1-1الاستقراء الرياضي Mathematical Induction

الاستقراء : هو احد انواع البراهان الرياضي يستخدم عاده لبرهنه قانون رياضي او معادله رياضيه لمجموعه لا نهائيه من الاعداد

المبدأ الاساسي للاستقراء الرياضي لأي عدد صحيح n يتم على مرحلتين :-

- اذا كان الاستقراء الرياضي صحيح لاي عدد معطى عندما n=1 اذا سيكون الاثبات صحيح للقيمه التي تليها وهي n=2
- اذا كان الاثبات صحيح لبعض قيم n مثلا n=k فالاستقراء يكون صحيحا للقيمه التي تليها وهيn=k+1

لاثبات صحه عبارة الاستقراء الرياضي نتبع الخطوات الاتيه :-

1. نثبت قيمه n للطرفين انها صحيحه
2. نفرض قيمه n=k للطرفين انها صحيحه
3. نثبت قيمه n=k+1 للطرفين انها صحيحه

مثال 1 : برهن صحة الاستقراء الرياضي للعباره الاتيه (نبدا بالحل في الطرف الايمن واستخراج النتيجه مساويه للطرف الايسر) $1+2+3+\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

الحل:

1. $1 = \frac{1(1+1)}{2} \quad = \quad n=1 \qquad\qquad \frac{n(n+1)}{2}$

الطرف الايمن = الطرف الايسر=1 اذن الاستقراء صحيح ونكمل الحل

2. $n=k \qquad 1+2+3+\ldots\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ ……………………………………… 1
3. $n=k+1 \qquad 1+2+3+\ldots\ldots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$ …………………… 2

بطرح المعادله (1) من المعادلة (2)

$$1+2+3+\ldots\ldots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

$$-$$

$$1+2+3+\ldots\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

باجراء الطرح للمعادلات اعلاه

$$K+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$$

$$K+1 = \frac{(k^2+2k+k+2)}{2} - \frac{k^2+k}{2}$$

$$K+1 = \frac{(k^2+3k+2-k^2-k)}{2}$$

$K+1=\frac{2k+2}{2}=\frac{2(k+1)}{2}$

$K+1=k+1$

اذن الطرف الايمن = الطرف الايسر والاستقراء صحيح

الحل بطريقه اخرى

$1+2+3+\ldots\ldots.+n=\frac{n(n+1)}{2}$

الحل:

1. n=1

$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1$

الطرف الايمن = الطرف الايسر =1

2. n=k

$1+2+3+\ldots\ldots..+k=\frac{k(k+1)}{2}$ 1

3. n =k+1

$1+2+3+\ldots\ldots..+k+k+1=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$........................2

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+(2k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

ويساوي الطرف الايمن $\frac{(k+2)(k+1)}{2}$

مثال 2 : برهن صحة الاستقراء الرياضي للعباره الاتية $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots.+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

n =1 $1^2=\frac{1(1+1)(2*1+1)}{6}$ $1=\frac{1(2)(3)}{6}=\frac{6}{6}=1$

الطرف الايسر = الطرف الايمن =1

1. **n=k**

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots.+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 1

2. **n=k+1**

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots.+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$ 2

بطرح المعادله الاولى من المعادله الثانيه

$(k+1)^2 = \frac{k+1(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} =$

$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} - \frac{(k^2+k)(2k+1)}{6} =$

$\frac{(k^2+2k+k+2)(2k+3)}{6} - \frac{(2k^3+k^2+2k^2+k)=}{6}$

$\frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6} - \frac{(2k^3+3k^2+k)=}{6}$

$\frac{(2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6)-(2k^3+3k^2+k)}{6} =$

$\frac{(2k^3+9k^2+13k+6-2k^3-3k^2-k)}{6} = \frac{(6k^2+12k+6)}{6} = \frac{6(k^2+2k+1)}{6}$

$k^2 + 2k + 1 = (k+1)(k+1) = (k+1)^2$

اذن الطرف الايمين = الطرف الايسر ويساوي $(k+1)^2$

الحل بطريقه اخرى

برهن صحة الاستقراء الرياضي للعباره الاتية

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. $n=1$ $\quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6}$

$1 = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$

الطرف الايسر = الطرف الايمن = 1

2. 2. $n=k$

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

3. $n=k+1$

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k+1(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$

$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} =$

$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} =$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k)+6(k+1)}{6}=$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=$$

$$\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}$$

اذن الطرف الايسر = الطرف الايمن $\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=$

2-1 المنطق الرياضي Mathematical Logic

المنطق : هلو العلم لذي يبحث عن الاشياء الصحيحه لتفسير الاشياء والظواهر واعتماد على الحقائق الخارجيه ودراسة المنطق الرياضي تساعد على درس العبارات والقضايا المنطقيه ومناقشه الشروط التي تجعل القضيه المعينه صادقه او كاذبه فيما يخص مبادئ معينه

والعبارات المنطقيه تعتمد على حالتين متضادتين هما الصحه والخطأ (الصدق والكذب) (Truth ,False) اذ ان اي عباره منطقيه تكون اما صحيحه او خاطئه في لحظه معينه ولايمكن ان تكون صحيه وخاطئه في ان واحد

- ملاحظه : الجمل الاستفهاميه, جملة الامر والجمله التي تحتوي على مجهول لا تعد عباره منطقيه

- **العباره المنطقيه البسيطه Simple Logic Statement**: تعرف على انها جمة خبريه ذات مدلول ومعنى وتكون اما صادقة واما كاذبه ولا يجوز ان تكون صادقه وكاذبه في ان واحد ويقال عن ايه عباره بانها منطقيه بسيطه اذا استحال الحصول على عباره منطقيه اخرى لاي جزء من اجزائها

امثلة عن عبارات منطقيه بسيطه

- بغداد عاصمة العراق
- ميسان محافظه في شمال العراق
- 12=9+5
- البصره مدينه عراقيه صامده

امثله عن عبارات غير منطقيه

- اين تقع جامعة الحمدانيه؟
- 8=K+7
- اجمع العدد (20) مع العدد (12)

- **العبارات المنطقيه المركبه Compound Logic Statement**: يمكن ربط اي عبارتين منطقيتين بسيطتين باداة ربط معينه لتكوين عباره منطقية جديده ويطلق على العباره المنطقيه الناتجه عباره منطقيه مركبه كما يمكن ربط عبارتين منطقيتين مركبتين باداة ربط لاجل الحصول على عباره منطقيه مركبه من اكثر من عبارتين منطقيتين بسيطتين

امثله عن العبارات المركبه

- العدد فردي 3 او العدد 3 زوجي
- ابن سينا عالم عربي والخوارزمي عالم رياضي
- اذا كانت باريس عاصمه فرنسا فأن الشمس تطلع في الليل
- الماء يتجمد في درجه الصفر المئوي اذا وفقط اذا وجدت حياة على كوكب المريخ

3-1 ادوات الربط

1. اداة الربط (و) $\wedge$, and, (Conjunction) : يمكن ربط ايه عبارتين بسيطتين بالحرف (و) لتكوين عباره منطقيه مركبه

امثله عن العبارات المنطقيه المركبه الناتجه من استخدام (و)

- الرمان حلو والليمون حامض
- الولد ذكي و اخته ذكية
- الجو بارد والشمس مشرقه
- تقع محافظه بغداد على نهر دجله و تقع محافظه اربيل شمال العراق
- تقع محافظه البصره في شمال العراق و (3=5)

للتعبير عن ربط العبارات المنطقيه رياضيا نفرض ان كلا من p,q عباره منطقيه بسيطه ويرمز للعباره المركبه (p وq) وتكتب بهذا الشكل $p \wedge q$

P	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2. اداة الربط (او) $\vee$, or (Disjunction): يمكن ربط ايه عبارتين بسيطتين بالحرف (أو) لتكوين عباره منطقيه مركبه

امثله عن العبارات المنطقيه المركبه الناتجه من استخدام (أو)

- الرمان حلو أوالليمون حامض
- الولد ذكي أو اخته ذكية
- الجو بارد أوالشمس مشرقه
- تقع محافظه بغداد على نهر دجله أوتقع محافظه اربيل شمال العراق
- تقع محافظه البصره في شمال العراق أو (3=5)

للتعبير عن ربط العبارات المنطقيه رياضيا نفرض ان كلا من p,q عباره منطقيه بسيطه ويرمز للعباره المركبه (pأوq) وتكتب بهذا الشكل $p \vee q$

P	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3. **اداه الربط (النفي) ~ :** نستطيع نفي اي عباره منطقيه معطاة فاذا كانت هذه العباره صادقة فان نفيها يصبح عباره منطقيه كاذبه وبالعكس اذا كانت عباره منطقيه كاذبه فان نفيها يصبح عباره منطقيه صادقة

<u>امثلة عن عبارات منطقيه مع نفيها</u>

- الجو بارد		النفي		الجو غير بارد / الجو حار
- الشمس مشرقه		النفي		الشمس غير مشرقه
- (3+2) تساوي 4		النفي		(3+2) لاتساوي 4

اذا كانت p عباره منطقيه صادقه فان ~p يكون عباره منطقيه كاذبه والعكس عكسه اي(~p)~ يكون عباره منطقيه صادقة

P	~p
T	F
F	T

<u>مثال 3:</u> اذا كانت (p) هي عبارة الجو بارد

اذا كانت (q) هي عبارة الجو ممطر

<u>عبر عن كل العبارات الاتيه مستخدما الرموز</u>

الجو حار	$\sim p$
الجو غير ممطر	$\sim q$
الجو بارد والجو ممطر	$p \wedge q$
الجو بارد وغير ممطر	$p \wedge \sim q$
الجو حار والجو ممطر	$\sim p \wedge q$
الجو حار والجو غير ممطر	$\sim q \wedge \sim p$
الجو بارد أوالجو ممطر	$p \vee q$
الجو بارد أوغير ممطر	$p \vee \sim q$
الجو حار أوالجو ممطر	$\sim p \vee q$
الجو حار أوالجو غير ممطر	$\sim q \vee \sim p$

<u>مثال 4:</u> اذا كانت (p) هي عبارة الجو بارد

اذا كانت (q) هي عبارة الجو ممطر

<u>اكتب وصفا لكل من العبارات الرمزيه التاليه :</u>

$p \vee q$	الجو بارد أوالجو ممطر
$p \vee \sim q$	الجو بارد أوالجو غير ممطر
$\sim p \vee q$	الجو حار أوالجو ممطر
$\sim p$	الجو حار
$\sim q$	الجو غير ممطر
$p \wedge q$	الجو بارد والجو ممطر
$p \wedge \sim q$	الجو بارد وغير ممطر

مثال 5: اكتب جدول الصدق للعباره التاليه : $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$

p	q	p ∨ q	q ∧ p	(p ∨ q) ∧ (p ∧ q)
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	F

مثال 6: اكتب جدول الصدق للعباره التاليه : $\sim(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \wedge q)$

p	q	~P	~p ∨ q	~(~p ∨ q)	~p ∧ q	~(~p ∨ q) ∧ (~p ∧ q)
T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	F

مثال 7: اكتب جدول الصدق للعباره الاتيه: $(p \wedge q) \vee (q \vee s)$

p	q	s	p ∧ q	q ∨ s	(p ∧ q) ∨ (q ∨ s)
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F

❖ ملاحظه : عدد الاحتمالات في الجدول = 2^n حيث n هو عدد القضايا

4. **اداة الربط if :** تستعمل اداه الربط الشرطيه if ….. then لربط بين اي عبارتين منطقيتين بسيطتين لاجل تكوين عباره منطقيه مركبه جديده (وتسمى العبارات الناتجه بالعبارات الشرطيه)

امثله عن العبارات المنطقيه المركبه الناتجه من استخدام اداة الربط الشرطيه (اذا ...... فان) لربط عبارتين منطقيتين بسيطتين

❖ اذا كانت دمشق عاصمه القطر السوري فأن بغداد عاصمه القطر العراقي
❖ اذا كان 7+3= 10 فأن محافظه الموصل تقع في شمال العراق

للتعبير عن ربط العبارات المنطقيه البسطه باستخدام اداة الربط الشرطيه (اذا ..... فان) نفرض ان كلا من p,q عباره منطقيه بسيطه ويرمز للعباره المنطقيه الشرطيه (اذا p فان q) وتكتب بهذا الشكل $p \to q$ وتقرا بالشكل الاتي اذا كان p فان q

- تكون العباره المنطقيه المركبه $p \to q$ كاذبه في حاله واحده وهي عندما تكون العباره p صادقه والعباره q كاذبه

P	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

❖ ملاحظه : ان العباره المركبه $q \to p$ تختلف عن العباره المركبه $p \to q$ كما موضح في الجدول ادناه

p	q	$p \to q$	$q \to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

التعابير التاليه تعطي نفس المعنى :

➢ اذا كانت pفان q
➢ p تؤدي الى q
➢ p تقتضي q
➢ pهي شرط كافي لل q
➢ q هي شرط ضروري الى p
➢ qتستنتج من p

مثال 8: اكتب جدول الصدق للعباره الاتيه $(p \to q) \wedge (\sim p \to \sim q)$

p	q	~p	~q	$p \to q$	$\sim p \to \sim q$	$(p \to q) \wedge (\sim p \to \sim q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

مثال 9 : اكتب جدول الصدق للعباره الاتيه $\sim p \to q \vee s$

p	q	s	~p	$q \vee s$	$\sim p \to q \vee s$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

5. **اذا وفقط اذا iff**: تستعمل اداه الربط الشرطيه الثنائيه لربط بين اي عبارتين منطقيتين بسيطتين لاجل تكوين عباره منطقيه مركبه جديده (وتسمى العبارات الناتجه بالعبارات الشرطيه الثنائية)

امثله عن العبارات المنطقيه المركبه الناتجه من استخدام اداة الربط الشرطيه الثنائية (اذا وفقط اذا) لربط عبارتين منطقيتين بسيطتين

- الماء يغلي اذا وفقط اذا بلغت درجة حرارته المؤيه 100 مئويه
- البصره محافظه في شمال العراق اذا وفقط اذا الموصل محافظه في العراق
- 3+7= 10 اذا وفقط اذا 44>250

للتعبير عن العبارات الثنائيه الشرط في المنطق الرياضي باستخدام اداة الربط الشرطيه الثانية (اذا وفقط اذا) نفرض ان كلا من p,q عباره منطقيه بسيطه ويرمز للعباره المنطقيه المركبه (P اذا وفقط اذا q) وتكتب بهذا الشكل $p \leftrightarrow q$

- تكون العباره المركبة $q \leftrightarrow p$ صادقه عندما تكون قيمه صدق العباره p تساوي قيمه صدق العباره q وماعدا ذلك كاذبه

P	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

التعابير التاليه تعطي نفس المعنى :

- اذا P فان q وبالعكس
- P اذا وفقط اذا q
- qاذا وفقط اذا p
- P هي شرط ضروري وكاف الى q
- P هي شرط كافي ال q

العباره المركبه $p \leftrightarrow q$ تعني ما يلي $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ كما موضح في الجدول التالي :

p	q	$p\rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p\rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

1-4 القضايا المنطقيه (Logical Propositions) يمكننا استخدام اداوت الربط لربط اكثر من عبارتين منطقيتين بسيطتين فنحصل على ما يطلق عليه في المنطق بالقضيه

ليكن لدينا عبارات منطقيه (r,p,q) ولنفرض انها متغيره يطلق على العبارات المركبه منها قضيه ويرمز لها بالرمز (P(p,q,r وتعني القضيه المبنيه من العبارات p,q,r

وعليه يمكن القول ان كلا من العبارات المركبه ادناه قضيه

$[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$,

$(p \wedge q \vee r)$,

$(p \wedge q) \vee (\sim q \vee p)$

ان قيم صدق القضيه تعتمد على قيم صدق العبارات المنطقيه المكونه لها وعلى اداوت الربط المستخدمه في تركيبها واذا كانت لدينا القضيه (P(p,q,r مكونه من n من العبارات المنطقيه البسيطه فان قيم صدق هذه العباره تستنتج من 2^nمن الحالات

مثال 10 : ما قيم صدق القضيه التاليه : $p \vee (\sim p \wedge q)$

p	q	~p	~p ∧ q	p∨ (~p ∧ q)
T	T	F	F	**T**
T	F	F	F	**T**
F	T	T	T	**T**
F	F	T	F	**F**

مثال 11 : ما قيم صدق القضيه التاليه : $p \wedge (\sim q \vee r)$

p	q	r	~q	~q ∨ r	p ∧ (~q ∨ r)
T	T	T	F	T	**T**
T	T	F	F	F	**F**
T	F	T	T	T	**T**
T	F	F	T	T	**T**
F	T	T	F	T	**F**
F	T	F	F	F	**F**
F	F	T	T	T	**F**
F	F	F	T	T	**F**

1−5 التكافؤ المنطقي: لتكن كل من P(p,q,r) و Q(p,q,r) قضيه منطقيه , يقال انهما متكافئتين منطقيا اذا وفقط اذا كان جدول صدق القضيه الاولى هو نفسه جدول صدق القضيه الثانيه ويرمز للتكافؤ المنطقي للقضيتين P , Q كالاتي

$P \equiv Q$ وتقرا (P تكافئ Q منطقيا)

مثال 12 : لتكن كلا من P,Q, قضيه بحيث ان $Q : \sim p \vee q$, $P: p \rightarrow q$ فان $P \equiv Q$

اي ان $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ويمكن ملاحظه ذلك من خلال جدول الصدق التالي

p	q	~p	~p ∨ q	p → q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

و هذا يعني ان $p \rightarrow q$ تكافئ منطقيا $\sim p \vee q$

مثال 13: اثبت ان $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

p	q	p ∨ q	~(p ∨ q)	~p	~q	~p ∧ ~q
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

اذن القضيتين متكافأ منطقيا

1− 6 القضايا الصادقه منطقيه والقضايا الكاذبه منطقيا

1-6-1 عبارة تحصيل حاصل (Tautology Statement): اذا كانت العباره المنطقيه المركبة صادقة دائما بغض النظر عن قيم صدق العبارات المكونه لها فتسمى بالعباره الصادقه منطقيا او تحصيل حاصل او تتولوجي ويمكن القول بأنها قضيه صادقه منطقياً.

مثال 14 : $\sim p \vee p$ هي تحصيل حاصل

P	~p	p ∨ ~p
T	F	T
F	T	T

مثال 15 : اثبت ان القضيه $(q \vee p) \leftrightarrow (p \vee q)$ هي تحصيل حاصل

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
T	T	T	T	**T**
T	F	T	T	**T**
F	T	T	T	**T**
F	F	F	F	**T**

اذن القضيه هي تحصيل حاصل

1-6-2 عباره التناقض Contradictions : اذا كانت العباره المنطقيه المركبه كاذبه دائما بغض النظر عن قيم صدق العبارات المكونه لها فتسمى بالعباره المتناقضه منطقيا او عباره التناقض

P	~p	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

1– 7 جبر العبارات (Algebra of statements): هو مجموعه من القوانين التي سوف تستخدم في تبسيط العبارات المنطقيه والقضايا الجبريه الى ابسط صوره ممكنه

• الابدال $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	• التجميع $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
• التوزيع $(p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ $p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	• قانون لنومو $p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
• المحايد $p \vee T \equiv T$ $p \vee F \equiv p$ (حسب قيمه p صحيحه او خاطئه) $p \wedge T \equiv p$ (حسب قيمه p صحيحه او خاطئه) $p \wedge F \equiv F$	• المتمم $p \vee \sim p \equiv T$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $\sim T \equiv F$ $\sim F \equiv T$ $\sim(\sim P) \equiv (P)$

- قوانين ديموركان

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

- قانون الامتصاص

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

- الاقتضاء المزدوج

$p \leftrightarrow q \equiv p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$

- $p \wedge p \equiv p$
- $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$
- $p \wedge q \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$
- $(p \sim\rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
- $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
- $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
- $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \leftrightarrow \sim q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

مثال 16: برهن صحه العباره باستخدام جدول الصدق $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

اذن العباره المنطقيه متكافئه

مثال 17: برهن صحه العباره الاتيه باستخدام جبر القضايا

$\sim p \wedge (\sim q \wedge R) \vee (q \wedge R) \vee (p \wedge R) \equiv R$

$((\sim p \wedge \sim q) \wedge R) \vee (q \wedge R) \vee (p \wedge R)$ باستخدام قانون التجميع

$((\sim p \wedge \sim q) \wedge R) \vee (q \vee p) \wedge R)$ باستخدام قانون التوزيع

$(\sim (p \vee q) \wedge R) \vee (q \vee p) \wedge R)$ باستخدام قوانين ديموركان

$((\sim (p \vee q) \vee (q \vee p)) \wedge R)$

$((\sim (q \vee p) \vee (q \vee p)) \wedge R$ باستخدام المتمم

$T \wedge R$ باستخدام لمحايد

$R \equiv R$

مثال 18 : برهن صحه العباره باستخدام كل من جبر القضايا وجدول الصدق

$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$

$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$　　باستخدام قانون ديموركان

$\sim p \wedge (\sim q \vee q)$　　باستخدام قانون التوزيع

$\sim p \wedge T = \sim p$　　باستخدام قانون المتمم

$\sim p \equiv \sim p$　　باستخدام قانون المحايد

p	q	~p	p ∨ q	~ (p ∨ q)	~p ∧ q	~ (p ∨ q) ∨ (~p ∧ q)
T	T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T

واجب: اثبت صحه العباره باستخدام جدول الصدق

1. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
2. $q \rightarrow p \equiv \sim p \rightarrow \sim q$

8-1 المسورات (Quantifiers): هي عبارة في المنطق الرياضي ولها ايضا (قيم صدق – ولها أمكانية النفي)،
سميت بالمسورات لأنها تحيط بالكائن الرياضي (من الرياضيات) كما يحيط السوار بالمعصم وهي على نوعين:

1-8-1 المسورات الكلية (Universal Quantifier): وهي التي تبحث منطقيا في الاحكام المنطقية للجماعات ويرمز لها (∀) وتقرأ (كل) او (for all)، ومثال على ذلك لكل شخص حياته الخاصة ورياضيا نعرفها بالشكل التالي:

لتكن $p(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A ، وأن العبارة لكل $x \in A$ تكون $p(x)$ صادقه عبارة مسورة كلياً

$$\forall\, x \in A \rightarrow p(x) \text{ (صادقة)}$$

ملا حظات

- ❖ أن العبارة $\forall x \in A$ ، $p(x)$ تكون صادقة اذا وفقط اذا كانت $Tp=A$ وهذا يعني ان مجموعة الصدق للعباره المسورة كليا هي المجموعةالمعرفه عليها تلك العبارة
- ❖ يكون التعبير المسور كليا صادقا **اذا كان كل شي** في ذلك التعبير يحققه ضمن المجموعه المعرفة
- ❖ يكون التعبير المسور كليا كاذبا **اذا ما وجد شي ما** في ذلك التعبير لا يحققه ضمن المجموعه المعرفة

مثال 19: اثبت ان العباره الاتيه مسور كلي :　$\forall\, n \in N, n > -2$

اذن العباره صحيحه لان كل المجموعه تحقق العباره اذن هي صادقه $Tp=N$　$0,1,2,3 > -2$

مثال 20 : اثبت ان العباره الاتيه مسور كلي　$\forall\, x \in R, x^2 \leq 0$

اذن العباره كاذبه وذلك لان المجموعه كلها لا تحقق العباره اذن هي كاذبه $Tp \neq R$

2-8-1 المسورات الجزئية (Existential Quantifier)**أن الرمز(∃) والذي يقرأ (يوجد) أو (there exists)**

لتكن $p(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A ، فالعبارة $x \in A$، بحيث $p(x)$ صادقة تسمى مسورة جزئيا أي أن:

$$\exists x \in A, p(x) \text{ صادقة}$$

<u>ملاحظات:</u>

- أن العبارة $\exists x \in A, p(x)$ (تقرأ يوجد عنصر مثل x ينتمي للمجموعه A)تكون صادقة اذا كانت مجموعة الصدق Tp غيرخالية أي أن. $Tp \neq \emptyset$
- يكون التعبير المسور جزئيا صادقاً **<u>اذا وجد شي</u>** في ذلك التعبير يحققه
- يكون التعبير المسور جزئيا كاذبا **<u>اذا كان كل شي</u>** في ذلك التعبير لا يحققه

<u>مثال 21</u>: اثبت ان العباره الاتيه مسورجزئي

$\exists n \in N, 3n + 1 \succ 2$

$3(1) + 1 \succ 2$

اذن يوجد عنصر واحد على الاقل يحقق العباره ان تكون صادقه اذا يعتبر ذلك مسور جزئي لان مجموعه الحل غير خاليه

$Tp \neq \phi$

<u>مثال 22</u>: اثبت ان العباره الاتيه مسورجزئي

$\exists x \in R, x^2+1=0$

$(-1)^2+1 \neq 0$

$(2)^2+1 \neq 0$

اذن لايوجد اي عنصر واحد يحقق العباره ان العباره كاذبه اذن لا تعتبر مسور جزئي لان مجموعه الحل خاليه

$Tp = \phi$

3-8-1نفي المسورات **:**يتلخص مبدأ المسورات بالقاعدتين التاليتين:

1. $\sim(\exists x \in A, p(x)) \cong \forall x \in A, \sim p(x)$
2. $\sim(\forall x \in A, p(x)) \cong \exists x \in A, \sim p(x)$

<u>مثال 23</u> **:**

$\sim [\forall n \in N, n+2<8]$ النفي $\exists n \in N, \sim(n+2<8)$

$\exists n \in N, n+2 \geq 8$

<u>مثال 24</u>: اذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}$ فان

$\sim[\exists x \in A, x+3=10]$ النفي $\forall x \in A, \sim(x+3=10) \cong \forall x \in A, x+3 \neq 10$

9-1التعليل المنطقي (Logical Reasoning)

تعريف المجادله : لتكن $S_1,S_2,S_3,\ldots\ldots S_n$ مجموعه من العبارات ولتكن S مستنتجه من العبارات $S_1,S_2,S_3,\ldots\ldots S_n$

تسمى العباره(S تستنتج من العبارات $S_1,S_2,S_3,\ldots\ldots S_n$ بالمجادله حيث ان

- $S_1,S_2,S_3,\ldots\ldots S_n$ تسمى مقدمات او فرضيات المجادله
- S تسمى بنتيجه تلك المجادلة

ونعبر عن المجادله اعلاه رياضيا كالاتي $S_1,S_2,S_3,\ldots\ldots S_n \vdash S$ وقد تكون المجادله صادقه او تكون خاطئه .

ان الغرض من دراسه موضوع المجادلات هو لبيان صواب او عدم صواب ما نقراه او نسمعه من المجادلات والمناقشات العلميه بأستخدام المنطق وقوانين جبر القضايا

❖ ملاحظه ان قيمه المجادله $S_1,S_2,S_3,\ldots\ldots S_n \vdash S$ لا تعتمد عل قيم صدق العبارات التي تتضمنها ولا عل محتويات تلك العبارات بل تعتمد على صيغه المجادله نفسها

❖ المجادله $S_1,S_2,S_3,\ldots\ldots S_n \vdash S$ تكون صائبه اذ وفقط اذا كانت العباره $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S4 \rightarrow\ldots S$ هي عباره تحصيل حاصل

مثال 25: هل المجادله التاليه صحيحه ام لا (اثبت صحة المجادلة)
اذا كان 6 عدد زوجي فان 2 لا يقسم على العدد 7
اما 5 ليست عدد اولي او 2 يقسم على العدد 7
لتكن 5 عدد اولي
وبالتالي فأن العدد 6 هو عدد فردي

الحل : نفرض ان العباره اذا كان 6 عدد زوجي　p
نفرض ان العباره 2 يقسم على العدد 7　q
نفرض ان العباره 2 لا يقسم على العدد 7　~ q
نفرض ان العباره 5 ليست عدد اولي　~ r
العباره 5 عدد اولي　r
العدد 6 هو عدد فردي　~p

$S_1 : p\rightarrow \sim q$
$S_2: \sim r \vee q$
$S_3: r$
$S : \sim p$

وحسب قانون المجادله نحصل على العباره التاليه $(p\rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge (r)\rightarrow(\sim p)$ بعدها نقوم بعمل جدول الصدق لهذ العباره واذا كانت النتيجه تحصيل حاصل فان المجادله صحيحه واذا لم تكن تحصيل حاصل تكون المجادلة خاطئه

p	**q**	**r**	**~q**	**p→ ~q (1)**	**~r**	**~r v q (2)**	**1 ∧2 ∧r**	**~p**	**1 ∧2 ∧r→~p**
T	T	T	F	F	F	T	F	F	**T**
T	T	F	F	F	T	T	F	F	**T**
T	F	T	T	T	F	F	F	F	**T**
T	F	F	T	T	T	T	F	F	**T**
F	T	T	F	T	F	T	T	T	**T**
F	T	F	F	T	T	T	F	T	**T**
F	F	T	T	T	F	F	F	T	**T**
F	F	F	T	T	T	T	F	T	**T**

اذا المجادله صحيحه لان الناتج النهائي تحصيل حاصل

مثال 26 : هل المجادله التاليه صحيحه ام لا
اذا كان الجو غير ممطرا فأن احمد سيصاب بالزكام
احمد لم يصاب بالزكام
وبالتالي الجو ممطرا

الحل
نفر ض ان عباره اذا كان الجو غير ممطر $\sim p$
احمد سيصاب بالزكام q
احمد لم يصاب بالزكام $\sim q$
الجو ممطرا p

$S_1: \sim p \rightarrow q$
$S_2: \sim q$
$S: p$
$(\sim p \rightarrow q) \wedge (\sim q) \rightarrow p$

p	**q**	**~P**	**~q**	**~ p→ q**	**~p→ q ∧ (~q)**	**(~p→ q) ∧ (~q) →p**
T	T	F	F	T	F	**T**
T	F	F	T	T	T	**T**
F	T	T	F	T	F	**T**
F	F	T	T	F	F	**T**