الفصل الأول

الأخطاء

(1-1)مقدمة

هنالك مسائل عددية يمكن إيجاد الحلول المضبوطة لها بسهولة كما في المعادلة الآتية :-

$X^2+2x+1=0$

فتحل هكذا نوع أما بالدستور أو بالتحليل ، ولكن في الغالب ليس من السهل إيجاد الحلول المضبوطة للعدد من المسائل في المعادلات الجبرية ذات القوى الغير الصحيحة أو بعض المعادلات الغير الخطية مثل $x=\sin^2 x$ أو إيجاد قيمة التكامل للدوال المثلثية أو المثلثية العكسية والى أخره من الدوال التي يصعب إيجاد الحلول الرياضية لها.

وفي حياتنا العملية ليس من الضرورة اعتماد القيم المضبوطة دائما لحل المسائل الرياضية والهندسية حيث يمكن الاستفادة من القيم التقريبية لتلك المسائل لذلك فان الوسائل المستخدمة للإيجاد الحلول التقريبية تسمى (الخوارزمية).

لقد استخدمه كلمة خوارزمية في البداية للتعبير عن مجموعة من العمليات (الخطوات) التي تودي إلى الحل للعدد المنتهي من الخطوات وهذا النوع من الخوارزميات يسمى (الخوارزميات المنتهية).

تعاريف توضيحية

- **التحليل العددي:-** إن الموضوع المتعلق بدراسة الطرق المستخدمة لإيجاد الحلول العددية والنظريات المتعلقة بها تسمى التحليل العددي.

- **الحلول العددية:-** إن معظم الخوارزميات المصممة لحل مسائل معينة تسمح لنا لإيجاد الحل بأي دقة مطلوبة باستخدام عدد محدد من الخطوات لان دائما هذه الحلول تسمى بالحلول العددية.

- **الخوارزمية:-** بأنها مجموعة من التوجيهات للتنفيذ عمليات حسابية مهمة بشكل يودي إلى حل المسالة المعطى.

(2-1)أنواع الأخطاء

- **أخطاء الصياغة :-** عندما يراد تحليل مشكلة معينة بطريقة رياضية غالبا ما نأخذ نموذجا مبسطا يصف المشكلة الأساسية أي قد نهمل بعض العوامل والمؤثرات إذا رأينا أنها تبسط النموذج وفي نفس الوقت لا يوثر على المظهر الأساسي للمشكلة. إن النتائج التي نحصل عليها من النموذج المبسط هذا تكون عادة محملة بأخطاء تسمى(بأخطاء الصياغة).

- **أخطاء البتر:-** عندما تكون لدينا دالة معينة معرفة على شكل متسلسلة غير منتهية فان قيمة الدالة لا يمكن احتسابها باستخدام جميع حدود المتسلسلة بل نتوقف بعد حساب عدد محدد من الحدود، هذا التوقف يسبب خطا في قيمة الدالة يسمى بخطاء البتر لأنه يتم بتر سلسلة من العمليات الرياضية غير المنتهية.

- **أخطاء التراكمية:-** بعض الطرق العددية مثل الحلول العددية للمعادلات التفاضلية تتضمن تكرار مجموعة من العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة فان الخطأ في كل خطوة يزداد بالاعتماد على استخدام القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة مما ينتج عنه خطاء يسمى (بالخطأ التراكمي).

- **أخطاء الصلبية:-** في مختلف المسائل العلمية يتم الحصول على بيانات المسالة بالملاحظة أو القياس وبما إن الدقة في هاتين الحالتين محدودة ، لذا نرى إن هذه البيانات تعاني من الأخطاء فإذا أردنا قياس مسافة من خلال النظر أو الذراع فان القياسات لا بمكن أن تكون ألا بدقة محدودة إن التسمية لهذا النوع من الأخطاء تطلق أيضا على الأخطاء في البيانات من الأعداد الغير نسبية مثل

$\sqrt{2}=1.1414235.....$

$\pi=3.142857....$

$e^x=2.787.....$

- **أخطاء القطع والتدوير:-**إن واحد من أهم مصادر الأخطاء هو استعمال الأعداد المدورة بدل من الأعداد المضبوطة وتسمى هذه العملية بالتقريب ، حيث إن التقريب يقسم إلى قسميين هما:-

  - **تقريب التدوير:-** يعتمد على العدد المجاور للعدد الصحيح من جهة اليمين فإذا كان اكبر أو يساوي 5 نضيف واحد إلى الأمام وإذا كان اقل من 5 لا نجري أي تغير حيث إن الخطاء الناتج من تدوير عدد إلى عدد معين من الأرقام المميزة يسمى بخطاء التدوير.

  - **تقريب القطع:-** يقوم بقطع الرقم من جهة اليمين مهما كانت قيمتها حيث إن الخطاء الناتج من القطع عدد إلى عدد معين من الأرقام المميزة يسمى بخطاء القطع.

****ملاحظات****

☒ إن الآلات الحاسبة الالكترونية لا تدور الإعداد بالتقطعها وعليه فان الخطأ بالإعداد الناتجة يسمى بخطأ القطع وقيمته في معظم الحالات اكبر من خطأ التدوير.

☒ إذا لم يتم تحديد التقريب با أي طريقة فيتم تطبيق الحالتين على العدد.

****أمثلة****

مثال 1

إذا كان لديك الأرقام الآتية:-

أ- (5.1237) قرب هذا العدد إلى ثلاثة مراتب باستخدام أسلوب القطع مرة وأسلوب التدوير مرة ثانية.

الحل:-

أسلوب القطع $x^*=5.123$

أسلوب التدوير $x^*=5.124$

مثال 2

إذا كانت لديك المعلومات الآتية:- $f(x)=x^2-2x+1$ وقيمة $x=1.4273$

جد أ- الحل الحقيقي للدالة f(x)

ب- الحل التقريبي باستخدام القطع لثلاثة مراتب عشرية.

ت- الحل التقريبي باستخدام التدوير لثلاثة مراتب عشرية.

الحل :-

أ- $f(x=1.4273) = (1.4273)^2-2(1.4273)+1 = 0.18258529$

ب- $x = 1.4273 \longrightarrow x^* = 1.427$

$f(x^*=1.427) = (1.427)^2-2(1.427)+1$ فكانت النتيجة بالتقريب القطع 0.182329

ت- $x = 1.4273 \longrightarrow x^* = 1.427$

$f(x^*=1.427) = (1.427)^2-2(1.427)+1$ فكانت النتيجة بالتقريب التدوير 0.182329

(3-1)الخطأ المطلق والخطأ النسبي

1 الخطأ المطلق ويرمز له بالرمز A.E

$$A.E = \left| x - x^* \right|$$

2 الخطأ النسبي ويرمز له بالرمز R.E

$$R.E = \left| x - x^* \right| / x$$

مثال توضيحي:-
إذا كانت x=3.1492 قيمة حقيقة لدالة معينة وكانت $x^* = 3.1497$ هي قيمة تقريبا لنفس الدالة فجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي لقيمة x
الحل:-

$$A.E = \left| x - x^* \right|$$
$$A.E = \left| 3.1492 - 3.1497 \right| = \left| -0.0005 \right| = 0.0005$$

$$R.E = \left| x - x^* \right| / x$$
$$R.E = \left| 3.1492 - 3.1497 \right| / 3.1492 = 0.0015877$$

(4-1)انتشار الخطأ في العمليات الحسابية

إذا كانت x^* و y^* قيمتان تقريبيتان لكل من x و y على التوالي فان خطا المطلق والخطأ النسبي للعمليات الحسابية الأربعة تكون كالآتي:-

أ- عملية الجمع

$$y = y^* + ey \text{.....1}$$
$$x = x^* + ex \text{.....2}$$
$$x + y = 1 + 2$$
$$x + y = x^* + ex + y^* + ey$$
$$(x + y) = (x^* + y^*) + (e_x + e_y)$$
$$(x + y) - (x^* + y^*) = e_x + e_y$$
$$e_{x+y} = e_x + e_y$$
$$\delta_{x+y} = \frac{e_x + e_y}{x + y}$$

or

$$\delta_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x + y}$$

or

$$\delta_{x+y} = \frac{(x\delta_x + y\delta_y)}{x + y}$$
$$\delta_x = \frac{e_x}{x} \text{.....} \delta_y = \frac{e_y}{y}$$

حيث إن القانون المستخدم لحساب الخطأ المطلق والنسبي للعملية الجمع يكون كالأتي :-

$$e_{x+y} = e_x + e_y \qquad \delta_{x+y} = \frac{e_x + e_y}{x + y}$$

ب- عملية الطرح:-

$$y = y^* + ey \text{.....1}$$

$$x = x^* + ex \text{.....2}$$

$$x - y = 2 - 1$$

$$x - y = x^* + ex - (y^* + ey)$$

$$(x - y) = x^* + e_x - y^* - e_y$$

$$(x - y) = (x^* - y^*) + (e_x - e_y)$$

$$(x - y) - (x^* - y^*) = e_x - e_y$$

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

$$\delta_{x+y} = \frac{e_x - e_y}{x - y}$$

or

$$\delta_{x+y} = \frac{e_{x-y}}{x - y}$$

or

$$\delta_{x+y} = \frac{(x\delta_x - y\delta_y)}{x - y}$$

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} \text{.....} \delta_y = \frac{e_y}{y}$$

حيث إن القانون المستخدم لحساب الخطأ المطلق والنسبي للعملية الطرح يكون كالأتي :-

$$e_{x-y} = e_x - e_y$$

$$\delta_{x-y} = \frac{e_x - e_y}{x - y}$$

ت- عملية الضرب:-

$$e_{x.y} = xy - x^* y^*$$

$$e_{x.y} = x.y - \left[(x - e_x)(y - e_y)\right]$$

$$e_{x.y} = xy - xy + xe_y + ye_x - e_x e_y$$

$$e_{xy} = xe_y + ye_x$$

$$\delta_{xy} = \frac{e_{xy}}{xy} = \frac{xe_y}{xy} + \frac{ye_x}{xy}$$

or

$$\delta_{xy} = \frac{e_y}{y} + \frac{e_x}{x}$$

or

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$$

حيث إن القانون المستخدم لحساب الخطأ المطلق والنسبي للعملية الضرب يكون كالأتي :-

$$e_{xy} = xe_y + ye_x$$

$$\delta_{xy} = \frac{e_y}{y} + \frac{e_x}{x}$$

د- عملية القسمة:-

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*}$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \frac{x - e_x}{y - e_y}$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \frac{x - e_x}{y} - \left[\frac{1}{1 - \frac{e_y}{y}}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\frac{e_y}{y} = 1 + \frac{e_y}{y} + (\frac{ey}{y})^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

وبإهمال الحدود الحاوية على حاصل ضرب خاطئين أو أكثر نحصل على الحد الأتي:-

$$\frac{1}{1 - \frac{e_y}{y}} = 1 + \frac{e_y}{y}$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x - e_x}{y}\right) - \left(1 + \frac{e_y}{y}\right)$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x - e_x}{y}\right) - \left(\frac{xe_y - e_x e_y}{y^2}\right)$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x - e_x}{y}\right) - \left(\frac{xe_y}{y^2}\right)$$

$$e\frac{x}{y} = \frac{x}{y} - \frac{x}{y} + \frac{e_x}{y} - \frac{xe_y}{y^2}$$

$$e\frac{x}{y} = \frac{e_x}{y} - \frac{xe_y}{y^2}$$

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{1}{y}\left[e_x - \frac{xe_y}{y}\right]$$

$$\delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x - \delta_y$$

حيث إن القانون المستخدم لحساب الخطأ المطلق والنسبي للعملية القسمة يكون كالأتي :-

$$e\frac{x}{y} = \frac{1}{y}\left[e_x - \frac{xe_y}{y}\right]$$

$$\delta\frac{x}{y} = \delta_x - \delta_y$$

أمثلة

مثال1

إذا كانت لديك المعلومات الآتية :-

$X^*=3.68$ $X=3.675$

$Y^*=2.133$ $Y=2.1325$

- جد الخطأ المطلق والخطأ النسبي لكل من x, y.
- الخطأ المطلق والنسبي للحاصل عملية الجمع.
- الخطأ المطلق والنسبي للحاصل عملية الطرح.

الحل :-

$$1-AE(x)=|3.675-3.68|=0.005$$

$$AE(y)=|2.1325-2.133|=0.0005$$

$$RE(x)=\frac{0.005}{3.675}=0.0013605$$

$$RE(y)=\frac{0.0005}{2.1325}=0.8002344$$

$$2-e_{x+y}=e_x+e_y$$

$$e_{x+y}=0.005+0.0005=0.0055$$

$$\delta_{x+y}=\frac{e_x+e_y}{x+y}$$

$$\delta_{x+y}=\frac{0.0055}{5.8075}=0.000947$$

$$3-e_{x-y}=e_x-e_y$$

$$e_{x-y}=0.005-0.0005=0.0045$$

$$\delta_{x-y}=\frac{e_{x-y}}{x-y}$$

$$\delta_{x-y}=\frac{0.0045}{3.675-2.1325}=0.00291$$

مثال 2

إذا كانت لديك المعلومات الآتية :-

X=25.019992

Y=25.21132

جد الخطأ المطلق والخطأ النسبي لكل من x, y للعمليات الرياضية الأربعة.

بعد تقريب المتغيرات إلى أربع مراتب عشرية باستخدام القطع.

الحل :-

$X=25.019992$ $X^{*}=25.0199$

$Y=25.21132$ $Y^{*}=25.2113$

الخطأ المطلق

$$e(x)=|25.019992-25.0199|=0.000092$$

$$e(y)=|25.21132-25.2113|=0.00002$$

$$e(x+y)=ex+ey$$

$$e(x+y)=0.000092+0.00002=0.000112$$

$$e(x-y)=ex-ey$$

$$e(x-y)=0.000092-0.00002=0.000072$$

$$exy=xey+yex$$

$$exy=25.019992*0.00002+25.21132*0.000092=0.00281984$$

$$ex/y=1/y(ex-xey/y)$$

$$ex/y=1/25.21132(0.000092-(25.019992)(0.00002)/25.21132$$

$$ex/y=0.000002861$$

الخطأ النسبي

$$\delta(x)=ex/x$$

$$\delta(x)=0.000092/25.019992=0.000003677$$

$$\delta(y)=ey/y$$

$$\delta(y)=0.00002/25.21132=0.000000793$$

$$\delta(x+y)=ex+ey/x+y$$

$$\delta(x+y)=0.000092+0.00002/25.019992+25.21132=0.000002229$$

$$\delta(x-y)=ex-ey/x-y$$

$$\delta(x-y)=0.000092-0.00002/25.019992-25.21132=-0.000376317$$

$$exy=ey/y+ex/x$$

$$exy=0.00002/25.21132+0.000092/25.019992=0.00000447$$

واجبات

الواجب 1

إذا كانت لديك الدالة الآتية $x=2.1345$ $f(x)=3x^2-7x+1$ جد كل مما يأتي:-

1- الحل الحقيقي.

2 الحل التقريبي باستخدام القطع لثلاثة مراتب عشرية.

3 الحل التقريبي باستخدام التدوير لمرتبتين عشريتين.

4 الخطأ المطلق والخطأ النسبي لكل من النقطة 2 , 1.

الواجب 2

إذا كانت لديك الدالة الآتية $x=4.1357$ $f(x)=2x^2+4x-1$ جد كل مما يأتي:-

1 الحل الحقيقي.

2 الحل التقريبي باستخدام التدوير لمرتبتين عشريتين

3 الخطأ النسبي لـx

الواجب 3

إذا كانت لديك الدالة القيمة $x^*=0.855$ $x=0.8$

$y^*=0.259$ $y=0.2$

1 جد الخطأ المطلق x,y

2. جد الخطأ النسبي x,y

3 جد الخطأ المطلق للعملية الجمع.

4 اذكر قانون الخطأ النسبي للعملية الطرح.