii}| \succ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}} |a_{ij}|$$

إذن سوف يكون الحل كالأتي:-

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$
$$-x_1 + 2x_2 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$
$$a_{11} = 4 \Rightarrow |4| \succ |2| + |1|$$
$$a_{22} = 2 \Rightarrow |2| \succ |-1| + |0|$$
$$a_{33} = 4 \Rightarrow |4| \succ |2| + |1|$$

$$x_1^1 = \frac{11 - 2x_2^0 - x_3^0}{4} \Rightarrow \frac{11 - 2(1) - 1}{4} = 2$$

$$x_2^1 = \frac{3 + x_1^0 - x_3^0}{2} \Rightarrow \frac{3+1}{2} = 2$$

$$x_3^1 = \frac{16 - 2x_1^0 - x_2^0}{4} \Rightarrow \frac{16 - 2(1) - (1)}{4} = 3.25$$

$$Max\left|(2-1), (2-1), (\frac{13}{4} - 1)\right| \neq\prec 0.000001$$

إذن بما إن الحل لم يتحقق للتكرار الأول نقوم بإيجاد قيم المتغيرات (x) للتكرار الثاني:

$$x_1^2 = \frac{11-2x_2^1 - x_3^1}{4} \Rightarrow \frac{11-2(2)-\frac{13}{4}}{4} = 09375$$

$$x_2^2 = \frac{3+2}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2.5$$

$$x_3^2 = \frac{16-2(2)-2}{4} = 2.5$$

$$Max|(0.9375-2),(2.5-2),(2.5-3.25)| \neq\prec 0.000001$$

$$1.0625 \neq\prec 0.000001$$

وهكذا نستمر بالحل إلى أن نجد الجذور المطلوبة

r	X^r_1	X^r_2	X^r_3
0	1	1	1
1	2	2	3.25
2	0.9375	2.5	2.5
: : : :	: : : :	: : : :	: : : :

ب طريقة كاوس- سيدل Gauss-Seidel Method أو طريقة جاكوبي المحسنة.
من الممكن تحسين طريقة جاكوبي للحصول على نتائج أفضل وذلك يلاحظ انه لحساب (x^r_1) ولكل قيم (i) فان الكميات x^{r-1} يجب أن تستخدم وبما إن $x^r_1,x^r_2,x^r_3,\ldots\ldots.x^r_{i-1}$ تكون قد حسبت وجاهزة للاستخدام ويفترض أن تعطي نتائج أفضل للحصول على الحل المطلوب $x^r_1,x^r_2,x^r_3,\ldots\ldots.x^r_{i-1}$ الجديدة من الحل القديم لذلك يفضل إن يتم استخدام القيم المحسوبة سابقا لإيجاد القيم الجديدة

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

حيث يمكن إعادة صياغة المعادلات الخطية أعلاه بوضع أسلوب تكراري وكما يأتي:-

$$x_1^r = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{\ r-1} - a_{13}x_3^{\ r-1}}{a_{11}}$$

$$x_2^{\ r} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^r - a_{23}x_3^{r-1}}{a_{22}}$$

$$x_3^r = \frac{b_3 - a_{31}x_1^r a_{32}x_2^r}{a_{33}}$$

$$r = 0,1,2,3,4,\ldots\ldots$$

وان الشكل العام المستخدم في طريقة كاوس-سيدل هو كالأتي:-

$$x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^r - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{\,r-1}}{a_{ii}}$$

ثم نختبر مقياس الدقة بالاعتماد على القانون الأتي:-

$$\left\| x^r - x^{r-1} \right\|$$
$$or$$
$$Max\left|(x_3^r - x_3^{r-1}),(x_2^r - x_2^{r-1}),(x_1^r - x_1^{r-1})\right| \prec \in$$

طريقة جاكوبي	طريقة كاوس –سيدل
1 طريقة قديمة وبسيطة	1 طريقة حديثة وهي اسلوب محور عن طريقة جاكوبي.
2 أن القيم الجديدة لا تستخدم إلا بعد أن نحسب جميع قيم المتغيرات.	2 إن القيم الجديد تستخدم بنفس الخطوة بدون انتظار إيجاد باقي القيم الأخرى للمتغيرات
3 نستخدم القانون التالي:- $x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1} a_{ij} x_j^{r-1}}{a_{ii}}$	3 نستخدم القانون التالي:- $x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^r - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{\,r-1}}{a_{ii}}$
4 بطيئة وتمتاز بكثرة التكرارات للصول إلى الدقة المطلوبة.	4 سريعة وتمتاز بقله التكرارات للوصول إلى الدقة المطلوبة

خوارزمية طريقة كاوس- سيدل

- ضع r=1.
- إذا كانت $r \leq N$ نلجأ إلى تطبيق الخطوة الثالثة
- $$x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^r - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{\,r-1}}{a_{ii}}$$
- ثم نختبر مقياس الدقة بالاعتماد على القانون الأتي:-

$$\left\| x^r - x^{r-1} \right\|$$
$$or$$
$$Max\left|(x_3^r - x_3^{r-1}),(x_2^r - x_2^{r-1}),(x_1^r - x_1^{r-1})\right| \prec \in$$

- r=r+1
- إذا لم يتحقق الشرط نكرر العملية من الخطوة 3

ملاحظة1:-
طريقة كاوس- سيدل تقسم إلى طريقتين العامة وطريقة المصفوفات

ملاحظة2:- يجب طريقة كاوس- سيدل إن يحقق شرط الهيمنة القطرية أي بمعنى أن عناصر القطر الرئيسي لا تساوي كمية صفرية

$$|a_{ij}| \succ \sum |a_{ij}|$$

مثال:- باستخدام طريقة كاوس-سيدل جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ علما إن قيمة الخطأ 0.000001

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 12$$

الحل:-
نجد قيمة x_1, x_2, x_3 للتكرار الأول.

$$x_1^1 = b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 / a_{11}$$
$$x_1^1 = \frac{12-0-0}{10} = 1.2$$
$$x_2^1 = b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0 / a_{22}$$
$$x_2^1 = \frac{12-1.2-0}{10} = 1.08$$
$$x_3^1 = b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1 / a_{33}$$
$$x_3^1 = \frac{12-1.2-1.08}{10} = 0.972$$
$$Max|(0.972-0),(1.08-0),(1.2-0)| \prec 0.001$$
$$1.2 \neq \prec 0.001$$

نجد قيمة x_1, x_2, x_3 للتكرار الثاني

$$x_1^2 = b_1 - a_{12}x_2^1 - a_{13}x_3^1 / a_{11}$$
$$x_1^2 = \frac{12-1.08-0.972}{10} = 0.9948$$
$$x_2^2 = b_2 - a_{21}x_1^2 - a_{23}x_3^1 / a_{22}$$
$$x_2^1 = \frac{12-0.9948-0.972}{10} = 1.00332$$
$$x_3^1 = b_3 - a_{31}x_1^2 - a_{32}x_2^2 / a_{33}$$
$$x_3^2 = \frac{12-0.9948-1.00332}{10} = 1.000188 \cong 1.00019$$
$$Max|(1.00019-0.972),(1.00332-1.08),(0.9948-1.2)| \prec 0.001$$
$$0.2052 \neq \prec 0.001$$

وهكذا نستمر بالحل إلى أن نصل إلى الجذر المطلوب وحسب الجدول الأتي:-

r	X^r_1	X^r_2	X^r_3
0	0	0	0
1	1.2	1.08	0.972
2	0.9948	1.0033	1.00019
3	0.99965	1.000016	1.000033
: : :	: : :	: : :	: : :

من الجدول أعلاه نستطيع إن نلاحظ إن التقارب في الطريقة كاوس سيدل أسرع منه في طريقة جاكوبي ففي ثلاثة خطوات حصلنا على نفس الدقة أو ربما أحسن من الدقة التي حصلنا عليها في طريقة جاكوبي بست خطوات.

واجب:-
باستخدام طريقة كاوس-سيدل جد الحل للمنظومة المعالات الآتية افرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ علما إن قيمة الخطأ 0. 001

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$5x_1 - x_2 - 2x_3 = 4$$

- طريقة الإرخاء أو التراخي Relaxant method

هذه الطريقة هي تحوير لطريقة كاوس –سيدل حيث تزيد من سرعة اقتراب القيم المنتجة للقيم المضبوطة . حيث إن الفكرة الأساسية للعمل بهذه الطريقة تكون باختيار قيمة مناسبة كحد يسمى حد التصحيح حيث بعد حساب كل قيمة جديدة (x) بطريقة كاوس-سيدل تصحح هذه القيمة بالصيغة التالية:-

$$x_i^{new} = x_i^{old} + \lambda(x_i^{new} - x_i^{old}) = \lambda x_i^{new} + (1-\lambda)x_i^{old}$$

حيث إن عامل التصحيح (λ) تكون قيمته محورة مابين 2 , 0 فإذا كانت قيمة عامل التصحيح وهو λ يساوي:-

- $\lambda=1$ فتسمى طريقة كاوس- سيدل غير المحورة.
- $0 < \lambda < 1$ فتسمى طريقة تحت التراخي.
- $1 < \lambda < 2$ فتسمى طريقة فوق التراخي.

ويمكن توضيح الطريقة لثلاث معادلات وكما يأتي:-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

فنعيد صياغة المعادلات الخطية أعلاه مع صيغة التصحيح ووضع الأسلوب التكراري وبالشكل الأتي:-

$$x_1^r = \frac{b_1 - a_{12}{x_2}^{r-1} - a_{13}{x_3}^{r-1}}{a_{11}}$$

$${x_1}^{r*} = x_1^{r-1} + \lambda(x_1^r - x_1^{r-1})$$

$${x_2}^r = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{*r} - a_{23}x_3^{r-1}}{a_{22}}$$

$$x_2^{r*} = x_2^{r-1} + \lambda(x_2^r - x_2^{r-1})$$
$$x_3^r = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{r*}a_{32}x_2^{r*}}{a_{33}}$$
$$x_3^{r*} = x_3^{r-1} + \lambda(x_3^r - x_3^{r-1})$$
$$r = 0,1,2,3,4,......$$

ومن اجل الانتقال من التكرار الأول إلى التكرار الثاني سوف يتم استبدال وكالأتي:-

$$x_1^{r-1} = x_1^{r*}, x_2^{r-1} = x_2^{r*}, x_3^{r-1} = x_3^{r*}$$

حيث أن الرمز (*) يمثل القيمة المصححة وان القانون المستخدم لهذه الطريقة بشكل عام هو:-

$$x_i^r = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^r - \sum_{j=i-1}^{n} a_{ij}x_j^{r-1}}{a_{ii}}$$
$$x_i^{r*} = x_i^{r-1} + \lambda(x_i^r - x_i^{r-1})$$

ملاحظة:- تحل هذه المنظومة عندما يتحقق شرط الهيمنة القطرية وإذا لم يتحقق ذلك نغير بالمعادلات وإذا غيرنا ولم يتحقق الشرط مرارا نتوقف ويفشل الحل.

مثال:- باستخدام طريقة الارخاء جد الحل للمنظومة المعالات الآتية على فرض إن $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$ علما إن قيمة الخطأ 0.001 وان عامل التصحيح λ= 1.5

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

حساب التكرار الأول وذلك بالاعتماد على القيم المعطاة بالسؤال $(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = (0,0,0,)$

$$x_1^1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{\,r-1} - a_{13}x_3^{\,r-1}}{a_{11}}$$
$$x_1^1 = \frac{7.85 + 0.1(0) + 0.2(0)}{3} = 2.617$$
$$x_1^{1*} = x_1^0 + \lambda(x_1^1 - x_1^0)$$
$$x_1^{1*} = 0 + 1.5(2.617 - 0) = 3.9251$$
$$x^1{}_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{*1} - a_{23}x_3^0}{a_{22}}$$
$$x_2^1 = \frac{(-19.3 - 0.1(3.9251) + 0.3(0))}{7} = -2.8132$$
$$x_2^{1*} = x_2^0 + \lambda(x_2^1 - x_2^0)$$
$$x_2^{1*} = 0 + 1.5(-2.8132 - 0) = -4.2198$$

$$x_3^1 = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{1*}a_{32}x_2^{1*}}{a_{33}}$$

$$x_3^1 = \frac{(71.4 - 0.3(3.9251) + 0.2(-4.2198)}{10} = 6.9379$$

$$x_3^{1*} = x_3^0 + \lambda(x_3^1 - x_3^0)$$

$$x_3^{1*} = 0 + 1.5(6.9379 - 0) = 10.40685 \cong 10.4069$$

$$x_1^1 = 2.617 \to x_1^{1*} = 3.9251$$

$$x_2^1 = -2.8132 \to x_2^{1*} = -4.2198$$

$$x_3^1 = 6.9379 \to x_3^{1*} = 10.4069$$

$$Max\left|(x_1^{1*} - x_1^0),\left(x_2^{1*} - x_2^0\right),\left(x_3^{1*} - x_3^0\right)\right| \prec 0.001$$

$$Max\left|3.9251, -4.2198, 10.4069\right| \prec 0.001$$

$$10.4069 \neq \prec 0.001$$

حساب التكرار الثاني وذلك بالاعتماد على القيم التي تم الحصول عليها من التكرار الأول

$$x_1^2 = \frac{b_1 - a_{12}x_2{}^1 - a_{13}x_3{}^1}{a_{11}}$$

$$x_1^2 = \frac{7.85 + 0.1(-4.2198) + 0.2(10.4069)}{3} = 3.1698$$

$$x_1{}^{2*} = x_1^1 + \lambda(x_1^2 - x_1^1)$$

$$x_1^{2*} = 3.9251 + 1.5(3.1698 - 3.9251) = 2.7921$$

$$x^2{}_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{*2} - a_{23}x_3^1}{a_{22}}$$

$$x_2^2 = \frac{(-19.3 - 0.1(2.7921) + 0.3(10.4069)}{7} = -2.351$$

$$x_2^{2*} = x_2^1 + \lambda(x_2^2 - x_2^1)$$

$$x_2^{2*} = -4.2198 + 1.5(-2.351 - (-4.2198) = -1.4166$$

$$x_3^2 = \frac{71.4 - 0.3(2.7921) + 0.2(-1.4166)}{10} = 7.0279$$

$$x_3^{2*} = x_3^1 + \lambda(x_3^2 - x_3^1)$$

$$x_3^{2*} = 10.4069 + 1.5(7.0279 - 10.4069 = 5.338$$

$$x_1^2 = 3.1698 \to x_1^{2*} = 2.7921$$

$$x_2^2 = -2.351 \to x_2^{2*} = -1.4166$$

$$x_3^2 = 7.0279 \to x_3^{2*} = 5.338$$

$$Max\left|(x_1^{2*} - x_1^2),(x_2^{2*} - x_2^2),(x_3^{2*} - x_3^2)\right| \prec 0.001$$

$$Max\left|-1.133, 2.8032, -5.0639\right| \prec 0.001$$

$$5.0639 \neq \prec 0.001$$