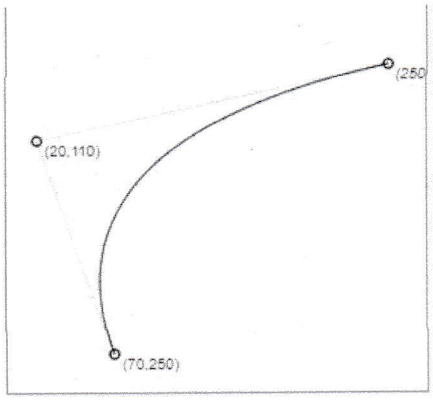
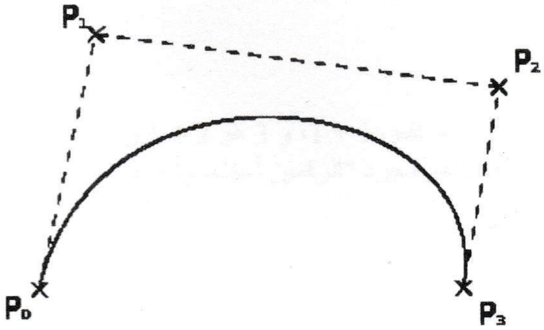
Mr. Ahmed A. Mostfa. mostfa@uohamdaniya.edu.iq.

منحنى بيزيير هو منحنى حدودي تستخدم في كثير من الأحيان في رسومات الحاسوب والمجالات ذات الصلة . يتم استخدام منحنيات بيزيير لنموذج منحنيات سلسة التي يمكن تحجيمها كيفما نريد

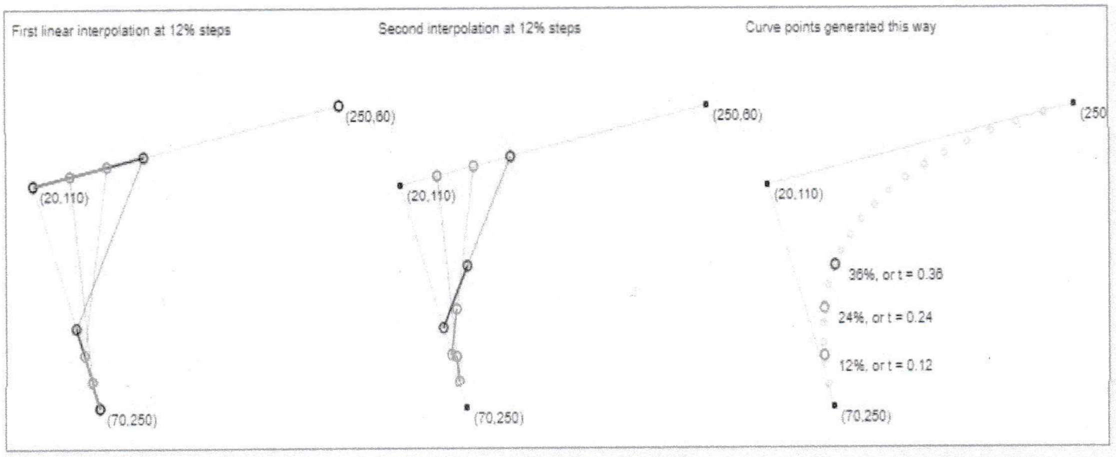




المنحني مسيطر عليه من قبل نقاط تحكم. نقاط التحكم تستخدم للتلاعب بالمنحنى بشكل حدسي. وهي تعمل من نقطة بداية معينة إلى نقطة نهاية معينة، مع تأثر انحنائها بنقطة تحكم واحدة أو أكثر. وتستخدم هذه المنحنيات كثيرا في تصميم بمساعدة الكمبيوتر (كاد / كام) التطبيقات، وكذلك في برامج التصميم الجرافيكي مثل أدوبي المصور وفوتوشوب.

ويعرف منحنى بيزير بمجموعة من نقاط التحكم من P0 إلى Pn، حيث يطلق n على ترتيبه (n = 1 للخطي، n=2 للتربيعية، إلخ). نقاط التحكم الأولى والأخيرة هي دائما النقاط النهائية والبداية للمنحنى.

رسم منحنى من الدرجة الثانية



Linear Interpolation leading to Bézier curves

منحنيات بيزيير هو أنه يمكن وصفها على حد سواء من حيث الحدودية،(polynomial functions). المنحنيات بيزيير هي متعددو الحدود من t، مع قيمة ل t ثابتة بين 0 و 1، مع معاملات P (المعاملات هي نقاط السيطرة)

$$linear = (1-t) + t$$ → • 2-points curve

$$square = (1-t)^2 + 2\cdot(1-t)\cdot t + t^2$$ → • Three points

$$cubic = (1-t)^3 + 3\cdot(1-t)^2\cdot t + 3\cdot(1-t)\cdot t^2 + t^3$$ → • Four points

إذا قمنا بإزالة t الأشياء تبدو فجأة سهلة جدا. تحقق من هذه المصطلحات ثنائية الحدود:

$$
\begin{aligned}
linear &= 1+1 \\
square &= 1+2+1 \\
cubic &= 1+3+3+1 \\
hypercubic &= 1+4+6+4+1
\end{aligned}
$$

لاحظ أن 2 هو نفس 1 + 1، و 3 هو 2 + 1 و 1 + 2، و 6 هو 3 + 3 ... ، وببساطة بداية ونهاية المعادلات هي 1، وكل شيء بينهما هو مجرد "الرقمين أعلاه، وأضاف معا". الآن هذا من السهل أن نتذكر. كذلك ان :

Linear Bezier Curve→ 2 control point

quadratic Bézier curve → 3 control point

cubic Bézier curve→ 4 control point

المعادلة العامة لمنحني بيزير هي

$$Q(t) = (t) = \sum_{i=0}^{n} P(i) * Bi,n(t) \qquad 0 < t \leq t$$

n: polynomial degree

i: is the index.

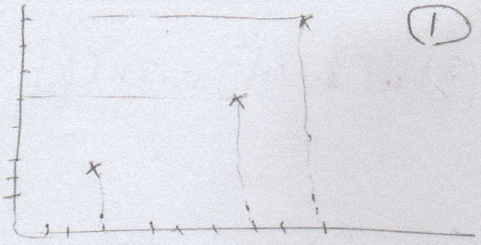
$$Bi,n(t) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{binomial term}} \cdot \underbrace{(1-t)^{n-i} \cdot t^{i}}_{\text{polynomial term}}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{!n}{!i\,(n-i)}$$

Example: $\binom{3}{2} = \frac{!3}{!2(3-2)!} = \frac{3*2*1}{2*1\,(1!)} = \frac{3}{1} = 3$

Note: $!0 = 1$

Mr. Ahmed A. Mostfa. mostfa@uohamdaniya.edu.iq.



1

Ex: 2

$P_0 (3, 2)$

$P_1 (7, 5)$

$P_2 (9, 9)$

$P_3 (13, 7)$

الحل since we have 4 control then $n = 3$

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u) \qquad 0 \le u \le 1$$

$$= \sum_{0}^{3} P_i B_{i,3}(u)$$

$$= P_0 B_{0,3}(u) + P_1 B_{1,3}(u) + P_2 B_{2,3}(u) + P_3 B_{3,3}(u)$$

نكتب كل نقطة
بشكل x, y

$$X(u) = X_0 B_{0,3}(u) + X_1 B_{1,3}(u) + X_2 B_{2,3}(u) + X_3 B_{3,3}(u)$$
$$y(u) = y_0 B_{0,3}(u) + Y_1 B_{1,3}(u) + X_2 B_{2,3}(u) + X_3 B_{3,3}(u)$$

ملاحظة

$$B_{0,3}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

$$= \binom{3}{0} u^0 (1-u)^3 \Rightarrow (1-u)^3$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{\cancel{3 \times 2 \times 1}}{1(\cancel{3 \times 2 \times 1})} = 1$$

2

$$B_{1,3}(u) = \binom{3}{1} u^1 (1-u)^2 = 3u(1-u)^2$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3\times\cancel{2\times1}}{\cancel{2\times1}} = 3$$

$$B_{2,3}(u) = \binom{3}{2} u^2 (1-u)^1 = 3u^2(1-u)$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(1!)} = \frac{3\times\cancel{2\times1}}{\cancel{2\times1}} = 3$$

$$B_{3,3}(u) = \binom{3}{3} u^3 (1-u)^0 = u^3$$

$$\frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3\times2\times1}{3\times2\times1(0!)} = 1$$

اعادة كتابة المعادلة من جديد بعد تعويض

$$\therefore x(u) = x_0(1-u)^3 + x_1 * 3u(1-u)^2 + x_2 \cdot 3u^2(1-u) + x_3 \cdot u^3$$

$$y(u) = y_0(1-u)^3 + y_1 \cdot 3u(1-u)^2 + y_2 \cdot 3u^2(1-u) + x_3 \cdot u^3$$

$$- x(u) = 3(1-u)^3 + 21u(1-u)^2 + 27u^2(1-u) + 13u^3$$

$$- y(u) = 2(1-u)^3 + 15u(1-u)^2 + 27u^2(1-u) + 7u^3$$

تعويض بنقاط السيطرة P_0, P_1, P_2, P_3

Mr. Ahmed A. Mostfa. mostfa@uohamdaniya.edu.iq.

3

(u)	X(u)	y(u)
0	3	2
0.2	11.73	3.86
0.4	7.694	5.632
0.6		
0.8		
1		

$$x(0) = 3(1-0)^3 + 21.0(1-0)^2 + 27.(0)^2.(1-0) + 13.(0)^3$$
$$= 3 + 0 + 0 + 0 = 3$$

$$y(0) = 2(1-0)^3 + 15.0(1-0)^2 + 27(0)^2(1-0) + 7.(0)^3$$
$$2 + 0 + 0 + 0 = 2$$

$$x(0.2) = 3(1-0.2)^3 + 21*0.2(1-0.2)^2 + 27*(0.2)^2(1-0.2) + 13.(0.8)^3$$
$$= 1.536 + \overset{2.688}{\cancel{0.64*4.2}} + 0.864 + 6.65$$
$$= 11.7$$

Mr. Ahmed A. Mostfa. mostfa@uohamdaniya.edu.iq.

4

$$y(0.2) = 2(1-0.2)^3 + 15\cdot 0.2(1-0.2)^2 + 27\cdot(0.2)^2(1-0.2) + 7\cdot(0.2)^3$$

$$= 1.024 + 1.92 + 0.864 + 0.056$$

$$= 3.864$$

$$X(0.4) = 3(0.6)^3 + 21\cdot(0.4)(0.6)^2 + 27(0.4)^2(0.6) + 13(0.4)^3$$

$$= 0.648 + 3.024 + 2.59 + 0.832$$

$$= 7.094$$

$$y(0.4) = 2(0.6)^3 + 15(0.4)(0.6)^2 + 27(0.4)^2(0.6) + 7(0.4)^3$$

$$0.432 + 2.16 + 2.592 + 0.448 =$$

باقي تكملة
مجرد تعويضات

$x(0.6) =$ ---
$y(0,6) =$ ---

$x(0.8) =$ ---
$y(0.8) =$ ---

$x(1) =$ ---
$y(1) =$ ---

مثال على استخدام مباشر للمعادلات بدون تحليل للمعادلة الاصلية:

فرضاً اننا نريد ان نرسم منحنى مكعب يبدأ من (120،160)، يسيطر عليه (35،200) و (220،260) وينتهي عند (220،40)،

الحل:

نستخدم هذا المنحنى بيزيه:

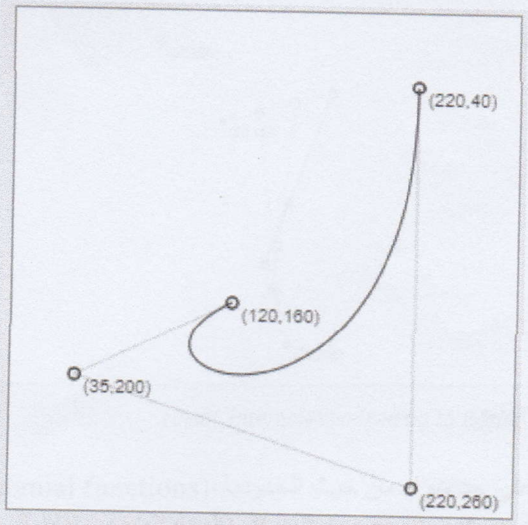
$$\begin{cases} x = 120 \cdot (1-t)^3 + 35 \cdot 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 220 \cdot 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 + 220 \cdot t^3 \\ y = 160 \cdot (1-t)^3 + 200 \cdot 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t + 260 \cdot 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 + 40 \cdot t^3 \end{cases}$$

ولرسم المنحني , نفرض نقاط لــ t تبدا من 0 وتتزايد الى الـ 1

$$0 < t \le 1$$

t	x	y
0		
0.2		
0.4		
0.6		
0.8		
1		

والذي سيعطينا المنحنى:



Our cubic Bézier curve

Homework: control points are (0, 0), (0.5, 1) and (1, 0)